# 應用數值分析詳解

[美] C .F .杰拉尔德 著

曉園出版社
世界圖书出版公司

# 應用數值分析詳解

[美] C.F.杰拉尔德 著





曉園出版社
世界图书出版公司

## 内 容 简 介

本书是《应用数值分析》一书（第3版）的习题详解．本书保留了原书的体例和顺序，对于深入理解和掌握应用数值分析的理论和方法极有帮助．


# 应 用 数 值 分 析 详 解

〔美〕C．F．杰拉尔德等原著

颜仁鸿　译著

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

＊

1993年6月第　一　版　　开本．711×1245 1/24

1993年6月第一次印刷　　印张：16.5

印数：0001—1000　　字数：29.7万字

ISBN：7－5062·1459－8/O·66

定价：12.50元（$W_B$9206/2）

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向晓园出版社购得重印权

限国内发行

# 前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

# Gerald應用數值分析問題詳解

## （目　　錄）

# 第一章　非線性方程式的解

## 1.2

1　方程式 $e^x - 3x = 0$ 有一個 $r = 0.61906129$ 的根，從 [ 0 , 1 ] 這個區間開始，用六次的半區間法找出這個根。如果使算出根精確到四位有效數字，亦即，$|x-r| < 0.00005$，要重覆多少次？

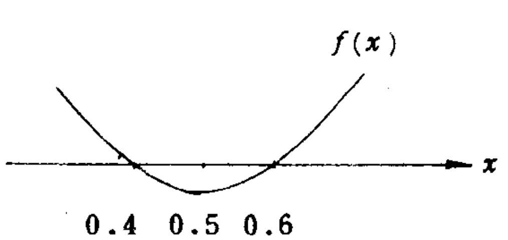
解　令 $f(x) = e^x - 3x$.

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0.5 | 1 | −0.28172 | 0.14872 |
| 2 | 0.5 | 1 | 0.75 | 0.14872 | −0.28172 | −0.13300 |
| 3 | 0.5 | 0.75 | 0.625 | 0.14872 | −0.13300 | −0.00675 |
| 4 | 0.5 | 0.625 | 0.5625 | 0.14872 | −0.00675 | 0.06755 |
| 5 | 0.5625 | 0.625 | 0.59375 | 0.06755 | −0.00675 | 0.02952 |
| 6 | 0.59375 | 0.625 | 0.609375 | 0.02952 | −0.00675 | 0.01116 |

經過重覆六次的計算得到根爲 0.609375 要有五位正確數字，需要 15 次計算，因爲 $(0.5)^{15} = 0.00003 \leq 0.00005$

2.　當 $x = 0.4$，和 $x = 0.6$ 時二次式 $(x-0.4)(x-0.6) = x^2 - x + 0.24$ 有 0 值，觀察 [ 0 , 1 ] 區間的端點知道，它並不能滿足半區間法，把函數之圖形劃出，以便縮短區間的範圍使得函數收斂到 0，假若區間 [ 0.5 , 1 ] 被當做起始區間來找解，問在五次重覆後誤差範圍是多少？在半區間法重覆五次後，它的正確誤差是多少？

解　令 $f(x) = x^2 - x + 0.24 = (x-0.4)(x-0.6)$



我們知道頂點在 $x=0.5$ 的位置。

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 1 | 0.75 | −0.01 | 0.24 | 0.0525 |
| 2 | 0.5 | 0.75 | 0.625 | −0.01 | 0.0525 | 0.00563 |
| 3 | 0.5 | 0.625 | 0.5625 | −0.01 | 0.00563 | −0.00609 |
| 4 | 0.5625 | 0.625 | 0.59375 | −0.00609 | 0.00563 | −0.00121 |
| 5 | 0.59375 | 0.625 | 0.609375 | | | |

