

画法几何学

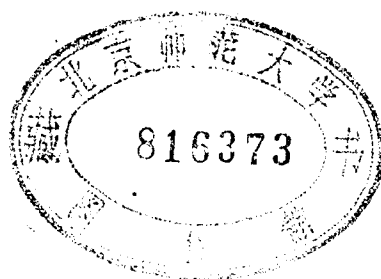
合肥工业大学工程制图教研室 编

安徽科学技术出版社

画法几何学

合肥工业大学工程制图教研室 编

11/130/07



安徽科学技术出版社

责任编辑 孙述庆
封面设计 陈乐生

画法几何学

合肥工业大学工程制图教研室 编

*

安徽科学技术出版社出版

(合肥市跃进路1号)

安徽省新华书店发行

安徽新华印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张12 字数287,000

1981年8月第1版 1981年8月第1次印刷

印数1—17,000

统一书号: 15200·22 定价: 1.28元

前 言

《画法几何学》是高等学校工科专业的必修课程，是广大工程技术人员必须具有的基础知识，因此，编写适合教学和自学需要的《画法几何学》，一直是人们十分关心的问题。这就是我们编写这本书的出发点。

本书编写的依据，主要是全国高等学校工科制图教材编审委员会1980年5月审定的《画法几何及工程制图教学大纲》的各项规定，全书内容是在我校近两年画法几何教学所用自编教材的基础上，并认真总结我校两个班级画法几何教学改革试点的经验而写成的。为与本书配套，还另编了一本《画法几何习题集》。

画法几何的基本任务，应该使读者学会解决空间几何问题的图示法和图解法，并发展空间想象能力和空间分析能力。因而本书的编写力求加强画法几何本身的基础理论，为进一步学习工程制图奠定基础。为此，本书在内容编排上作了如下处理：

1. 重视教材本身的内在联系，由浅入深，循序渐进，避免难点集中。
2. 注重基础知识，不过早或过于勉强地联系生产的实际内容。
3. 考虑到近期国内外画法几何在理论、方法和应用等方面都有新进展的情况，因此增添了“亲似对应”等内容。同时增加了一些必要的算式，这是“形数结合”的一点尝试。
4. 某些章节(如第六章曲线与曲面等)的选材，有意识地安排得略多一些，目的是便于教师根据教学需要能进行取舍，也便于学生自学和复习。

本书在教研室集体讨论的基础上，由雷云青、朱典铭、岳礼斌、胡庶华、夏鼎立、李铎声、纵肇基、胡章田、华重、周英掌等同志编写，陆静静、荆彩凤两同志描图，华重同志校图。最后由雷云青同志审阅定稿。

这本《画法几何学》在编写过程中，一直得到各方面的重视与支持。去年七月，一机部部属九所高等工科大学(湖南大学、甘肃工业大学、上海机械学院、陕西机械学院、东北重型机械学院、太原重型机械学院、哈尔滨电讯工程学院、沈阳机电学院)和特邀的安徽机电学院等校的工程制图教研室负责人在兰州召开会议，对我室编写的这本画法几何教材进行了热烈地讨论，提出了不少宝贵意见，谨此致谢。

合肥工业大学工程制图教研室

1981.3.

目 录

第一章 绪 论

§1—1 画法几何学的任务	1
§1—2 中心投影法与平行投影法	1
§1—3 正投影法和轴测投影法	4
§1—4 画法几何的学习方法	5

第二章 点

§2—1 点在两投影面体系中的投影	7
§2—2 点在三投影面体系中的投影	8
§2—3 重影点及其可见性	10
§2—4 分角与卦角	11

第三章 直 线

§3—1 直线的投影	13
§3—2 特殊位置的直线	14
§3—3 直线上的点	16
§3—4 线段的实长与倾角	18
§3—5 两直线的相对位置	20
§3—6 直角投影定理	22

