刘培娜
杨大淳 编著

一元代数方程

科学出版社

一 元 代 数 方 程

刘培娜　杨大淳　编著

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书系统论述了一元代数方程，内容丰富，叙述严谨，深入浅出，循序渐近．书中有大量习题，有助于读者掌握概念和方法，提高解题能力．

本书可供中学和师范院校教师、学生参考．

一元代数方程

刘培娜 杨大淳 编著

责任编辑 苏芳霞

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

[illegible]科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年10月第一版 开本：787×1092 1/32

1987年4月第二次印刷 印张：7 1/2

印数：10,701—13,150 字数：170,000

统一书号：13031·2983

本社书号：4423·13—[illegible]

定价：1.40元

前　　言

方程是中学代数课程的一个重要部分，可以说中学各册代数教材中都涉及方程的内容，而且，在数学里很多问题的解决都需要用到方程的知识．本书力图全面介绍一元代数方程的理论．对于一元一次方程、一元二次方程、分式方程、无理方程，着重介绍了同解变形问题，从理论上提高认识；对于高次方程，则阐述方程的有理根、实根、虚根以及重根方面的理论和一些特殊高次方程的解法．

本书力图叙述严谨，浅显易懂．对于一些重要的理论知识和各种方程的解法，也尽可能做了详细的论述，以适用于不同程度的读者．但是，限于我们的水平，本书一定有不足之处，敬希广大读者指教．

在本书的编写过程中，承张鸿顺副教授提出很多的宝贵意见，在此表示深切的谢意．

编　者

1985 年 4 月

目　录

第一章 方　程

§1.1 等式

用等号连结两个解析式所成的式子叫做等式。

例如，

(1) $1+7=8$;　　(2) $x+1=2$;

(3) $ab=ba$;　　(4) $x+3=x+1$;

(5) $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$;　(6) $S=\frac{1}{2}bh$

等都是等式． 其中有些等式当所含的字母取任何值时都成立，例如(1)和(3)；有的等式，则在一定条件下才成立，例如(2)，只有在 $x=1$ 时成立；等式(5)只有在 $x\neq 1$ 时成立；(6)是三角形面积公式，它只有在 $b>0$，$h>0$ 时才成立．有的等式，虽然形式上是相等的，但实际上它却不能成立，例如(4)。

§1.2 等式的基本性质

1. 如果 $a=b$，那么 $b=a$。

2. 如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$。

3. 如果 $a=b$，$c=d$，那么 $a\pm c=b\pm d$。

4. 如果 $a=b$，$m\neq 0$，那么 $am=bm$，$\frac{a}{m}=\frac{b}{m}$。

5. 如果 $a=b$，那么 $a^n=b^n$（n 是自然数）。

6. 如果 $a=b$，且 $a>0$，$b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$（n 是自然数）。

§1.3 方程

如果 $f(x)$ 表示一个关于 x 的解析式，那么使 $f(x)$ 有意义的所有的 x 值叫做 x 的允许值范围。

例如，$\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的 x 的允许值范围为 $x\neq 1$，且 $x\neq 2$ 的一切复数；$\sqrt{x-4}$ 的 x 的允许值范围为不小于 4 的所有实数。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是关于 x 的解析式，它们的 x 的允许值范围的共同部分为 D，又满足条件

$$f(x)=g(x)$$

的 x 值的范围为 M。

（1）当 D 和 M 所包含的 x 值完全相同时，等式 $f(x)=g(x)$ 叫做恒等式；

（2）当 M 所包含的 x 值是 D 所包含的 x 值的一部分而不是全部时，等式 $f(x)=g(x)$ 叫做方程（或条件等式）。

这时，x 叫做方程 $f(x)=g(x)$ 的未知数。D 叫做方程 $f(x)=g(x)$ 的未知数允许值范围。M 叫做方程 $f(x)=g(x)$ 的未知数 x 值的范围。M 中的每一个 x 值叫做方程 $f(x)=g(x)$ 的一个根（或解）。

（3）当 M 中不含任何 x 的值时，等式 $f(x)=g(x)$ 叫做矛盾等式（或矛盾方程）。

例如，等式

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

中，$\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 和 $x+1$ 的共同的 x 允许值范围是 $x\neq 1$ 的一切复数，又使这个等式成立的 x 值的范围也是 $x\neq 1$ 的一切

复数，所以这个等式是恒等式。

就等式

$$|x| = x \quad (x\text{ 为实数})$$

来说，式子中$|x|$和x的共同的x允许值范围是一切实数，又使这个等式成立的x值的范围是一切非负数，而非负数是全体实数的一部分，所以等式$|x| = x$是方程。