經過五次重覆計算，誤差範圍為

$\frac{1}{2}\mid 0.59375-0.625\mid=0.015625$ 。而確實誤差為

$\mid 0.609375-0.6\mid=0.009375$ 。

3. 半區間法不只應用於多項式，也適用於各種連續函數利用找 $\ell n x - x + 2 = 0$ 的根，（算到小數第四位）找出圖形 $y=x-2$ 和 $y=\ell n x$ 之交點。

解 從圖形中我們知道 $f(x)=\ell n x - x + 2$ 有兩個根，一個在 [ 0.1 0.2 ] 間，另一個在 [ 3.1 , 3.2 ] 間。先從 [ 0.1 , 0.2 ] 這個區間開始找起。

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.2 | 0.15 | −0.40259 | 0.19056 | −0.04712 |
| 2 | 0.15 | 0.2 | 0.175 | −0.04712 | 0.19056 | 0.08203 |
| 3 | 0.15 | 0.175 | 0.1625 | −0.04712 | 0.08203 | 0.02042 |
| 4 | 0.15 | 0.1625 | 0.15625 | −0.04712 | 0.02042 | −0.01254 |
| 5 | 0.15625 | 0.1625 | 0.159375 | | | |

再從 [ 3.1 , 3.2] 這個區間開始

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.1 | 3.2 | 3.15 | 0.03140 | −0.03685 | −0.0026 |
| 2 | 3.1 | 3.15 | 3.125 | 0.03140 | −0.0026 | 0.01443 |
| 3 | 3.125 | 3.15 | 3.1375 | 0.01443 | −0.0026 | 0.00593 |
| 4 | 3.1375 | 3.15 | 3.14375 | 0.00593 | −0.0026 | 0.00167 |
| 5 | 3.14375 | 3.15 | 3.146875 | | | |

故其交點約在 $x=0.1594$ 和 $x=3.1469$ 處。

4. 利用半區間法求下列方程式的最小正根，以下的每一情況，先決定一個適當的區間，在相對誤差 0.5％下求根。

解 (a)從［1.1，1.2］區間開始

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 1.2 | 1.15 | −0.09583 | 0.12011 | 0.00819 |
| 2 | 1.1 | 1.15 | 1.125 | −0.09583 | 0.00819 | −0.04478 |
| 3 | 1.125 | 1.15 | 1.1375 | −0.04478 | 0.00819 | −0.01854 |
| 4 | 1.1375 | 1.15 | 1.14375 | −0.01854 | 0.00819 | −0.00523 |
| 5 | 1.14375 | 1.15 | 1.146875 | −0.00523 | 0.00819 | 0.00146 |
| 6 | 1.14375 | 1.146875 | 1.1453125 | −0.00523 | 0.00146 | −0.00189 |
| 7 | 1.143125 | 1.146875 | 1.145 | −0.00189 | 0.00146 | −0.00256 |
| 8 | 1.145 | 1.146875 | 1.1459375 | | | |

因為 $(0.5)^8=0.004$，而此時相對誤差必小於等於 $(0.5)^8/1.1\leq 0.5\%$，首以重覆 8 次即可，得到根為 $1.1459375 \doteqdot 1.1459$

(b)從［0.4，0.5］區間開始

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4 | 0.5 | 0.45 | 0.504 | −0.125 | −0.0113 |
| 2 | 0.4 | 0.45 | 0.425 | 0.504 | −0.0113 | 0.0461 |
| 3 | 0.425 | 0.45 | 0.4375 | 0.0461 | −0.0113 | 0.0173 |
| 4 | 0.4375 | 0.45 | 0.44375 | 0.0173 | −0.0113 | 0.0030 |
| 5 | 0.44375 | 0.45 | 0.446875 | 0.0030 | −0.0113 | −0.0042 |
| 6 | 0.44375 | 0.446875 | 0.4453125 | 0.0030 | −0.0042 | −0.0006 |
| 7 | 0.44375 | 0.4453125 | 0.44453125 | 0.003 | −0.0006 | 0.0012 |
| 8 | 0.44453125 | 0.4453125 | 0.44492 | | | |

