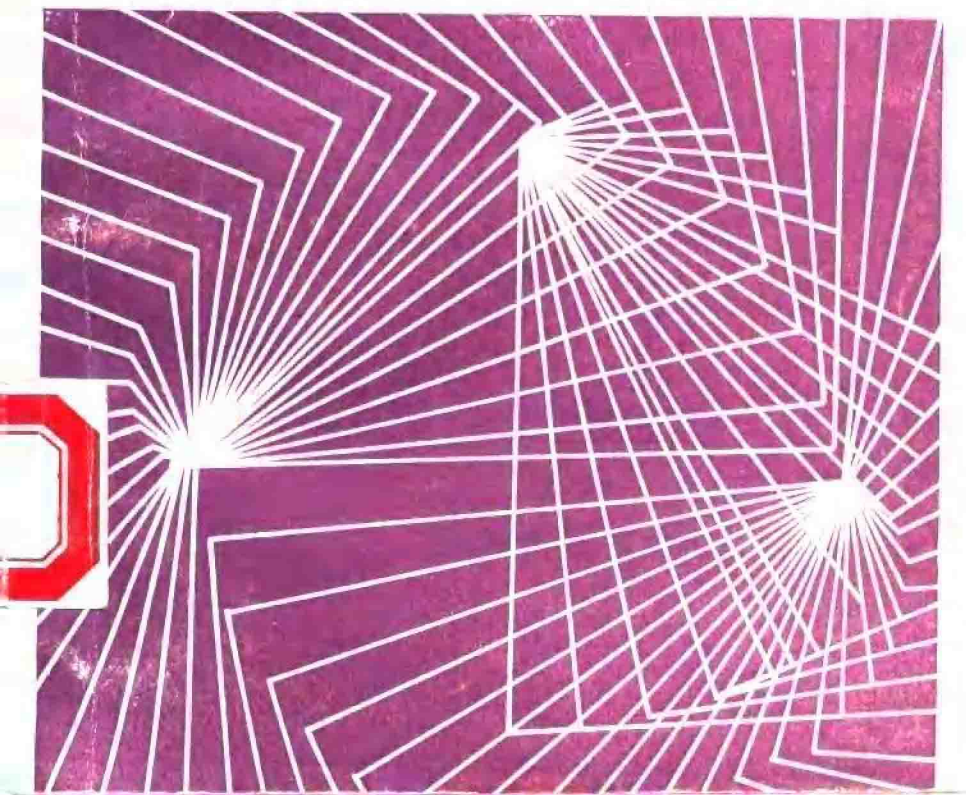


● 成人高等教育教材

线性代数与概率论

● 谢满耀 温向阳 吴 满 编

● 华南理工大学出版社



成人高等教育教材

线性代数与概率论

谢满耀 温向阳 吴 满 编

华南理工大学出版社

内 容 提 要

本书是根据全国普通高等理工院校成人教育数学研究组制定的普通高等理工院校成人教育线性代数与概率论专科教学基本要求,并参考广东省自学考试委员会制定的线性代数与概率论(专科)考试大纲编写而成的。

本书分为线性代数与概率论两部分。第一部分为线性代数,主要内容有矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型;第二部分为概率论,主要内容有随机事件的概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征。各章后都列有习题,书末还附有习题答案和详细的习题解答。

本书深入浅出,叙述详细,清楚易懂,便于自学,适合作各类成人高等教育的教材,亦适合于社会青年和工程技术人员参考。

〔粤〕新登字12号

成人高等教育教材

线性代数与概率论

谢满耀 温向阳 吴 满 编

责任编辑 潘宜玲

*

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山 邮码 510641)

各地新华书店经销

广东封开人民印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11.75 字数 264 千

1993年1月第1版 1997年4月第5次印刷

印数:22001—27000

ISBN 7 5623-0425-4/O·41

定价:14.50元

华南理工大学成人教育学院
成人高等教育教材编辑委员会

主 任 张刚能

副主任 吴 满 林社均

编 委 吴 满 许仁铭 李诚涪

陈守颐 罗龙开 刘乃新

韦 东

前 言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，是普通高等学校的基本任务之一。

我校在稳步发展全日制本科教育、研究生教育的同时，挖掘潜力，充分发挥学科齐全、师资力量雄厚、办学条件好、办学经验丰富等优势，为适应社会主义建设的需要，于1957年创办了高等函授教育，继而办起夜大学，发展到1987年经国家教委批准正式成立华南理工大学成人教育学院，统筹管理全校的成人高等教育工作。三十多年来，我校的成人高等教育为广东省、海南省、广西壮族自治区培养了一大批科技人才。特别是党的十一届三中全会以来，我校的成人高等教育主动地适应沿海地区开放改革的需要，面向珠江三角洲、经济开发区的市、县、乡镇企业，开展多层次、多形式、多规格的普通专科教育，职业技术教育，大学后的继续教育。从1981年至1989年为广东省培养了本、专科毕业生五千多人；岗位培训、专业技术培训、高等教育自学考试辅导、大学后的继续教育等近两万人。这些学生回到生产和工作岗位后，大部分发挥了骨干作用，不少学生担任了工厂企业的领导、工程师、高级工程师等重要职务，为社会主义建设事业做出了较大的成绩，创造了较好的经济效益和社会效益。教材建设是成人高等教育的重要任务之一，对保证教育质量的提高起着十分重要的作用。几年来，我校组织有教学经验的教师编写了适应成人学习特点的工业与民用建筑、电

