全国高考
数学试题解答

1950-1979

QUANGUO GAOKAO
SHUXUE SHITI JIEDA

全国高考数学试题解答

（1950—1979）

科学普及出版社高考试题编辑小组　编

科　学　普　及　出　版　社

内 容 提 要

本书包括1950～1965年、1978～1979年共18次全国高考数学试题及解答，以及1977年北京市高考数学试题及解答．这些试题是经过全国许多专家及教师精心拟定的，既注意不偏离中学教学大纲，又有一定的难度，以测验考生的数学水平．书中对试题的解答，不仅力图给出完整而简捷的解法，并且注意正确引导解题思路，介绍某些解题技巧．此外，对1966年以后中学课本中未列入的公式和定理，也作了适当的补充和推导．本书可帮助中学生提高解题能力，有重点地复习高中数学课程．

* * *

全国高考数学试题解答

（1950—1979）

科学普及出版社高考试题编辑小组　编

*

科学普及出版社 出版（北京西郊友谊宾馆）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

机械工业出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/32　印张：4 1/2　字数：99千字

1980年4月第一版　1980年4月第一次印刷

印数：200,001—900,000册　定价：0.40元

统一书号：13051·1104　本社书号：0116

出 版 说 明

一、数学是各门自然科学的基础，要学好数学，应在掌握好数学基本知识的基础上多做各种类型的习题．历届高考数学试题，一般是经过全国许多专家和教师精心拟定的，用以测验和甄别考生的数学水平．学习解答这些试题，不仅有助于学好数学，也是对中学阶段数学学习的一次“总结”．国内有过不少这类题解的传抄本、油印本及铅印本，但其中往往有不同程度的错误或遗漏．为了满足广大师生的需要，我们参考有关资料，整理编写了这本《全国高考数学试题解答（1950—1979）》，以供参考．

二、本书仅是一种学习解题的参考书，其目的主要在于引导读者的思路，提供一些解题的技巧和方法；而不是用来应付考试的“标准答案”．即使将来读者遇到同类考题，也应按考卷的具体要求去简捷而全面地答题．

三、1977年没有统考，无全国性试题，仅选北京市试题及解答作内容．

四、书中如有错误或不当之处，恳请读者和专家指正．如有更简捷的解法，也请提供，以便重版时修订补充．

编　者

一九八〇年一月

目　　录

1950 年 试　　题

甲 组　第一部分

（A）将下列各题正确的答案填入括号内：

1. $x^3-2x^2-2x+4=0$ 的一根为 2，其它两根应为（　　）.

（a）两个 0，（b）一个 0，一个实根，（c）两个实根，

（d）一个实根，一个虚根，（e）两个虚根.

【解】 因为原方程可变为

$$x^2(x-2)-2(x-2)=0,$$

$$(x-2)(x^2-2)=0,$$

所以除 2 外它的其它两根应为两个实根.

2. 已知

$$\lg\sin 26^\circ 20' = \bar{1}.6470, \quad \lg\sin 26^\circ 30' = \bar{1}.6495,$$

若 $\lg\sin x = \bar{1}.6486$，则 x 的近似值为（　　）.

（a）$26^\circ 23'$，（b）$26^\circ 24'$，（c）$26^\circ 25'$，（d）$26^\circ 26'$，

（e）$26^\circ 27'$.

【解】 因为

$$6495-6470=25,\ 6486-6470=16,\ 30'-20'=10',$$

所以有

$$\frac{25}{16}=\frac{10'}{y},\quad y=\frac{10'\times 16}{25}\approx 6',$$

$$x\approx 26^\circ 20'+6'=26^\circ 26',$$

所以 x 的近似值为 $26^\circ 26'$.

3. 若 (ρ, θ) 为一点之极坐标，则 $\rho=20\cos\theta$ 的形图为(　　).

(a) 圆，(b) 椭圆，(c) 双曲线，(d) 抛物线，

(e) 二平行直线.