得到的根約為 0.4450

(c)從區間 [ 0.9 , 1.0 ] 開始

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.9 | 1.0 | 0.95 | 0.0298 | −0.1057 | −0.0399 |
| 2 | 0.9 | 0.95 | 0.925 | 0.0298 | −0.0399 | −0.0056 |
| 3 | 0.9 | 0.925 | 0.9125 | 0.0298 | −0.0056 | 0.0120 |
| 4 | 0.9125 | 0.925 | 0.91875 | 0.0120 | −0.0056 | 0.0032 |
| 5 | 0.91875 | 0.925 | 0.921875 | 0.0032 | −0.0056 | −0.0012 |
| 6 | 0.91875 | 0.921875 | 0.9203125 | 0.0032 | −0.0012 | 0.0010 |
| 7 | 0.9203125 | 0.921875 | 0.92109375 | | | |

其根約爲 0.9210

(d)從區間 [ 1.1 , 1.2 ] 開始

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 1.2 | 1.15 | −0.967 | 0.344 | −0.3474 |
| 2 | 1.15 | 1.2 | 1.175 | −0.3474 | 0.344 | −0.0011 |
| 3 | 1.175 | 1.2 | 1.1875 | −0.0011 | 0.344 | 0.1643 |
| 4 | 1.175 | 1.1875 | 1.18125 | −0.0011 | 0.1643 | 0.0762 |
| 5 | 1.175 | 1.18125 | 1.178125 | −0.0011 | 0.0762 | 0.0325 |
| 6 | 1.175 | 1.178125 | 1.1765625 | −0.0011 | 0.0325 | 0.0108 |
| 7 | 1.175 | 1.1765625 | 1.17578125 | | | |

其根約爲 1.1757

## 1.3

5. 在 1.2 節和 1.3 節中我們舉之多項式例子爲 $x^3+x^2-3x-3=0$ ，它有一根爲 $x=\sqrt{3}$ ，而另兩根爲 $x=-1$ 和 $x=-\sqrt{3}$ ，我們用兩個適當的初值將 $-\sqrt{3}$ 根包含於其間，證明：用線性內插法將收斂到這根。

解　從(−2，−1.5)這個區間開始

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | −1.5 | −1.63636 | −1 | 0.375 | 0.2051 |
| 2 | −2 | −1.63636 | −1.69825 | −1 | 0.2051 | 0.08096 |
| 3 | −2 | −1.69825 | −1.72085 | −1 | 0.08096 | 0.02788 |
| 4 | −2 | −1.72085 | −1.72842 | −1 | 0.02788 | 0.00915 |
| 5 | −2 | −1.72842 | −1.73088 | −1 | 0.00915 | 0.00296 |
| 6 | −2 | −1.73088 | −1.73167 | −1 | 0.00296 | |

觀察 $x_3$，我們知道用線性內插法得到的根收斂於 $-\sqrt{3}$ 這個值。

6. 習題五中，若我們用試驗值 $x=-1.5$ 和 $x=-1.7$，則函數不會反號，所以它不符於線性內插之條件，而用割線法則可行，若用割線法，則重覆多少次後，可以使根精確至小數第四位？若初值是 −1.5 和 −1.1 那麼可能得到那一根？而初值是 −1.5 和 −1.25 呢？

解

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1.5 | −1.7 | −1.75168 | 0.375 | 0.077 | −0.0514 |
| 2 | −1.75168 | −1.7 | −1.73099 | −0.0514 | 0.077 | 0.00268 |
| 3 | −1.75168 | −1.73099 | −1.73202 | −0.0514 | 0.00268 | |