第四章 平 面

§4—1 平面的表示法	25
§4—2 特殊位置的平面	26
§4—3 平面上的点和直线	31
§4—4 平面上的特殊位置直线	35

第五章 直线与平面、两平面的相对位置

§5—1 直线与平面、两平面平行	38
§5—2 直线与平面、两平面相交	41
§5—3 直线与平面、两平面垂直	48

第六章 投影变换

§6—1 换面法	56
§6—2 旋转法	67

第七章 曲线与曲面

§7—1 曲线	78
§7—2 直纹曲面	81

§7—3 回转曲面	89
§7—4 螺旋线与螺旋面	95
第八章 立 体	
§8—1 平面立体	102
§8—2 回转体	107
第九章 平面与立体相交	
§9—1 平面与平面立体相交	113
§9—2 平面与曲面立体相交	115
§9—3 平面与组合体相交	120
第十章 立体与立体相交	
§10—1 直线与立体相交	123
§10—2 两平面立体相交	126
§10—3 平面立体与曲面立体相交	127
§10—4 两曲面立体相交	129
第十一章 立体的表面展开	
§11—1 平面立体的表面展开	138
§11—2 曲面立体的表面展开	141
§11—3 变形接头的展开	147
§11—4 相贯体的表面展开	149
第十二章 轴测投影	
§12—1 概述	151
§12—2 正轴测投影的轴向变化系数和轴间角	153
§12—3 平面体的正轴测投影	156
§12—4 平行于坐标面的圆的正轴测投影	159
§12—5 曲面体的正轴测投影	162
§12—6 斜轴测投影	166
第十三章 亲似对应	
§13—1 概述	170
§13—2 两平面场的亲似对应	171
§13—3 亲似对应的主方向及图形变换	174
§13—4 圆的亲似图形	176
§13—5 两平面场的亲似对应 在正投影中的应用	178
§13—6 空间的亲似对应	180
§13—7 空间亲似对应 在正投影中的应用	182

第一章 绪 论

§ 1—1 画法几何学的任务

在工程技术中,常常需要把空间形体表示在平面图纸上,或者利用画在图纸上的平面图形来研究空间形体的几何问题。为了使两个向度的平面图形能够确切地反映三个向度的空间形体,这就必须具有在平面上表示空间形体的有关原理和方法。画法几何学就是专门叙述和论证在平面上表达空间形体的原理和方法的一门科学。其任务:

1. 研究在平面上表达空间形体的图示法。
2. 研究在平面上解决空间几何问题的图解法。

工程上应用的机械图、建筑图、水利图等等,都是用画法几何的原理和方法画出来的,这些“图”,人们可以用它来进行工程设计、指导产品生产、开展科学研究、交流技术经验。

“图”的重要作用,就在于解决各种各样的形状、大小、位置等空间几何问题,所以“图”是科学技术界进行上述活动的重要工具,人们也就把“图”喻为科学技术界的语言。广大科技工作者都必须熟悉和掌握这种语言,能具有自如地运用“图”来表示和解决工程实际问题的才能,否则要从事创造性的科技工作,是难以想象的。

随着科学技术的发展,特别是近年来计算技术、高能技术、宇航技术的突飞猛进,这就要求人们在用“图”表示和解决工程实际问题时,要有丰富的空间想象力,而在学习画法几何掌握图示法、图解法的过程中,正可以培养和发展人们这方面的智慧与能力。这对进而学习与研究力学、机械原理、机械零件或其他空间思维较复杂的专业课,都有直接的帮助。

§ 1—2 中心投影法与平行投影法

一、中心投影法

设在空间有一平面 P 和不在该平面上的一点 S (图1—1), 我们称平面 P 为**投影平面**, 点 S 为**投影中心**。在空间任取一点 A , 经点 S 和 A 引一直线 SA (SA 称为**投射射线**), 延长此直线与平面 P 交于 a 点, 此 a 点就是空间点 A 在 P 平面上的**中心投影**。

若求点 B 的投影, 则自 S 经过 B 点引一投射射线, 该投射射线与 P 平面的交点 b , 便是 B 点在 P 平面上的中心投影。因为经过两点只能引一条直线, 而一条直线与 P 平面只有一个交点, 所以给出了投影中心 S 和投影面 P 的位置以后, 空间的每一个点在 P 平面上就各有唯一的投影。这种投射射线均通过投影中心的方法, 称为**中心投影法**。