【解】 将 $\rho=20\cos\theta$ 的两边同乘以 ρ 得

$$\rho^2=20\rho\cos\theta,$$

以

$$\rho^2=x^2+y^2 \quad 及 \quad \rho\cos\theta=x$$

代入上式得

$$x^2+y^2-20x=0,$$

所以 $\rho=20\cos\theta$ 的图形为圆.

4. $x^2+2xy+y^2+x+y-2=0$ 之图形为(　　).

(a) 圆，(b) 椭圆，(c) 双曲线，(d) 抛物线，

(e) 二平行直线.

【解】 原方程即

$$(x+y)^2+(x+y)-2=0,$$

$$(x+y-1)(x+y+2)=0,$$

所以原方程表示两条平行直线

$$x+y-1=0 \quad 及 \quad x+y+2=0.$$

5. 展开二项式 $(a+b)^{17}$，其第十五项为(　　).

(a) $238a^{15}b^2$，(b) $680a^3b^{14}$，(c) $736a^{14}b^3$，

(d) $(a+b)^{15}$，(e) a^8b^7.

【解】 $(a+b)^{17}$ 的第十五项为

$$T_{14+1}=C_{17}^{14}a^{17-14}b^{14}=C_{17}^{3}a^3b^{14}=680a^3b^{14}.$$

(B) 将正确答案填在虚线上:

1. 二直线

$$x+y+4=0 \ 及 \ 5x-2y=10$$

相交之锐角之正切为______.

【解】 因为直线 $x+y+4=0$ 的斜率为 $k_1=-1$，而直线 $5x-2y-10=0$ 的斜率为 $k_2=\frac{5}{2}$，所以它们相交的锐角 θ 的正切为

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{\frac{5}{2}-(-1)}{1+\left(\frac{5}{2}\right)(-1)}\right|=\left|-\frac{7}{3}\right|=\frac{7}{3}.$$

2. 设 x、y 都是实数，$i=\sqrt{-1}$，且

$$(x+yi)-(8+4i)=(x+yi)\times(1+i), \qquad (1)$$

则 $x=$______，$y=$______.

【解】 (1) 式即

$$(x-8)+(y-4)i=(x-y)+(x+y)i,$$

由复数相等的定义有

$$\begin{cases} x-8=x-y, \\ y-4=x+y, \end{cases}$$

解得

$$x=-4, \quad y=8.$$

3. $\begin{vmatrix} a & d & a+5d \\ b & e & b+5e \\ c & f & c+5f \end{vmatrix}=$______.

【解】 $\begin{vmatrix} a & d & a+5d \\ b & e & b+5e \\ c & f & c+5f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} a & d & d \\ b & e & e \\ c & f & f \end{vmatrix}=0.$

4. 已知 x 在第四象限内，而 $\sin^2 x=\frac{1}{9}$，则 $\operatorname{tg} x$ 之值至第二位小数为______.

【解】 由 $\sin^2 x=\frac{1}{9}$ 得 $\sin x=\pm\frac{1}{3}$，因为 x 在第四

象限，所以应取 $\sin x = -\frac{1}{3}$，从而有

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

所以

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \approx -0.35.$$

5. 参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = t(t+1) & (2) \end{cases}$$

之直角坐标方程为______.

【解】 由方程(1)得 $t = \frac{x-1}{2}$，代入(2)得

$$y = \frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2} + 1\right) = \frac{x^2 - 1}{4},$$

故直角坐标方程为

$$x^2 - 4y - 1 = 0.$$

甲 组 第二部分

1. 证明

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = (\operatorname{tg} x + \sec x)^2.$$

【证】 因为

$$\text{右边} = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)^2$$

$$= \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}$$

$$=\frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\text{左边}.$$

所以原式成立.

2. 设 t 及 s 为实数,已知方程

$$x^3-5x^2+tx+s=0$$

之一根为 $2-3i$, 求 t 及 s 之值.