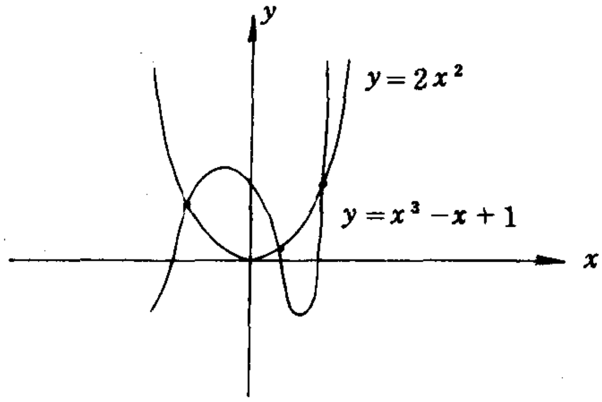
第一次爲利用外插法，第二，三兩次爲內插，重覆三次後求出的根 −1.73202 已精確至小數第四位。

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | −1.5 | −1.1 | −0.73469 | 0.375 | 0.179 | |
| | −1.5 | −1.25 | 4.5 | 0.375 | 0.35938 | |

若是從[−1.5，−1.1]區間開始可求得 $x=-1$ 這個根，而從[−1.5，−1.25]區間開始，$x_3$ 跳到 4.5 處，使得區間變大，所以不應該從此區間開始。

7. 找出立方式 $y=x^3-x+1$ 和拋物線 $y=2x^2$ 之交點，將兩曲線之草圖劃出並標出交點，用線性內插法或割線法求出交點 $x$ 之值。

解




令 $f(x)=x^3-2x^2-x+1$

則 $f(x)$ 與 $x$ 軸有三個交點分別在 $[-0.9,-0.8]$，$[0.5,0.6]$ 和 $[2.2,2.3]$ 三個區間內。

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −0.9 | −0.8 | −0.80175 | −0.449 | 0.008 | 0.00078 |
| 2 | −0.80175 | −0.8 | −0.86364 | 0.00078 | 0.008 | −0.27226 |
| 1 | 0.5 | 0.6 | 0.55459 | 0.125 | −0.104 | 0.00086 |
| 2 | 0.55459 | 0.6 | 0.55496 | 0.00086 | −0.104 | −0.00004 |
| 1 | 2.2 | 2.3 | 2.24470 | −0.232 | 0.287 | −0.01173 |
| 2 | 2.2 | 2.24470 | 2.24708 | −0.232 | −0.01173 | 0.00052 |

上面利用割線法求出的三個交點分別在 $x=-0.80175$，0.55496 和 2.24708 處。

8. (a)用線性內插法解習題 4。(b)用修正線性內插法解這些方程式，並與(a)部分之解比較它們的收斂率。

解 (a)用線性內插法求 $e^x-x-2=0$ 的根

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 1.2 | 1.14438 | −0.09583 | 0.12011 | −0.00389 |
| 2 | 1.14438 | 1.2 | 1.14612 | −0.00389 | 0.12011 | −0.00015 |
| 3 | 1.14612 | 1.2 | 1.14618 | −0.00015 | 0.12011 | −0.00001 |

，用修正線性內插法

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | F1 | F2 | $f(x_3)$ | SAVE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 1.2 | 1.14438 | −0.09583 | 0.12011 | −0.00389 | −0.09583 |
| 2 | 1.14438 | 1.2 | 1.14776 | −0.00389 | 0.06005* | 0.00337 | −0.00389 |
| 3 | 1.14438 | 1.14776 | 1.14619 | −0.00389 | 0.00337 | −0.00005 | 0.00337 |

(a)用線性內插法求 $x^3-x^2-2x+1=0$ 的最小正根

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4 | 0.5 | 0.48013 | 0.504 | −0.125 | −0.08010 |
| 2 | 0.4 | 0.48013 | 0.46914 | 0.504 | −0.08010 | −0.05512 |
| 3 | 0.4 | 0.46914 | 0.46232 | 0.504 | −0.05512 | −0.03957 |
| 4 | 0.4 | 0.46232 | 0.45778 | 0.504 | −0.03957 | −0.02920 |
| 5 | 0.4 | 0.45778 | 0.45462 | 0.504 | −0.02920 | −0.02195 |
| 6 | 0.4 | 0.45462 | 0.45234 | 0.504 | −0.02195 | |

