《中国工程物理研究院科技丛书》第 016 号

抛物型方程差分方法引论

李德元　陈光南 著

科学出版社

《中国工程物理研究院科技丛书》第 016 号

抛物型方程差分方法引论

李德元　陈光南　著

科学出版社

1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

抛物型方程的差分方法是数值求解偏微分方程的一个经典问题。本书主要介绍在解实际问题中比较有效的统一差分格式和多维问题的经济格式。本书还介绍了用离散泛函分析方法研究非线性抛物型方程组的成果以及退化抛物型方程的差分方法。

本书主要读者对象：高校计算数学专业师生、和有关科技工作者。

《中国工程物理研究院科技丛书》第 016 号

抛物型方程差分方法引论

李德元　陈光南　著

责任编辑　林　鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

蓝地公司激光照排

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1995 年 12 月第 一 版　　开本：850×1168　1/32

1995 年 12 月第一次印刷　　印张：9 5/8

印数：1—1 100　　字数：249 000

ISBN7-03-004669-2/O・800

定价：25.00 元

《中国工程物理研究院科技丛书》出版说明

中国工程物理研究院建院 30 年来，坚持理论研究、科学实验与工程设计密切结合的科研方向，完成了国家下达的各项国防科研任务。通过完成任务，在许多专业学科领域里，不论在基础理论方面，还是在实验测试技术和工程应用技术方面，都有重要发展和创新，积累了丰富的知识经验，造就了一大批优秀科技人材。

为了扩大科技交流与合作，促进我院事业的继承与发展，系统地总结我院 30 年来在各个专业领域里集体积累起来的经验，吸收国内外最新科技成果，形成一套系列科技丛书，无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科研工作的成果，内容涉及本院过去开设过的二十几个主要学科。现在和今后开设的新学科，也将编著出书，续入本丛书中。

这套丛书将在今后几年里陆续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍，经编委会审定后，也纳入本丛书系列。

谨以这套丛书献给 30 年来为我国国防现代化而献身的人们！

《中国工程物理研究院科技丛书》编审委员会

1989 年 1 月 25 日

《中国工程物理研究院科技丛书》

第二届编审委员会

《中国工程物理研究院科技丛书》

已出版书目

刘庆兆等著　　科学出版社　　1994年12月

014　放射性核素活度的测量方法和技术

古当长著　　科学出版社　　1994年12月

015　二维非定常流和激波

王继海著　　科学出版社　　1994年12月

016　抛物型方程差分方法引论

李德元、陈光南著　　科学出版社　　1995年12月

前　言

抛物型方程的差分方法是数值求解偏微分方程的一个经典问题。早在1910年Richardson就构造了一个解抛物型方程的差分格式，并且在当时没有高速电子计算机的条件下用人工进行了一些计算。令人困惑的是，无论是Richardson本人，还是其他采用这个格式进行计算的人都不曾发觉这是一个绝对不稳定的格式。唯一的解释是在手算的条件下，求解区域的空间步长不可能取得很小，时间方向推进的步数大约也只能是极有限的若干步，以致于误差还来不及积累到明显的程度。但是有了电子计算机以后，特别是50年代建立了偏微分方程差分格式的理论以后，Richardson格式的不稳定性便很容易地被观察到了。半个世纪以来，许多科研人员对用差分方法求解抛物型方程的问题作了充分的研究，也发表了大量的文献。在本书中作者无意对所有各种解抛物型方程的差分方法作全面的介绍，而只根据自己实践的经验着重介绍一些在解实际问题时比较有效的格式。对这些格式，或者根据已有文献，或者根据作者本人的研究成果，论证了它们的稳定性、收敛性等基本性质，以期读者在使用这些格式时，对这些格式的理论基础有充分的掌握。