在中心投影法中,若空间 A 、 A_1 、 A_2 等点在经过 S 的同一条投射射线上,则它们的投影都重

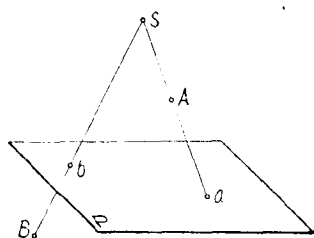


图 1-1

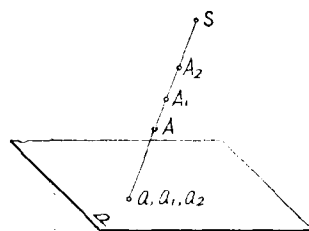


图 1-2

合于一点(图 1-2)。因此,若给出投影中心 S 和某点的投影,则该点在空间的位置不能确定,因为在投射线上所有的点,其投影都是 a 点。

二、平行投影法

若把投影中心视为一个无限远点,则所有的投射射线都互相平行(图 1-3)。这样的投影方法,称为**平行投影法**。

在平行投影法中,给出投影面 P 和投射方向 S 以后,空间每一点在投影面上各有其唯一的投影。与中心投影法一样,在投影面上的一个投影,不能确定空间点的位置。

平行投影,分为**斜角投影**和**直角投影**两种。前者投射方向与投影面倾斜(图 1-3),后者投射方向与投影面垂直(图 1-4)。

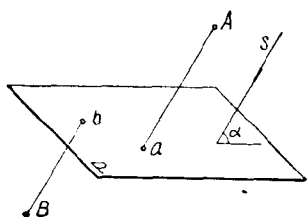


图 1-3

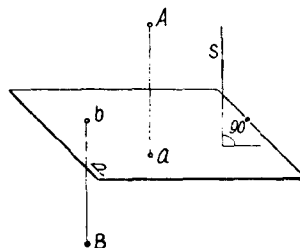


图 1-4

三、中心投影与平行投影的共同性质

1. 直线的投影一般仍是直线,特殊情况下,投影积聚成一点。

直线可看作是点的集合,我们把线上一系列的点都投射到投影面上,则经过直线上所有点的投射射线形成一个投射面,这个投射面与投影面的交线便是直线的投影(图 1-5、图 1-6 中的直线 AB 投影为 ab)。由初等几何可知,两平面的交线必是直线,所以直线的投影一般仍是直线。但当直线通过投影中心(图 1-5 中的直线 CD),或是直线平行于投射方向(图 1-6 中的直线 CD),则该直线的投影便积聚成一点。

2. 若点在直线上,则该点的投影必在该直线的投影上(图 1-5、图 1-6 中的 K 点)。

投影法主要研究空间几何元素与其投影之间的对应关系,即研究投影图上哪些空间几何关系保持不变,哪些几何关系有了变化,其变化规律如何。对我们尤其重要的是掌握哪些不

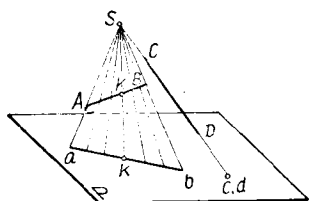


图 1—5

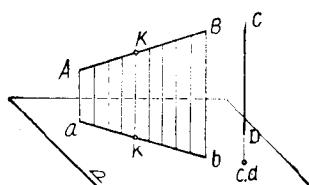


图 1—6

变的关系，以作为今后画图和看图的基本依据。

四、平行投影的不变性

平行投影除上述两个投影性质外，还具有以下几个不变的性质：

1. 一直线的两线段之比，等于其投影之比。(图1—7)。

由于投射射线相互平行，即 $Aa \parallel Kk \parallel Bb$ ，故直线 AB 与其投影 ab 被它们所截的线段必成比例，即 $\frac{AK}{KB} = \frac{ak}{kb}$ 。

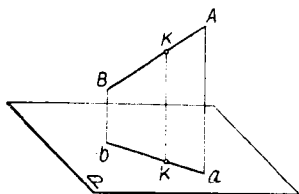


图 1—7

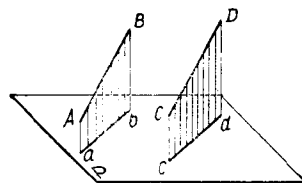


图 1—8

2. 平行二直线的投影仍互相平行(图1—8)。

因为 $AB \parallel CD$ ，则由 AB 和 CD 所作的投射面必互相平行。由初等几何可知，两平行平面与第三平面的交线必互相平行，故 $ab \parallel cd$ 。

3. 平行二直线的两线段之比，等于此两线段的投影之比(图1—9)。

因 $AB \parallel CD$ ， $ab \parallel cd$ ，自 A 点作 $AB_0 \parallel ab$ ，自 C 点作 $CD_0 \parallel cd$ ，则 $\triangle ABB_0 \sim \triangle CDD_0$ (两三角形的三条边分别互相平行)，故 $AB : CD = AB_0 : CD_0$ 。因 $AB_0 = ab$ ， $CD_0 = cd$ ，所以 $AB : CD = ab : cd$ 。