(b)用修正線性內插法

| 次數 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | F1 | F2 | $f(x_3)$ | SAVE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4 | 0.5 | 0.48013 | 0.504 | −0.125 | −0.0801 | 0.504 |
| 2 | 0.4 | 0.48013 | 0.46914 | 0.504 | −0.0801 | −0.05512 | −0.0801 |
| 3 | 0.4 | 0.46914 | 0.45673 | 0.252* | −0.05512 | −0.02679 | −0.05512 |
| 4 | 0.4 | 0.45673 | 0.44678 | 0.126* | −0.02679 | −0.004 | −0.02679 |
| 5 | 0.4 | 0.44678 | 0.44403 | 0.064* | −0.004 | 0.00233 | −0.004 |

從上表可知修正線性內插法較線性內插法收斂快。

9. 按照本章中其他演算法的模式，寫出割線法的演算法。

解　DO WHILE $|x_2-x_1| \geq$ tolerance value 1 , or

$|f(x_3)| \geq$ tolerance value 2 ,

Set $x_3 = x_2 - f(x_2)\dfrac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}$

```
    Set  F1 = MAX ( x1  x2  x3 )
    Set  F2 = MID ( x1  x2  x3 )
    Set  x1 = F1
    Set  x2 = F2
ENDDO
```

## 1.4

10. 用牛頓法找 $e^x - 3x^2 = 0$ 中接近 $x = -0.5$ 之根，並準確到第六位小數。

解 $f(x) = e^x - 3x^2$

$f'(x) = e^x - 6x$

$x_1 = -0.5$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.4602196$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.4589635$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0.4589622$$

取六位得到 r = −0.458962

11. 方程式 $e^x - 3x^2 = 0$ 不僅有一根接近 $x = -0.5$，還有一根接近 $x = 4.0$，用牛頓法找出此正根

解 $f(x) = e^x - 3x^2$

$f'(x) = e^x - 6x$

$x_1 = 4.0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.7843611$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3.7353794$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 3.7330838$$

此正根約為 3.[illegible]34

12. (a)用牛頓法來解習題 4 的方程式，使用綜合除法求這多項式，和它的導數。

(b)令 $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots\cdots + a_nx + a_{n+1}$ 如同第四節裏，寫一段小程式，用綜合除法來計算出 $P(x)$ 和 $P'(x)$

解 (a) $f(x) = e^x - x - 2$

$f'(x) = e^x - 1$

$x_1 = 1.1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.147817$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.146195$$

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$，使用綜合除法。

$$\begin{array}{l|llll}
x_1 = 0.5 & 1 & -1 & -2 & +1 \\
 & & 0.5 & -0.25 & -1.125 \\
\hline
 & 1 & -0.5 & -2.25 & -0.125 \\
 & & 0.5 & +0 & \\
\hline
 & 1 & +0 & -2.25 &
\end{array}$$

$$x_2 = 0.5 - \frac{-0.125}{-2.25} = 0.44444$$

$$\begin{array}{l|llll}
x_2 = 0.44444 & 1 & -1 & -2 & +1 \\
 & & 0.44444 & -0.24691 & -0.99862 \\
\hline
 & & -0.55556 & -2.24691 & +0.00138 \\
 & & 0.44444 & -0.04939 & \\
\hline
 & 1 & -0.11112 & -2.29630 &
\end{array}$$

$$x_3 = 0.44444 - \frac{0.00138}{-2.29630} = 0.44504$$

$f(x) = 2e^{-x} - \sin x$

$f'(x) = -2e^{-x} - \cos x$

$x_1 = 0.9$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.92078$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.92102$$