本书第一章的内容是关于差分方法的一些基础知识。第二章是关于一维抛物型方程的差分方法。这里介绍的是苏联A. H. Тихонов和A. A. Самарский于60年代提出的统一差分格式(Однородная разностная схема)。对于这样的格式，特别是在求解具有间断系数的抛物型方程时的收敛性，作了严格的论证。第三章讨论的是多维问题。二维抛物型方程差分方法的研究是从50年代开始的。鉴于当时计算机内存和速度的限制，因而研究的重点自然地就在于构造各种称之为“经济”的格式。这些格式中某些是彼此等价的。我们分析了几种典型格式的收敛性。在一些工程技术问题中，有时还会要求数值求解抛物型方程组。在第四章中我

们提出了几种解抛物型方程组的经济格式。第五章专门介绍周毓麟院士近年来用离散泛函分析的方法论证抛物型方程差分格式收敛性的工作。周毓麟院士的方法有广泛的适用性，可以用来解决很多偏微分方程差分格式的收敛性问题。本书最后一章介绍了一些退化抛物型方程（包括 Schrödinger 方程）的差分格式。

作者曾以本书内容应邀在中国工程物理研究院研究生部授课，现又应允列入《中国工程物理研究院科技丛书》公开出版，作者对此表示深切的谢意。由于作者学识水平所限，选材、论证均难免有不当之处，尚望读者不吝赐教。

作者

1994年8月于北京

目　　录

第一章　常系数方程的差分格式

§1.1　常系数热传导方程

为了阐明在非定常问题情况下建立差分格式的方法并研究这些方法，现在考虑一维常系数热传导方程。

从所周知，热在直线上的传播过程可以用热传导方程来描述：

$$c_v\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\tilde{f},\tag{1.1}$$

其中 $u=u(x,t)$ 是温度，c_v 是单位质量的热量，ρ 是密度，k 是热传导系数，$\tilde{f}$ 是热流密度，即在单位时间单位长度上提供的热量。热传导系数和热容量可以不但依赖于 x,t 而且依赖于温度 u（拟线性方程）。如果 k 和 $c_v\rho$ 都是常数，则方程(1.1)可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\overline{f},\ a^2=\frac{k}{c_v\rho},\overline{f}=\frac{\tilde{f}}{c_v\rho},\tag{1.2}$$

其中 a^2 是温度热传导系数。

不失一般性，可以认为 $a=1$ 并且可把方程(1.2)写成形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f.\tag{1.3}$$

事实上，引入 $x'=x/a$，并重新用 x 表示 x'，就得到(1.3)。如果在 $0\leqslant x\leqslant l$ 区间上求解方程(1.2)，则通常利用无量纲变量 $x'=x/l,t'=a^2t/l^2$。在这些变量下方程(1.2)可写成(1.3)的形式，这时 $0\leqslant x'\leqslant 1,f=l^2\overline{f}/a^2$。

讨论方程(1.3)在矩形域 $\overline{D}=(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant T)$ 上的第一边值问题。即求出下列问题的连续解

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\&u(x,0)=u_0(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\&u(0,t)=u_1(t),\ u(1,t)=u_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}\right\}\text{(I)}$$

记这个问题为问题(Ⅰ)。

§1.2 六点格式族与逼近误差

引进空间步长为 $h=1/J$,时间步长为 $\tau=T/N$ 的网格:

$\bar{\omega}_h=\{x_j=jh, j=0,1,\cdots,J\}, \omega_\tau=\{t^n=n\tau, n=0,1,\cdots,N\}$,

以及在 $\bar{D}$ 上的网格

$$\bar{\omega}_{h\tau}=\bar{\omega}_h\times\omega_\tau=\{(jh,n\tau), j=0,1,\cdots,J; n=0,1,\cdots,N\}.$$