【解 1】 实系数方程有一根为 $2-3i$, 必有另一根为 $2+3i$, 又由韦达定理知三根之和为 5:

$$(2-3i)+(2+3i)+x=5,$$

所以第三根为

$$x=5-4=1.$$

再利用韦达定理即得

$$\begin{aligned}t&=(2-3i)(2+3i)+(2-3i)\cdot 1+(2+3i)\cdot 1\\&=4-9i^2+4=17,\end{aligned}$$

$$s=-(2-3i)\cdot(2+3i)\cdot 1=-(4+9)=-13.$$

【解 2】 将已知根 $x=2-3i$ 代入原方程得

$$(2-3i)^3-5(2-3i)^2+t(2-3i)+s=0,$$

展开并化简得

$$(2t+s-21)+(51-3t)i=0,$$

由复数相等定义得

$$\begin{cases}2t+s-21=0,\\51-3t=0,\end{cases}$$

由此解得

$$t=17,\quad s=-13.$$

3. 用数学归纳法证明公式

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2). \qquad (1)$$

【证】（i） n＝1 时

$$左边 = 1\cdot 2 = 2,$$

$$右边 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(1+2) = 2,$$

故 $n=1$ 时公式（1）为真；

（ii） 若 $n=k$ 时公式（1）为真，即有

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)$$
$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2), \qquad (2)$$

则 $n=k+1$ 时有

$$[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$$
$$\overset{(2)}{=}\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$
$$=[(k+1)(k+2)]\left(\frac{1}{3}k+1\right)$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3),$$

所以 $n=k+1$ 时公式(1)亦为真；

总结(i)及(ii)即知公式（1）对一切正整数 n 恒成立.

4. 设 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 为二定点，过 P_1 作直线交 Y 轴于 B（见图 1），过 P_2 作直线与过 P_1 之直线垂直，并交 X 轴于 A，求 AB 中点之轨迹.

【解】 设 AB 的中点为 $Q(x, y)$，则

$$A(2x, 0), \quad B(0, 2y).$$

又因 $AP_2 \perp BP_1$，所以 AP_2 与 BP_1 的斜率的乘积为 -1：

$$\frac{y_1-2y}{x_1-0}\cdot\frac{y_2-0}{x_2-2x}=-1,$$

整理即得所求的直线方程

$$y-\frac{y_1}{2}=\frac{-x_1}{y_2}\left(x-\frac{x_2}{2}\right),$$

即 AB 的中点 Q 的轨迹是过点 $\left(\frac{x_2}{2},\ \frac{y_1}{2}\right)$、斜率为 $\frac{-x_1}{y_2}$ 的直线.

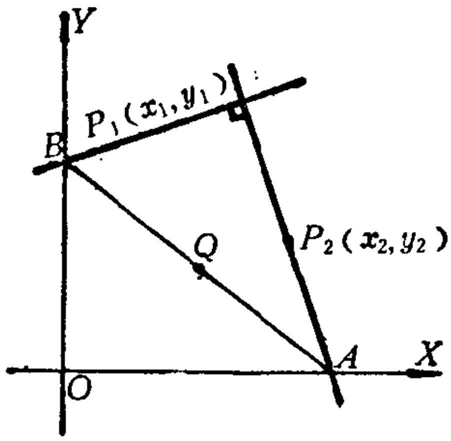

图 1

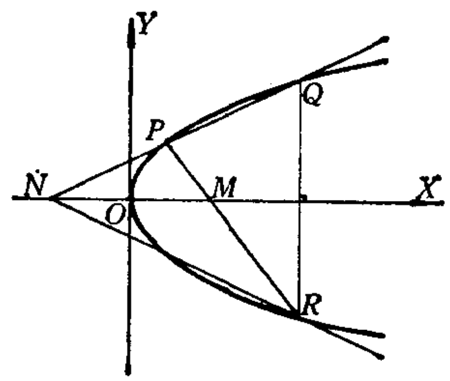

图 2

5. P 为抛物线(图 2)

$$y^2=4x \tag{1}$$

上的一点，QR 为抛物线上一弦，并与其轴垂直，设 P、Q 交抛物线之轴于 N，PR 交抛物线之轴于 M，证明线段 MN 被抛物线之顶点平分.