而等式

$$x + 1 = x + 2$$

是矛盾等式，或者说是矛盾方程。

§1.4 方程的解

在§1.3中我们已经给出了方程的解（根）的定义。现在还可以如下给出方程的解的定义。

在方程的未知数允许值范围内，能使方程两边相等的数值，叫做方程的解。一元方程的解也叫做方程的根。

例如，1是方程$x + 1 = 2$的解；而$x + 3 = x + 1$是矛盾方程，它没有解。

应该注意，一个方程的解是与这个方程的未知数允许值范围有关的。也就是说，在不同的未知数允许值范围内，方程可能有不同的解。甚至在未知数的某一允许值范围内没有解。

例如，方程

$$(x-2)(x^2-3)(x^2+4) = 0$$

在有理数范围内有一个解

$$x = 2;$$

在实数范围内有三个解

$$x_1 = 2,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3};$$

在复数范围内有五个解

$$x_1=2,\ x_2=\sqrt{3},\ x_3=-\sqrt{3},\ x_4=\sqrt{2}\,i,$$
$$x_5=-\sqrt{2}\,i.$$

又如，方程

$$2x-3=0$$

在自然数范围内没有解.

从这里的例子也可以看出：在不同的未知数允许值范围内，方程的解的个数可能不同. 同时还可以看出：即使能使方程两边的数值相等的数，如果它不在方程的未知数允许值范围内，它也不是这个方程的解.

由方程的解(或根)的定义可以知道，对于方程

$$f(x)=g(x)$$

来说，它的未知数允许值范围为 D，如果 $a\in D$，且有 $f(a)=g(a)$，那么 a 是方程 $f(x)=g(x)$ 的解；反之，如果 a 是方程 $f(x)=g(x)$ 的解，那么 $f(a)=g(a)$. 或者说，a 是方程 $f(x)=g(x)$ 的解的充分必要条件是 $f(a)=g(a)$.

下面介绍解方程的涵义.

由于存在矛盾方程，所以我们说：

确定方程所有的解或者判定方程没有解的过程，叫做解方程.

一个方程可能没有解；也可能有有限个解；还可能有无限多个解.

例如，方程 $x+3=x+1$ 没有解；方程 $x^2-1=0$ 有两个解；方程 $|x|=x$ (x 为实数)有无限多个解.

§1.5　代数方程

在§1.3方程的定义中，给出的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是关于 x 的解析式，我们知道，解析式中包括有代数式和超越式。于是有

下面几个定义:

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是关于 x 的代数式(把数字或表示数的字母,用有限次加、减、乘、除、正整数次乘方、开方等运算和运算顺序符号连结起来所得到的式子叫做代数式),那么方程 $f(x)=g(x)$ 叫做代数方程。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是关于 x 的有理式(把数字或表示数的字母,用有限次加、减、乘、除、正整数次乘方等运算和运算顺序符号连结起来,所得到的代数式叫做有理式),那么方程 $f(x)=g(x)$ 叫做有理方程.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个无理式(当一个代数式里,被开方数中含有变数字母时,这个代数式就叫做无理式),那么方程 $f(x)=g(x)$ 叫做无理方程。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是有理式,而且其中至少有一个是分式时,那么方程 $f(x)=g(x)$ 叫做分式方程(或者有理分式方程)。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是整式,那么方程 $f(x)=g(x)$ 叫做整式方程(或者有理整式方程)。

上面列举的几种代数方程有如下的从属关系:

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}\begin{cases}\text{整式方程}\\ \text{分式方程}\end{cases}\\ \\ \text{无理方程}\end{cases}$$

例如,方程

(1) $x^2-2x=(x-1)(x+3)$; $x^3+px+q=0$;

(2) $x+\dfrac{2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-2}$; $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x-1}{3-x}=0$;

(3) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$; $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\dfrac{5}{2}$.

等都是代数方程。其中第一组的方程都是整式方程;第二组

的方程都是分式方程;第三组的方程都是无理方程.

在一个代数方程中含有几个未知数(如 x, y, z, u),这个代数方程就叫做几元方程.

只含有一个未知数的代数方程叫做一元代数方程.

对于整式方程来说,经过去括号、合并同类项后,未知数的次数最高的项是几次项,这个方程就叫做几次方程.

例如,方程 $x^2-2x=(x-1)(x+3)$ 是一元一次方程;方程 $x^3+px+q=0$ 是一元三次方程.

§ 1.6 重根

一个方程中相等的根叫做这个方程的重根.

下面,我们将只在整式方程范围内讨论重根.

如果一个整式方程有 n 个相等的根,那么就说这个方程有 n 重根.重根的个数 n 叫做根的重数.

例如,方程

$$x^2-2x+1=0$$

有二重根 1.根的重数是 2.

方程

$$x^2(x-1)^3(x+2)^4(x-3)^5=0$$

有二重根 0;三重根 1;四重根 -2;五重根 3.它们的重数分别为 2,3,4,5.

在整式方程中,不重复的根叫做单根(或一重根).

例如,方程

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

有三个单根 1,2,3.