用 y_j^n 表示定义在 $\bar{\omega}_{h\tau}$上的网格函数 y 在结点(x_j,t^n)上的值。导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$用一阶差商代替,而$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$用二阶差商代替。引入任一实参量 σ,现在讨论差分格式的单个参量族:

$$\frac{1}{\tau}(y_j^{n+1}-y_j^n)=\Lambda(\sigma y_j^{n+1}+(1-\sigma)y_j^n)$$

$$+\phi_j^n, 0<j<J, 0\leqslant n\leqslant N. \tag{1.4}$$

格式(1.4)有时称为带权格式。用下式准确逼近边界和初始条件

$$y_0^n=u_1^n, y_J^n=u_2^n, \tag{1.5}$$

$$y_j^0=y(x_j,0)=u_0(x_j), \tag{1.6}$$

这里 ϕ_j^n 是逼近方程(1.3)右端项 f 的网格函数,

$$\phi_j^n=f(x_j,t^{n+\frac{1}{2}}), t^{n+\frac{1}{2}}=t^n+\frac{1}{2}\tau,$$

而 $\Lambda y_j=y_{\bar{x}x,j}=(y_{j-1}-2y_j+y_{j+1})/h^2$,其中 $y_{x,j}=\frac{y_{j+1}-y_j}{h}$,$y_{\bar{x},j}=\frac{y_j-y_{j-1}}{h}$表示函数的前差商和后差商。

由条件(1.4)—(1.6)所确定的差分问题称为问题(Ⅱ)。

差分格式(1.4)在六点模式上描述,它由结点$(x_{j\pm1},t^{n+1})$,(x_j,t^{n+1}),$(x_{j\pm1},t^n)$,(x_j,t^n)所组成,其中心点在点(x_j,t^{n+1})。方程(1.4)是写在内结点(x_j,t^n),$j=1,2,\cdots,J-1$,$n=1,2,\cdots,N$ 上的。网格 $\bar{\omega}_{h\tau}$的所有内结点的集合将表示成

$$\omega_{h\tau}=\{(x_j,t^n), 1\leqslant j\leqslant J-1, 1\leqslant n\leqslant N\}.$$

边界和初始条件(1.5),(1.6)写在网格 $\bar{\omega}_{h\tau}$的边界结点上。

处在直线 $t=t^n$ 上的网格 $\bar{\omega}_{h\tau}$的结点集合通常称之为"层"。格式(1.4)在二层上含有待求函数 y 的值。所以称为"二层格式"。

正如以后将证明的,格式(1.4)的精确度和稳定性依赖于参量 σ 的选择。

下面讨论对应于一些特殊 σ 值的格式。当 $\sigma=0$ 时得到四点格式

$$\frac{1}{\tau}(y_j^{n+1}-y_j^n)=\Lambda y_j^n+\phi_j^n,$$

或

$$y_j^{n+1}=(1-2r)y_j^n+r(y_{j-1}^n+y_{j+1}^n)+c\phi_j^n, r=\tau/h^2. \tag{1.7}$$

它定义在模式(x_j,t_{j+1}^{n+1}),(x_j,t^n),$(x_{j\pm1},t^n)$上,在 $t=t^{n+1}$层(新层)上的每个结点的 y_j^{n+1} 值通过在 $t=t^n$ 层(旧层)上的 y_j^n 值按显式公式(1.7)来表达。因为在 $t=0$ 时初值 $y_j^0=u_0(x_j)$给定,所以公式(1.7)允许直接确定在任何一层上的 y 值。格式(1.7)称为"显式"。

当 $\sigma\neq0$ 时,格式(1.4)称为"隐式二层格式"。这时为了确定在新的一层上 y^{n+1}值,将得到代数方程组

$$\sigma\Lambda y_j^{n+1}-\frac{1}{\tau}y_j^{n+1}=-F_j^n, F_j^n=\frac{1}{\tau}y_j^n+(1-\sigma)\Lambda y_j^n+\phi_j^n,$$

$$j=1,2,\cdots,J-1 \tag{1.8}$$

及边界条件 $y_0^{n+1}=u_1^{n+1}, y_J^{n+1}=u_2^{n+1}$。

当 $\sigma=1$ 时为超前格式或称为纯隐式格式:

$$\frac{1}{\tau}(y_j^{n+1}-y_j^n)=\Lambda y_j^{n+1}+\phi_j^n. \tag{1.9}$$

当 $\sigma=\frac{1}{2}$时得出六点对称格式(有时也称 Crank-Nicholson 格式)

$$\frac{1}{\tau}(y_j^{n+1}-y_j^n)=\frac{1}{2}\Lambda(y_j^{n+1}+y_j^n)+\phi_j^n. \tag{1.10}$$