【证】 此抛物线以 X 轴为轴，Q、R 对称于 X 轴. 因此，若设 Q 点的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，P 点的坐标为 $(x_2,\ y_2)$，则 R 点的坐标为 $(x_1,\ -y_1)$. 又因 P 及 Q 都在抛物线 (1) 上，故它们的坐标适合 (1)，因而有

$$x_1=\frac{y_1^2}{4},\quad x_2=\frac{y_2^2}{4}$$

所以 P，Q，R 的坐标分别为

$$P\left(\frac{y_2^2}{4},\ y_2\right),\quad Q\left(\frac{y_1^2}{4},\ y_1\right),\quad R\left(\frac{y_1^2}{4},\ -y_1\right),$$

过 PQ 的直线方程为

$$\frac{y-y_2}{x-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}},$$

因为 $y_1\neq y_2$(否则 P、Q 重合，此题无解)，所以此方程可化为:

$$\frac{y-y_2}{4x-y_2^2}=\frac{1}{y_1+y_2},$$

N点在此直线上，且 $y_N=0$，所以

$$x_N=-\frac{y_1y_2}{4};$$

同理，过 PR 的直线方程为

$$\frac{y-y_2}{4x-y_2^2}=\frac{-1}{y_1-y_2},$$

M点在此直线上，且 $y_M=0$，所以

$$x_M=\frac{y_1y_2}{4}.$$

从而线段 MN 的中点的横坐标为

$$x_中=\frac{x_M+x_N}{2}=0,$$

M及N均在X轴上，故有

$$y_M=y_N=0,\qquad y_中=\frac{y_M+y_N}{2}=0,$$

所以线段 MN 的中点坐标为 $(0,0)$，即抛物线(1)的顶点$(0,0)$平分线段 MN.

乙、丙组 第一部分

A. 将正确答案填入括号内:

1. 设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，下列各式何者正确(　　).

(a) $\frac{e}{f}=\frac{a+b}{b-d}$； (b) $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}$，

(c) $\frac{ad}{bc}=\frac{e}{f}$， (d) $\frac{ac}{bd}=\frac{e}{f}$， (e) $\frac{a+c-e}{b-d+f}=\frac{e}{f}$.

【解】 设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$，由等比定理有

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}=k,$$

所以(b)正确.

2. 圆内接四边形 $ABCD$ 内(图3)，若 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=1:2:3:4$，则角 A、B、C、D 各为( ).

(a) 45°，135°，45°，135°，

(b) 36°，72°，108°，144°，

(c) 72°，108°，72°，108°，

(d) 90°，126°，90°，54°.

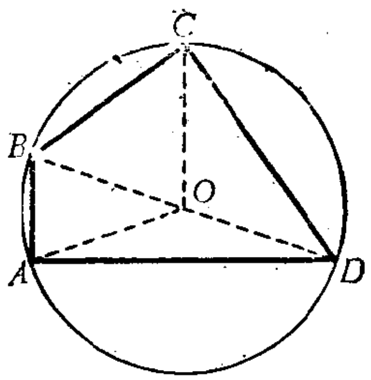

图 3

【解】 因为

$$\overset{\frown}{AB}=360°\times\frac{1}{1+2+3+4}=36°,$$

同理可得

$$\overset{\frown}{BC}=72°,\quad \overset{\frown}{CD}=108°,\quad \overset{\frown}{DA}=144°,$$

又因圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半，所以

$$\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD})=\frac{180°}{2}=90°,$$

同理可得

$$\angle B=126°,\quad \angle C=90°,\quad \angle D=54°.$$

3. 若 $\frac{1}{a}=\frac{1}{n}+R$，则 $a=$( ).

(a) $\dfrac{n}{1+nR}$, (b) $n-\dfrac{1}{R}$, (c) $n-R$,

(d) $n+\dfrac{1}{R}$, (e) $\dfrac{1+nR}{n}$.