平行投影除上述不变性外，另一特点是当直线段或平面图形平行投影面时，其投影反映线段的实长和平面图形的实形(图1—10)。

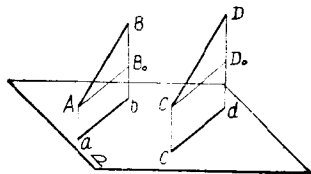


图 1—9

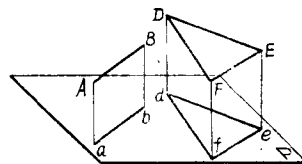


图 1—10

§1—3 正投影法和轴测投影法

工程上用的投影图,必须确切地反映空间唯一的几何关系。前面已经指出,一个空间的点有唯一确定的投影;反之,点的一个投影却不能确定该点的空间位置。这就是说,只凭一个投影不能反映唯一的空间情况。例如,有投影相平行的两直线 $ab \parallel cd$,但对应到空间可能是互相平行的两直线(图1—8),也可能是不平行的两直线(图1—11)。

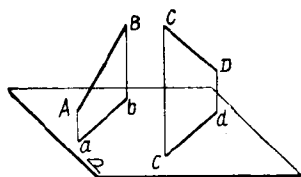


图 1—11

为使投影图能确切地反映空间唯一的几何关系,就必须再引入一些条件和规定来满足这个要求。为此,工程上根据不同情况分别作了一些专门规定,相应地形成了若干种投影方法。在机械工程图中用得最广泛的是正投影法,其次是轴测投影法。

一、正投影法

正投影法所作的图,是一种多面投影图。它采用相互垂直的两个或两个以上的投影面,在每个投影面上,分别用直角投影获得空间几何形体的投影,由这些投影便能完全确定该空间几何形体的位置和形状。图1—12是几何体在三个互相垂直的投影面上所得的三面投影图。这种图的优点,是可以从图上直接量得几何体的许多尺寸,也即度量性好,而且作图也较简便。缺点是直观性较差。

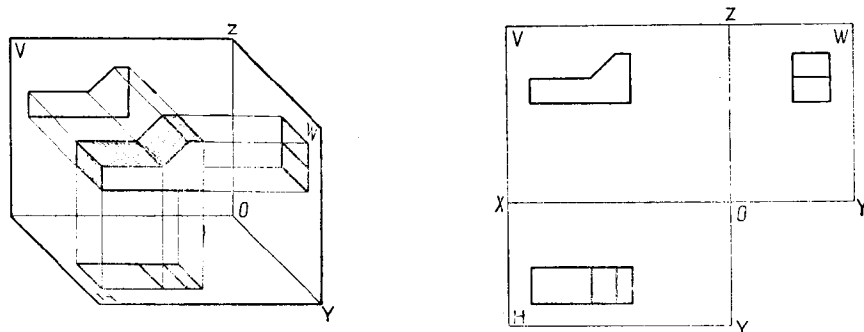


图 1—12

二、轴测投影法

轴测投影法所作的图,是一种单面投影图。它是把空间的几何体以及确定该几何体的直角坐标系,采用平行投影法,一齐投射到某个选定的投影面上,这样得到的投影图,称为轴测投

影图(图1—13)。这种图的优点是直观性较好,缺点是度量性较差,且作图也较繁难。它一般与正投影图配合使用,以弥补正投影图直观性较差之不足。在书本中常用作插图。

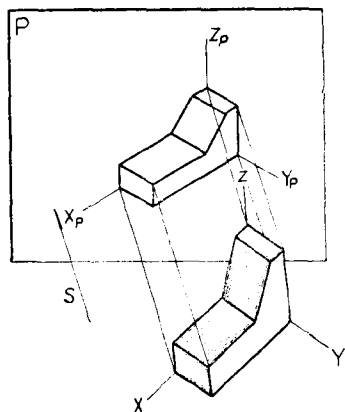


图 1—13

§1—4 画法几何的学习方法

画法几何学的学习,自始至终都应运用初等几何的原理和上述投影方法,即研究空间几何问题在平面上的图示法,在平面图上解决空间几何问题的图解法。因此,在学习画法几何的过程中,应注意以下几点:

一、注意联系初等几何知识

在学习中,要经常回忆初等几何知识,特别是立体几何的知识,把初等几何的知识与画法几何原理密切地联系起来。只有这样,才能获得良好的学习效果。

二、注意听课

听课是学习画法几何的重要一环。讲课的内容大都是各章节的重点,也是教师经验的积累,应该认真听讲。听讲前最好能预习一下课文,这样在听讲时,就能做到心中有数。听讲后要及时复习。

三、注意空间想象力的训练

过去,有的学生因感到画法几何难学而苦恼,他们把原因归咎于缺乏空间想象力,好象只有预先具备了充分的空间想象力,才能学好画法几何学。事实上,画法几何本身就负有培养空间想象力的任务。因此,在学习过程中,要经常注意空间几何形体与投影图之间的对应关系的分析与训练。这种“从空间到平面,再由平面回到空间”的反复思维过程,就是本课程最有效的学习方法。只有这样,才能保证我们的空间想象力得到充分地发展。

四、注意防止两种偏向

在学习过程中要防止两种偏向。一种是忽视空间几何关系的分析以及空间与平面图之间

的对应关系,拿到习题往往不加思索,就试图用书本上的某些结论去解决它;另一种偏向,是只注意空间的几何关系,而忽视书本上已经归纳起来的投影规律,每解一个具体问题,均企图自己用模型比拟空间情况来获得答案。这种理论脱离实际和忽视理论的学习方法,都会给解题带来困难。

五、注意实践的重要作用

本课程是一门基础技术课,因此它的实践意义十分重要。它的实践性,表现在解决问题必须精确地把图画出来。因此在学习过程中应注意几点:

1. 应着重研究各种典型图例,复习时不宜单纯停留在书本阅读上,应边看书边动手画图。这样,不但易于了解课文的内容,而且能切实掌握其原理及其具体应用。

2. 要系统地进行投影作图练习,对所学的每一章节,必须完成一定数量的习题,以便巩固它。

3. 对全部作业和习题,一定要认真对待,考虑成熟后再用圆规和直尺来完成,要求养成作图精确、清晰和保持图面整洁的习惯。

复 习 题 一

1. 什么叫中心投影法? 什么叫平行投影法?
2. 为什么点的一个投影不能确定其空间位置?
3. 在机械工程图中,用得最广泛的是什么投影法? 为什么?

第二章 点

点, 是最基本的几何元素, 一切几何形体都可看作是点的集合。因此, 研究点的投影性质和规律, 是研究一切几何形体的基础。下面就从点开始来说明正投影法的建立及其基本原理。

§2—1 点在两投影面体系中的投影

一、两投影面体系的建立与展开

两投影面体系, 由互相垂直的**水平投影面 H** 和**正立投影面 V** 组成 (图2—1)。 V 面与 H 面的交线 OX , 称为**投影轴**。

设空间有一点 A , 从点 A 分别向 H 面和 V 面引垂直的投射射线 Aa 和 Aa' , 得到**水平投影** a 和**正面投影** a' 。若移去点 A (图2—2), 由投影 a 和 a' 完全可以确定点 A 在空间的原来位置。只要从 a 和 a' 分别作 H 和 V 面的垂直线, 这两条垂线的交点即为点 A 在空间的位置 (图2—3)。

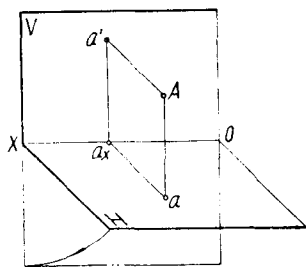


图 2—1

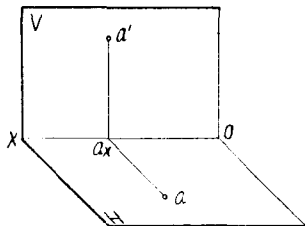


图 2—2

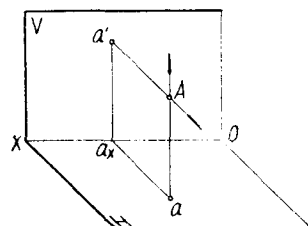


图 2—3

为使两个投影 a 和 a' 画在同一平面上, 我们规定将 H 面绕 OX 轴按图2—1中箭头所示方向旋转 90° , 使与 V 面重合成一平面。这样就得到如图 2—4 所示的投影图。由于投影面可以认为是无边界的, 故通常在投影图上不画出它们的边框 (图2—5)。投影图上的细实线 aa' 称为**投影连线**。