下面阐述带权格式(1.4)的逼近误差。为此将问题(1.4)—

(1.6)的解 $y=y_j^n$ 和问题(Ⅰ)的解 $u=u(x,t)$ 作比较。因为 $u(x,t)$ 是问题(Ⅰ)的连续解,所以假定 $u_j^n=u(x_j,t^n)$,并考虑误差函数 $z_j^n=y_j^n-u_j^n$。

为了估计出一层上的网格函数 z_j^n,选择下列模中的一种:

$$\|z\| = \|z\|_c = \max_{0\leqslant j\leqslant J}|z_j|,\ \|z\| = \left(\sum_{j=1}^{J-1}z_j^2h\right)^{\frac{1}{2}}.$$

以下记 $y_j^n=y, y_j^{n+1}=\hat{y}, y_t=(\hat{y}-y)/\tau$,这样可将问题(1.4)—(1.6)变成无附标表示:

$$\left.\begin{aligned}&y_t = \Lambda(\sigma\hat{y}+(1-\sigma)y)+\phi,\ (x,t)\in\omega_{h\tau},\\&y(0,t)=u_1(t), y(1,t)=u_2(t),\ t\in\omega_\tau,\\&y(x,0)=u_0(x),\ x\in\bar{\omega}_h.\end{aligned}\right\}(\text{Ⅱ})$$

为建立误差函数 $z=y-u$ 满足的方程,将 $y=z+u$ 代入(Ⅱ),并认为 u 是已知函数,这样就得到关于 z 的问题

$$\left.\begin{aligned}&z_t = \Lambda(\sigma\hat{z}+(1-\sigma)z)+\psi,\ (x,t)\in\omega_{h\tau},\\&z(0,t)=z(1,t)=0, t\in\omega_\tau,\\&z(x,0)=0, x\in\bar{\omega}_h,\end{aligned}\right\}(\text{Ⅲ})$$

其中

$$\psi = \Lambda(\sigma\hat{u}+(1-\sigma)u)-u_t+\phi, \tag{1,11}$$

它是格式(Ⅱ)对方程(Ⅰ)之解 $u=u(x,t)$ 的逼近误差。

所谓逼近阶的定义是指:如果 $\|\psi(x,t)\|=O(h^m+\tau^p)$ 或 $\|\psi\|\leqslant M(h^m+\tau^p)$ 对一切 $t\in\omega_\tau$ 成立,其中 M 是不依赖于 h 和 τ 的正常数,且 $\|\cdot\|$ 是网格 ω_h 上的某种模,则认为格式(Ⅱ)以 (m,p) 阶逼近方程(Ⅰ)。如果 $\|z\|=O(h^m+\tau^p)$,则称格式(Ⅰ)的解具有 (m,p) 阶收敛速度。一个格式的解的收敛速度的阶可以与其逼近阶相同;但在下面要指出,也可以是不同的。

下面对格式(Ⅱ)的逼近阶作估计。假定 $u=u(x,t)$ 具有在以下叙述中所提到的对 x 和 t 的各阶导数。利用记号:$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}, u'=\frac{\partial u}{\partial x}, \bar{u}=u(x_j,t^{n+½})$,将 $u=u(x,t)$ 在点 $(x_j,\bar{t}=t^{n+½})$ 附近作Taylor

级数展开，利用公式

$$\hat{u} = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \frac{1}{2}(\hat{u} - u) = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \frac{1}{2}\tau u_t,$$

$$u = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) - \frac{1}{2}\tau u_t,$$

$$\sigma\hat{u} + (1 - \sigma)u = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + (\sigma - \frac{1}{2})\tau u_t,$$

可把 ψ 改写成

$$\psi = \frac{1}{2}\Lambda(\hat{u} + u) + (\sigma - \frac{1}{2})\tau\Lambda u_t - u_t + \phi,$$