§ 1.7 同解方程

先观察下面的方程:

$$x^2-3x+2=0, \tag{1}$$

$$x=3-\frac{2}{x}, \tag{2}$$

$$x^2-4x+3=0, \tag{3}$$

$$x^2-9x+20=0. \tag{4}$$

方程(1)和方程(2)的解都是 1 和 2，即它们的解完全相同；方程(3)的解为 1 和 3，它的解与方程(1)(或方程(2))的解不完全相同；方程(4)的解为 5 和 4，它的解与方程(1)(或(2))的解完全不相同．我们说方程(1)与方程(2)是同解方程，而方程(1)(或(2))与方程(3)或与方程(4)不是同解方程．

下面给出同解方程的定义：如果第一个方程的解都是第二个方程的解，而且第二个方程的解也都是第一个方程的解，那么这两个方程叫做同解方程．

在§1.4 中已经指出，一个方程的解是与这个方程未知数的允许值范围有密切关系的．从而得知两个方程是否同解，也与这两个方程的未知数允许值范围有着密切的关系．

例如，方程

$$x^2-2=0 \tag{5}$$

与方程

$$x^4-4=0 \tag{6}$$

在实数集上的解都是$\pm\sqrt{2}$，所以它们是同解方程．而在复数集上，方程(5)的解为$\pm\sqrt{2}$，方程(6)的解为$\pm\sqrt{2}$和$\pm\sqrt{2}i$．显然它们不同解．

根据同解方程的定义，可以知道同解方程具有传递性．即，如果第一个方程与第二个方程同解，第二个方程与第三个方程同解，那么第一个方程与第三个方程也同解．

另外，我们还可以认为，凡是无解的方程都是同解方程．

例如，方程

$$\sqrt{x-6}+\sqrt{2-x}=1,$$

$$\frac{1}{x-1}=0,$$

$$x+10=x+11$$

都没有解，因此它们是同解方程。

§1.8 方程的结果

考虑下面两个整式方程

$$x^2=1 \qquad (1)$$

与

$$x^3-2x^2-x+2=0, \qquad (2)$$

方程(1)的解为 1 和 -1，方程(2)的解为 1，-1 和 2。可以看出，方程(1)的解都是方程(2)的解，我们说方程(2)是方程(1)的结果。

现在给出如下的定义：

如果第一个方程的解都是第二个方程的解，那么第二个方程叫做第一个方程的结果。

两个方程是同解方程时，其中每一个方程都是另一个方程的结果。

§1.9 方程的同解变形

解方程时，往往是逐步用较简单的方程替换前面复杂的方程，这种替换叫做方程变形。

如果由第一个方程变形为第二个方程，而且这两个方程是同解方程，那么这种方程的变形叫做方程的同解变形或同解变换。

或者说，把一个方程用与它同解的方程来替换，这种替换叫做方程的同解变形。

有时，对方程作变形不一定是同解变形，那就是说，变形后的方程不一定与变形前的方程同解．这样一来，变形后的方程的解比变形前的方程的解或者多了，或者少了．我们说，如果方程变形后，使方程的根比变形前方程的根增多，那么这增多的根叫做原方程的增根．增根不是原方程的根．

如果方程变形后，使方程的根比变形前方程的根减少，那么这减少的根叫做原方程的遗根（或减根，或失根）．遗根是原方程的根．

产生增根的原因，往往是由于方程变形后未知数允许值范围扩大而造成的．产生遗根的原因，往往是由于方程变形后未知数允许值范围缩小而造成的．

§1.10 方程同解变形定理

下面先介绍部分方程同解变形定理，其他的留待后面介绍．

定理1 如果解析式 $\varphi(x)$ 对于方程

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

的未知数允许值范围D都有意义，那么方程

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x) \tag{2}$$

与方程(1)同解．

证明：(1)设α是方程(1)的任一解，那么有

$$f(\alpha)=g(\alpha).$$

又因为$\varphi(x)$在D上有意义，所以$\varphi(\alpha)$有意义．根据§1.2等式的基本性质3，等式

$$f(\alpha)+\varphi(\alpha)=g(\alpha)+\varphi(\alpha)$$

成立．可见α也是方程(2)的解．

(2) 设α'是方程(2)的任一解，那么有

$$f(\alpha')+\varphi(\alpha')=g(\alpha')+\varphi(\alpha').$$

根据§1.2等式的基本性质3，等式

$$f(\alpha') = g(\alpha')$$

成立。可见 α' 也是方程(1)的解。

由以上两点可知，方程(1)和方程(2)同解。

在这个定理中，$\varphi(x)$ 必须对于 D 都有意义，否则，方程(2)就不一定与方程(1)同解。

例如，在方程

$$x = 1$$

的两边同加上 $\frac{1}{x-1}$，得到方程

$$x + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

显而易见这两个方程不同解。

推论 方程

$$f(x) = g(x)$$

与方程

$$f(x) - g(x) = 0 \tag{3}$$

同解。

这个推论是移项法则的根据。由这个推论可知，方程(1)与方程(3)同解。如果把 $f(x) - g(x)$ 看作 $F(x)$，那么凡是一元方程都可以记作

$$F(x) = 0$$

的形式。

定理2 如果方程 $f(x) = 0$ 的未知数允许值范围是 D，$\varphi(x)$ 是一个解析式。当 $a \in D$ 时，$\varphi(a)$ 有意义，且 $\varphi(a) \neq 0$，那么方程

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

与方程