【解】 因为

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{n}+R=\frac{1+nR}{n},$$

所以(两边同时取倒数)

$$a=\frac{n}{1+nR}.$$

4. 若

$$\lg 5.8=0.7634,\ \lg 2.19=0.3404,$$

则 $\lg(580\times 2190)$ 等于(　　).

(a) 0.5770, (b) 1.1038, (c) 6.1038, (d) 264.06,
(e) 416.74.

【解】 $\lg(580\times 2190)$

$$\begin{aligned}&=\lg(5.8\times 100)+\lg(2.19\times 1000)\\&=\lg 5.8+\lg 100+\lg 2.19+\lg 1000\\&\doteq 0.7634+2+0.3404+3=6.1038.\end{aligned}$$

5. 若

$$\sin A=\frac{2}{\sqrt{29}},\quad \cos A=\frac{5}{\sqrt{29}},\quad \operatorname{tg} A=\frac{2}{5},$$

$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos B=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \operatorname{tg} B=\frac{1}{2},$$

则 $\operatorname{tg}(A+B)=$(　　).

(a) $-\dfrac{1}{12}$, (b) $\dfrac{3}{4}$, (c) $-\dfrac{1}{8}$, (d) $1\dfrac{1}{8}$, (e) $\dfrac{1}{8}$.

【解】 $\operatorname{tg}(A+B)=\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\dfrac{\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}}=1\dfrac{1}{8}$.

B. 将正确答案填在虚线上:

1. $\sin 330°$ 之值为______.

【解】 $\sin 330° = \sin(360° - 30°)$

$$= -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

2. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ 的因子是______.

【解】 $4x^2 + 5x - 2 = x^3 - 2x^2 + x - (2x^2 - 4x + 2)$

$$= x(x-1)^2 - 2(x-1)^2$$

$$= (x-1)^2(x-2).$$

3. 书一本定价 p 元,因为有折扣实价较定价少 d 元，则该书实价是定价的百分之______.

【解】 $\dfrac{p-d}{p}\times 100\% = \dfrac{100(p-d)}{p}\%$.

4. 若一多边形之每一外角各为 40°，则此多边形有______边.

【解】 设多边形的边数为 n，因为外角和为 360°，即 $n\cdot 40° = 360°$，所以 $n = 9$.

5. a 年前,弟年是兄年的 $\dfrac{1}{n}$，今年弟年是兄年的 $\dfrac{1}{m}$，兄今年______岁.

【解】 设兄今年 x 岁,则

$$\frac{x-a}{n}+a=\frac{x}{m},$$

解得

$$x=\frac{ma(1-n)}{m-n}.$$

乙、丙 组　第二部分

1. 设 AB 是一圆的直径，过 A、B 作 AC 及 BD 二弦相交于 E，则

$$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB^2.$$

【证】 过 E 作 $EF \perp AB$（图 4），连 AD、BC，则有

$$\angle ABD = \angle EBF,$$

$$\angle D = \angle EFB = 90°,$$

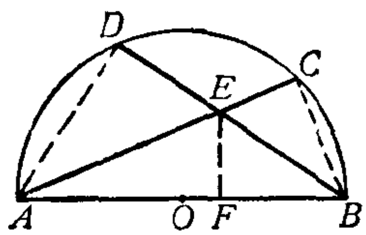

图　4

所以

$$\triangle ABD \sim \triangle EBF,$$

$$AB : BE = BD : BF,$$

即

$$BE \cdot BD = AB \cdot BF. \quad (1)$$

同理由 $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ 可得

$$AE \cdot AC = AB \cdot AF. \quad (2)$$

(1) + (2) 即得

$$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB(AF + BF) = AB^2.$$

2. 若 A、B、C 为 $\triangle ABC$ 之内角，则

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

【证】 因为

$$A + B + C = 180°, \quad A + B = 180° - C,$$

所以

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \operatorname{tg}(A + B)$$

$$= \operatorname{tg}(180° - C) = -\operatorname{tg} C,$$

去分母即得