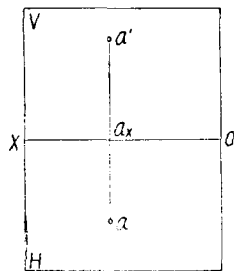


图 2—4

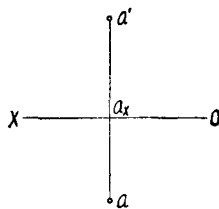


图 2—5

二、点的投影规律

1. 一点的正面投影与水平投影的连线垂直于投影轴 OX ，即 $aa' \perp OX$ 。

如图 2—1 所示，因为由投射射线 Aa 和 Aa' 组成的平面 Aaa_Xa' 必垂直于 H 面和 V 面，也必垂直于 H 面和 V 面的交线 OX 轴，故平面 Aaa_Xa' 上的直线 aa_X 和 $a'a_X$ 必垂直于 OX 轴，即 $aa_X \perp OX$ 和 $a'a_X \perp OX$ 。当 a 随着 H 面旋转而与 V 面重合时， $aa_X \perp OX$ 的关系不变。因此在投影图上 a 、 a_X 、 a' 三点共线，且 $aa' \perp OX$ (图 2—4)。

2. 一点的水平投影到 OX 轴的距离 (aa_X) 等于该点到 V 面的距离 (Aa')，而其正面投影到 OX 轴的距离 ($a'a_X$) 等于该点到 H 面的距离 (Aa)。

这是因为平面 Aaa_Xa' 是一个矩形，故其对边相等，因此 $aa_X = Aa'$ 和 $a'a_X = Aa$ 。

若空间点就在投影面上，则点到该投影面的距离为零，因此它在该投影面上的投影与空间点本身重合，而在另一投影面上的投影必在投影轴上。图 2—6 中的 A 点在 V 面上， B 点在 H 面上，故 a' 与 A 重合， a 在 OX 轴上；而 b 与 B 重合， b' 在 OX 轴上。

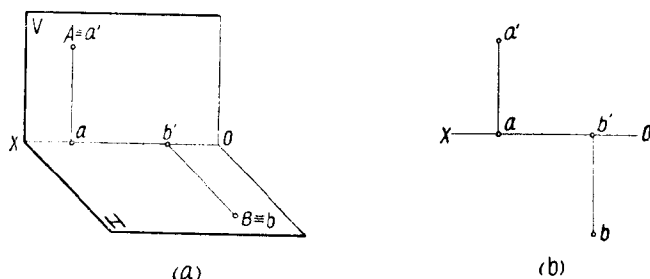


图 2—6

§2—2 点在三投影面体系中的投影

一、三面体系的建立与展开

由 §2—1 可知，点的两个投影已能确定该点的空间位置，但为了更清楚地表达某些几何形体，常需采用三面投影图。

三投影面体系，是在 H 、 V 两投影面体系的基础上，加入一个与 H 、 V 均垂直的侧立投影面 W 所组成 (图 2—7)。将三投影面体系展开成一平面时，规定 V 面不动， H 面和 W 面分别绕 OX 和 OZ 轴按图 2—7 箭头所示方向转 90° 与 V 面重合成一个面。在展开过程中，投影轴 OY 分为两支，一支随 H 面转向下方，用 Y_H 表示；一支随 W 面转向右方，用 Y_W 表示 (图 2—8)。由于投影面是无边界的，故去掉投影面的边框，即得图 2—9 所示的三投影面体系展开后的投影图。