子技术、工业管理工程等三个专业的系列专科教材和自学辅导书，为促进提高教育质量起了积极的作用。

为了更好地搞好我校成人高等教育的教材建设，提高教材的质量，有组织、有计划地编写出版质量较高的成人高等教育的教材，特成立“华南理工大学成人教育学院成人高等教育教材编辑委员会”。编委会的任务是：一、聘请有丰富教学经验的专家、教授有计划地编写成人高等教育教材、自学指导书；二、挑选国内出版的、质量较高的、适应成人学习的教材。

学校领导、各系领导、华南理工大学出版社以及广大教师对我院“成人高等教育教材编辑委员会”的工作一贯给予热忱的支持，在此一并致谢。

华南理工大学成人教育学院

院长 张刚能

1990年1月于广州

编者的话

本书原计划是已出版的《高等教学》的第三册，现以《线性代数与概率论》书名独立出版。

本书由“华南理工大学成人教育学院成人高等教育教材编辑委员会”统一领导编写。全书由谢满耀主笔，温向阳协助编写，最后由吴满统编定稿并担任主审。洪潮兴老师极为关心本书的编写，对本书提供了不少的修改意见，在此表示真诚的感谢。

由于编者学识有限，书中不妥之处难免，恳请广大读者批评指正，谨致谢意。

编者

1992年10月于广州

目 录

第一部分 线 性 代 数

第一章 n 阶行列式	(1)
一、 n 阶行列式的定义	(1)
二、 n 阶行列式的性质	(5)
三、克莱姆法则	(13)
习题	(17)
第二章 矩阵	(19)
一、矩阵的概念	(19)
二、矩阵的基本运算	(20)
三、矩(方)阵的行列式与逆矩阵	(32)
四、矩阵的初等变换与矩阵的秩	(40)
习题	(45)
第三章 线性方程组	(49)
一、线性方程组的基本概念	(49)
二、线性方程组的初等变换	(50)
三、线性方程组解的讨论	(51)
习题	(55)
第四章 线性方程组解的结构	(58)
一、向量组的线性相关性	(58)
二、线性方程组解的结构	(65)
习题	(71)
第五章 特征值与特征向量 二次型	(74)
一、方阵的特征值与特征向量	(74)
二、二次型	(79)
三、二次型及其标准形	(83)

四、正定二次型	(88)
习题	(90)

第二部分 概 率 论

第一章 排列与组合	(92)
一、基本原理	(92)
二、排列	(93)
三、组合	(96)
习题	(99)
第二章 概率论基本概念	(101)
一、随机现象与随机试验	(101)
二、随机事件与基本空间	(102)
习题	(105)
第三章 事件间的关系及运算	(106)
一、事件的包含与相等	(106)
二、事件的运算关系	(107)
三、事件的运算法则	(112)
习题	(113)
第四章 随机事件的概率及其计算	(116)
一、概率的古典定义	(116)
二、概率的统计定义	(120)
三、概率的性质、加法公式	(122)
习题	(125)
第五章 条件概率与乘法公式	(127)
一、条件概率	(127)
二、乘法公式	(129)
习题	(132)
第六章 全概公式与贝叶斯公式	(133)
一、全概公式	(133)

二、贝叶斯 (Bayes) 公式	(135)
习题	(138)
第七章 事件相互独立性 重复独立试验	(140)
一、事件的相互独立性	(140)
二、重复独立试验	(146)
习题	(151)
第八章 一维随机变量	(153)
一、随机变量	(153)
二、离散型随机变量及其分布	(155)
三、随机变量的分布函数	(158)
四、二项分布、泊松分布	(162)
五、连续型随机变量及其分布	(170)
六、均匀分布、指数分布、正态分布	(177)
习题	(186)
第九章 随机变量的函数及其分布	(191)
一、一维随机变量函数的分布	(191)
二、服从同一零-壹分布的相互独立随机变量的和、隶莫 佛-拉普拉斯中心极限定理	(197)
习题	(200)
第十章 随机变量的数字特征	(202)
一、数学期望及其性质	(202)
二、方差及其性质	(210)
习题	(215)
习题答案	(216)
习题解答	(232)
附表1 泊松分布概率值表	(355)
附表2 泊松分布累计概率值表	(357)
附表3 标准正态分布的分布函数表	(359)