这里的表达式可用下列各式代替

$$\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12}L^2 u + O(h^4),$$

$$\hat{u} = \bar{u} + \frac{1}{2}\tau\bar{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3),$$

$$u = \bar{u} - \frac{1}{2}\tau\bar{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3),$$

$$\frac{1}{2}(\hat{u} + u) = \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3), u_t = \bar{\dot{u}} + O(\tau^2),$$

这样就得到

$$\psi = (L\bar{u} - \bar{\dot{u}} + \phi) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{\dot{u}} + \frac{h^2}{12}L^2\bar{u} + O(\tau^2 + h^4). \tag{1.12}$$

由此看出，当 $\phi = \bar{f} = f(x, t^{n+\frac{1}{2}})$ 时 $\psi = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{\dot{u}} + O(h^2 + \tau^2)$，因为 $\dot{u} = Lu + f$。考虑到 $L\dot{u} = L^2 u + Lf = u^{(4)} + f''$ 和 $L^2 u = L\dot{u} - Lf$，从(1.12)可得到

$$\psi = (\phi - \bar{f}) + \left[\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{h^2}{12}\right]L\bar{\dot{u}} - \frac{h^2}{12}L\bar{f} + O(h^4 + \tau^2). \tag{1.13}$$

如果方括号内的表达式等于零，即

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_*. \tag{1.14}$$

这时取 $\sigma=\sigma_*$ 并让 ϕ 等于 $\phi=\bar{f}+\frac{h^2}{12}L\bar{f}$，则格式(Ⅱ)有 $O(h^4+\tau^2)$ 逼近，即 $\psi=O(h^4+\tau^2)$，如果用表达式 $f_{\bar{x}x}=\Lambda f$ 代替 f''，即假定 $\phi=\bar{f}+\frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f}$ 或

$$\phi_j^n = \frac{5}{6}f_j^{n+1/2} + \frac{1}{12}(f_{j-1}^{n+1/2} + f_{j+1}^{n+1/2}), \tag{1.15}$$

格式的逼近阶次不破坏。这公式对计算是方便的。

设 $C_p^m(\bar{D})$ 是在 $\bar{D}$ 内有对 x 的 m 阶连续导数和对 t 的 p 阶连续导数的函数类。从公式(1.13)和(1.14)清楚看出格式(Ⅱ)有：

(1) $O(h^2+\tau^2)$ 逼近，当 $\sigma=\frac{1}{2}$，$\phi=\bar{f}$ 或 $\phi=\bar{f}+O(h^2+\tau^2)$，并且 $u\in C_3^4$；

(2) $O(h^2+\tau)$ 逼近，当任何 $\sigma\neq\frac{1}{2}$，$\phi=\bar{f}+O(h^2+\tau)$，例如 $\phi=\bar{f}$ 或 $\phi=f$，并且 $u\in C_2^4$；

(3) $O(h^4+\tau^2)$ 逼近，当 $\sigma=\sigma_*$ 而 ϕ 由公式(1.15)给出，并且 $u\in C_3^6$。

带有 $\sigma=\sigma_*$ 和 $\phi=\bar{f}+\frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f}$ 的格式(Ⅱ)通常称为“高阶精确度格式”。选择右端 ϕ 应当服从在给定 σ 时保持逼近阶次的要求。譬如在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 时，可以假定 ϕ 等于 $\phi=\frac{1}{2}(\hat{f}+f)$，$\phi=\bar{f}$ 等。

§1.3 按初始条件和右端项的稳定性

首先用分离变量法研究格式(Ⅱ)的稳定性(在齐次边界条件下)。取恒等式

$$\hat{y} = y + \tau y_t,\ \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y = y + \sigma\tau y_t.$$

可将带齐次边界条件的格式(Ⅱ)改写成形式

$$\left.\begin{aligned} & y_t - \sigma\tau\Lambda y_t = \Lambda y + \phi, \qquad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \\ & y(0,t) = y(1,t) = 0,\ t\in\omega_\tau,\ y(x,0) = u_0(x),\ x\in\omega_h. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$