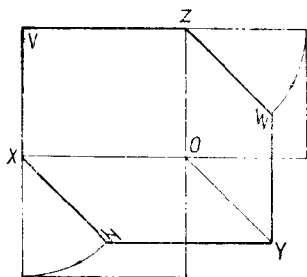


图 2—7

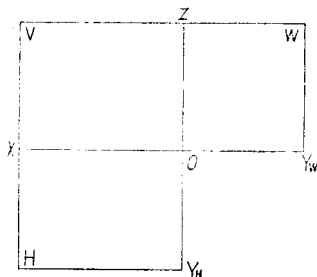


图 2—8

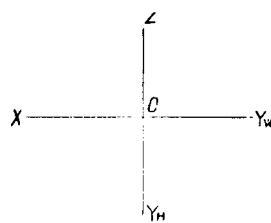


图 2—9

二、点的三面投影和直角坐标

设空间点 A 在三投影面体系中的投影为 a (水平投影)、 a' (正面投影) 和 a'' (侧面投影), 如图 2—10 所示。其三面投影图如图 2—11 所示, 投影连线 aa' 和 $a'a''$ 分别垂直于 OX 轴和 OZ 轴, 这一投影规律前面已讨论过。至于水平投影 a 和侧面投影 a'' 之间的关系, 应符合 $aa_x = a''a_z$, 因为它们都反映点 A 到 V 面的距离。为保持点的三面投影之间的对应关系, 作图时应使 $aa' \perp OX$ 、 $a'a'' \perp OZ$, 而 a 与 a'' 之间用圆弧连线 (圆心为 O , 半径为 aa_x 或 $a''a_z$)。为作图方便, 也可自点 O 作 45° 辅助线, 以实现这个关系 (图 2—12)。

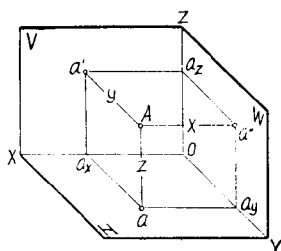


图 2—10

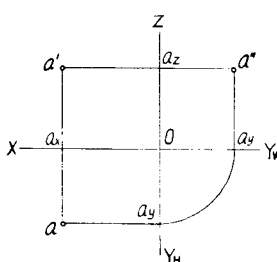


图 2—11

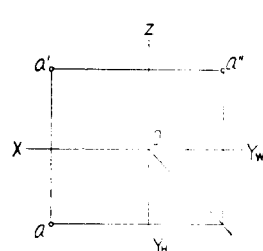


图 2—12

若将三投影面体系当作笛卡尔直角坐标系, 投影轴为坐标轴, O 为原点 (图 2—13)。则空间一点 A 到三个投影面的距离可用直角坐标 (x, y, z) 表示。这样, 点 A 的三个投影也可用坐标定出它们的位置, 若 $A(x, y, z)$, 则 $a(x, y, 0)$, $a'(x, 0, z)$, $a''(0, y, z)$ 。图 2—14 是用坐标确定投影位置的投影图。

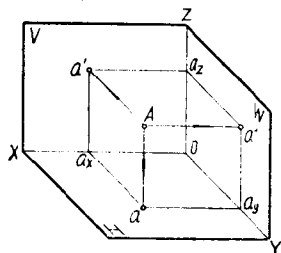


图 2—13

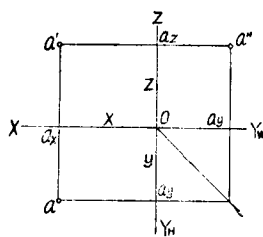


图 2—14

例 2-1 已知点 A 的坐标为 $A(15, 10, 20)$ ，求作其三面投影图。

【解】如图 2-15，由点 O 向左沿 OX 轴量 15 毫米得 a_x ，过 a_x 作 OX 轴的垂直线(投影连线)，自 a_x 向下量取 10 毫米得 a ，向上量取 20 毫米得 a' 。再利用圆弧或 45° 线作出 a'' 。

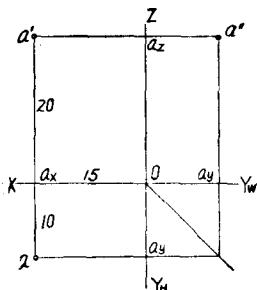


图 2-15

例 2-2 按图 2-16 (a)，已知点 B 的正面投影 b' 和侧面投影 b'' ，试求其水平投影 b 。

【解】按图 2-16 (b)，由于 b 和 b' 的投影连线垂直于 OX 轴，所以 b 一定在过 b' 而垂直于 OX 轴的直线上。又由于 b 至 OX 轴的距离等于 b'' 至 OZ 轴的距离，使 $bb_x = b''b_z$ ，便能定出 b 的位置。作图时可利用 45° 辅助线作出。