第一部分 线性代数

第一章 n 阶行列式

一、 n 阶行列式的定义

设有 n^2 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 若将其排列如下:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中记号 Δ 具有 n 个横排 n 个纵排, 则 Δ 叫做 n 阶行列式, 它表示一个数. a_{ij} 叫做行列式的元素. 行列式的横排叫做行, 纵排叫做列. 例如 a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的元素. 要注意的是元素的双下标中的第一个数表示元素所在的行数. 第二个数表示元素的双下标列数. 从 a_{11} 到 a_{nn} 的斜线叫做行列式的主对角线, $a_{11}, a_{22} \cdots a_{nn}$ 称为主对角线元素.

在行列中划去第 i 行、第 j 列后的 $(n-1)^2$ 个元素, 按原有次序排成一个新的 $(n-1)$ 阶行列式, 叫做元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} , 用 $(-1)^{i+j}$ 乘 M_{ij} 所得到的式子叫做 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} , 可见 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

下面我们来说明行列式的意义:

当 $n=1$ 时, 规定一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$, 等号左端不是绝对值记号, 而是行列式记号.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} |a_{22}|$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} |a_{21}| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12}$$

其中 A_{11} , A_{12} 分别为 Δ 中元素 a_{11} , a_{12} 的代数余子式.

$n=3$ 时, 三阶行列式定义为

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, \end{aligned}$$

其中 A_{11} , A_{12} , A_{13} 分别为 Δ 中元素 a_{11} , a_{12} , a_{13} 的代数余子式.

在此基础上可以定义四阶行列式.

$n=4$ 时, 四阶行列式定义为

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14} = \sum_{j=1}^4 a_{1j} A_{1j} \end{aligned}$$

其中 A_{1j} 是 Δ 中元素 a_{1j} ($j=1,2,3,4$) 的代数余子式, 可见 A_{1j} 是三阶行列式. 有了四阶行列式就可以定义五阶行列式, 有了五阶行列式就可以定义六阶行列式等等. 依次类推, 假定已有了 $(n-1)$ 阶行列式的定义, 我们就可以定义 n 阶行列式.

设 n 阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时, Δ 就是 a_{11} ; 当 $n \geq 2$ 时, 其定义为

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$$

其中 $A_{1j} (j=1, 2, \cdots, n)$ 为 Δ 中元素 a_{1j} 的代数余子式, 它们都是 $(n-1)$ 阶行列式, 假定已有定义。

以上定义, 可概括为一句话: n 阶行列式的值等于第一行所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j} \end{aligned}$$

例1 证明

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

证 按定义

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

用数学归纳法可证得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理还可证得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

以上两个行列式分别称为下三角行列式与上三角行列式，由此即可得到对角行列式(其中未写出的元素都是零)。

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例2 计算行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

解 按定义有

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{1+1}3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+4}3 \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

其中有两个三阶行列式要乘以 0，故不出现，再按定义计算上式右端的两个三阶行列式，则可得 $\Delta = -48$ 。

二、 n 阶行列式的性质

定理 n 阶行列式等于任意一行（或一列）所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，就是说，设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开的展开式, } i=1,2,\cdots,n)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (\text{按第 } j \text{ 列展开的展开式, } j=1,2,\cdots,n)$$

以此定理为基础，可以顺利地推出行列式的一系列性质。

把行列式的行转为相应的列而不改变元素的先后次序所得的行列式叫做原行列式的转置行列式，常用 Δ^T 表示行列式 Δ 的转置行列式，即若

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1 任一行列式与其转置行列式相等。

这个性质表明，一个行列式对于行有什么性质，对于列也有同样性质，反之也对。

性质2 对调行列式两行（或两列）所得的行列式等于原行列式乘以 (-1) 。

例如下面的行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

对调其第一行、第三行得

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -\Delta$$

性质3 如果行列式有两行（或两列）对应元素相同，则行列式为零。

例如，

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0$$

性质4 如果行列式中有一行（或列）元素全为零，则行列式为零。

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

性质5 以常数 k 乘行列式的某一行（或列）的所有元素所得新的行列式等于用 k 乘原行列式。例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & ka_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

由此性质可知，如果行列式中某行（或列）所有元素有公因子，就可把这公因子提到行列式外面来；如果两行（或两列）对应元素成比例，这个行列式为0。

性质6 如果行列式的某一行（列）的所有元素都是两项之和，则行列式可以表示为两个行列式之和。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

性质7 用一个任意常数 k 遍乘某一行（或列）的各个元素，然后再加到另一行（列）对应的元素上去，所得新行列