$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 8x - 1$$

$$\begin{array}{l|llll}
x_1 = 1.2 & 3 & +\ 4 & -\ 8 & -\ 1 \\
 & & +\ 3.6 & +\ 9.12 & +\ 1.344 \\
\hline
 & 3 & +\ 7.6 & +\ 1.12 & +\ 0.344 \\
 & & +\ 3.6 & +\ 13.44 & \\
\hline
 & 3 & +\ 11.2 & +\ 14.56 &
\end{array}$$

$$x_2 = 1.2 - \frac{0.344}{14.56} = 1.17637$$

$$\begin{array}{l|llll}
x_2 = 1.17637 & 3 & +4 & -8 & -1 \\
 & & 3.52912 & +\ 4.15155 & -\ 4.5272 \\
\hline
 & 3 & +\ 7.52912 & -\ 3.84845 & -\ 5.5272 \\
 & & 3.52911 & +\ 13.00857 & \\
\hline
 & 3 & +\ 11.05823 & +\ 9.16012 &
\end{array}$$

$$x_3 = 1.17637 - \frac{-5.5272}{9.16012} = 1.7797$$

(b)
```
DO 10 I=1,N
A(I+1)=A(I+1)+A(I)*X
10 CONTINUE
DO 20 I=1,N-1
    A(I+1)=A(I+1)+A(I)*X
20 CONTINUE
```

13. (a)用牛頓法於 $x^2 = N$ 以便導得求 $N$ 平方根的法則，$x_0$ 是 $\sqrt{N}$ 的初始估計。

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{N}{x_i}\right),$$

(b)導出對於 $N$ 之三次方根和四次方根的類似公式。

解　(a) $f(x)=x^2-N$

$f'(x)=2x$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$=x_i-\frac{x_i^2-N}{2x_i}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_i+\frac{N}{x_i}\right)$$

WHILE　$|f(x(I))|\leq$ tolerance value

DO　$X(I+1)=\frac{1}{2}\left[X(I)+\frac{N}{X(I)}\right]$

　　$X(I)=X(I+1)$

ENDDO

(b) $f(x)=x^3-N$

$f'(x)=3x^2$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^3-N}{3x_i^2}=\frac{1}{3x_i^2}(2x_i^3+N)$$

$$=\frac{1}{3}\left(2x_i+\frac{N}{x_i^2}\right)$$

$f(x)=x^4-N$

$f'(x)=4x^3$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^4-N}{4x_i^3}$$

$$=\frac{1}{4x_i^3}(3x_i^4+N)$$

$$=\frac{1}{4}\left(3x_i+\frac{N}{x_i^3}\right)$$

14. (a)如果13.題中的演算法重覆兩次，證明

$$\sqrt{N}=\frac{A+B}{4}+\frac{N}{A+B}\text{，　其中}\quad N=AB$$

(b)證明在(a)中的相對誤差（誤差/眞值）大約是

$$\frac{1}{8}\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^4$$

解 (a)令 $x_0=A$

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{N}{x_0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(A+\frac{N}{A}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(A+B\right)$$
$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{N}{x_1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(A+B)+\frac{N}{\frac{1}{2}(A+B)}\right]$$
$$=\frac{A+B}{4}+\frac{N}{A+B}$$

(b)相對誤差 $=\dfrac{\dfrac{A+B}{4}+\dfrac{AB}{A+B}-\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}}$

$$=\frac{(A+B)^2+4AB-4\sqrt{AB}(A+B)}{4\sqrt{AB}(A+B)}$$
$$=\frac{(A+B-2\sqrt{AB})^2}{4\sqrt{AB}(A+B)}$$
$$\doteq\frac{1}{8}\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^4$$

15. 令 $P(x)=x^4+4.6x^3+6.6x^2-11x-14$。用綜合除法求 $P(-1)$。將 $P(x)$ 寫成二個多項式的積，其中一個爲三次式。找出這個三次多項式的正實根，然後用二次式找出最後兩個根。這個步驟稱爲

解
$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & +4.6 & +6.6 & -11 & -14 \\ & & -1 & -3.6 & -3 & +14 \\ \hline & 1 & +3.6 & +3.0 & -14 & +0 \end{array}$$