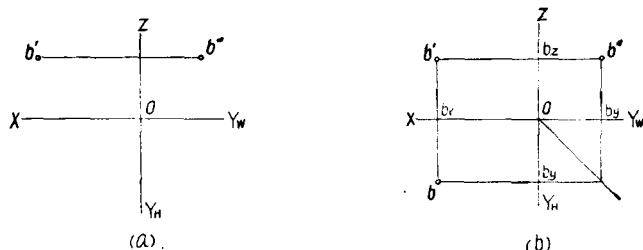


图 2-16

§2-3 重影点及其可见性

若两点位于同一投射线上，则它们在该投射线上所垂直的投影面上的投影必然重合，这样的两个点，称之为**重影点**。两个点的投影重合，必然有一点可见，而另一点是不可见的，因此，这里就有如何在投影图上判别其可见性的问题。如图 2-17 (a)、(b)， A 、 B 两点的水平投影重合， C 、 D 两点的正面投影重合， E 、 F 两点的侧面投影重合。为统一观察条件，我们约定可见性观察方向为自上向下，自前向后，自左向右。由于 A 点在上， B 点在下，故 a 为可见， b 为不可见；由于 C 点在前， D 点在后，故 c' 为可见， d' 为不可见；由于 E 点在左， F 点在右，故 e'' 为可见， f'' 为不可见。凡不可见的投影，按规定加一圆括弧来表示。

综上所述，判别重影点的可见性方法归纳如下(图 2-18)：

1. 若两点的水平投影重合，则视两点的正面投影， z 坐标值大者为可见。
2. 若两点的正面投影重合，则视两点的水平投影， y 坐标值大者为可见。
3. 若两点的侧面投影重合，则视两点的水平投影或正面投影， x 坐标值大者为可见。

研究重影点的目的，是为了今后解决投影图中所出现的可见性问题。

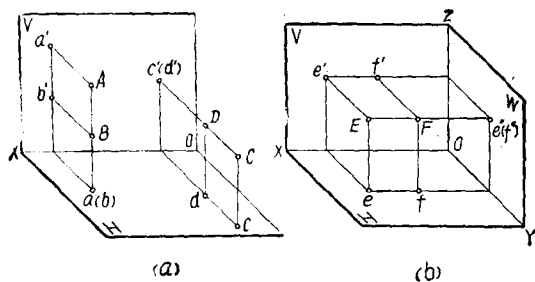


图 2—17

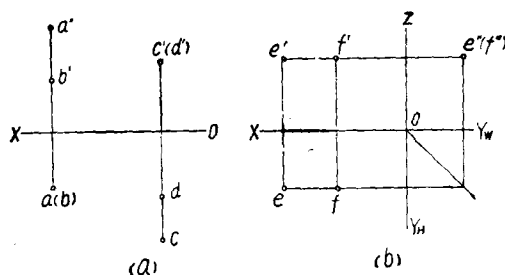


图 2—18

§2—4 分角与卦角

一、分角

在两投影面体系中，由于投影面没有边界，这就把空间分为四个部分，称之为分角。以第一、二、三、四分角命名之，其次序如图2—19(a)所示。其展开后的投影图如图2—19(b)、(c)所示。

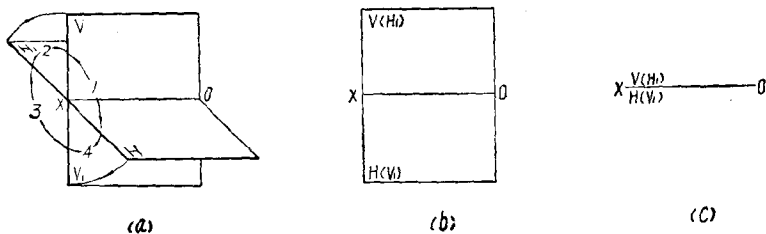


图 2—19

图2—20(a)、(b)，是第一分角中点A、第二分角中点B、第三分角中点C和第四分角中点D的投影情形和它们的投影图。

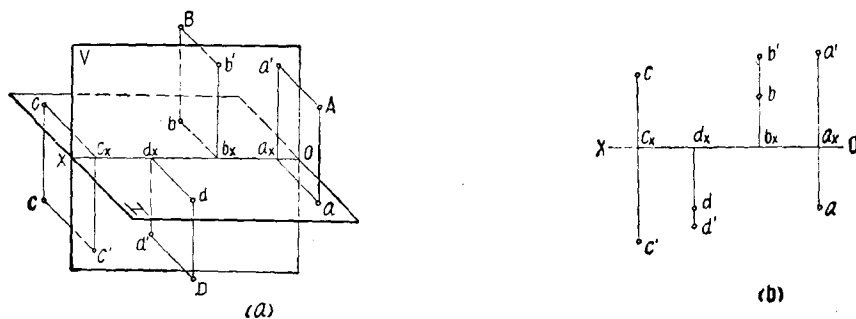


图 2—20