随机振动

S. H. 克兰德尔 主编

科学出版社

随 机 振 动

S. H. 克兰德尔 主编

吴家驹　吕玉麟 译

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内 容 简 介

本书论述了随机振动的基本理论和解决实际的随机振动问题的方法.

S. H. Crandall, Editor

RANDOM VIBRATION

The M. I. T. Press, 1963

随 机 振 动

S. H. 克兰德尔 主编

吴家驹　吕玉麟 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年11月第一版　开本：787×1092　1/32

1980年11月第一次印刷　印张：10 3/8

印数：0001—4,150　字数：235,000

统一书号：13031・1330

本社书号：1848・13—2

定价： 1.60 元

序

1958 年出版的那一卷《随机振动》，是根据在马萨诸塞理工学院举行的第一次随机振动暑期专题报告会上所提出的文章编成的．该书的作者就是那次报告会的十一位报告人．与之相似，这一卷的九位作者是 1963 年 7 月的第二次随机振动暑期专题报告会的报告人．

两卷相隔了五年，这期间振动技术的研究相当活跃．不仅在理论上有了显著的进步，而且还积累了丰富的实际经验．与前一卷相比，这一卷的内容反映了这一进展．

同五年前的情况一样，随机振动理论主要应用于飞行器，尤其是导弹、人造卫星和宇宙飞行器．用火箭推进的飞行，在发射和助推阶段存在着严重的随机振动．由于破坏和故障所造成的损失很大，所以工程上正在作出巨大的努力，以保证那些必须在随机振动环境下工作的结构和设备具有最大的可靠性．可以认为本书是关于这方面工作进展的非正式报告．本书前五章介绍随机振动的概况和理论，以下两章研究火箭助推的飞行器的激励和响应问题． 最后三章处理有关数据收集、规范制定、试验设备和试验程序等实际问题，并讨论了设计和试验的原理．

由于随机振动理论方面的工作者的技术背景各不相同，因而所选用的记号也各有不同．对本书各位作者所用的记号，编者不想强求统一．这在多数情况下，不会引起混淆．但要提请读者注意：表示平均和描述谱密度的方法可能有不同选择．在第一章中 $E[\quad]$ 表示系集平均，上方加一横表示时

间平均.这种记号适用于前四章.以后各章，上方加一横一般表示系集平均.谱密度是均方量按频率的分解.至于需要分解的是哪些均方量,频率是用“周/单位时间”还是用“弧度/单位时间”表示都有选择.此外,由于谱密度是频率的偶函数,因而选用双边谱或单边谱都可以.以上各种不同的选择,都曾被采用过.但在分析研究中,一般使用圆频率和双边谱比较方便;而在实验工作中,一般使用“周/单位时间”和单边谱则较为方便.如若作者对他的选择未作明确说明时,读者可按照“谱密度求和得到均方”这个方法来判断.

由于各位作者的密切配合，本书的编辑工作完成得非常顺利.

S. H. 克兰德尔

1963年6月6日于马萨诸塞州 林肯

译　　序

本书前半部是随机振动的基本理论．写得比较精炼、明晰，很适合工程技术人员阅读．本书后半部分介绍处理随机振动问题的实际办法．由于原书出版时间较早，书中未反映近几年来新的进展．例如振动环境预示，基于快速傅立叶变换的数字计算机处理数据与控制振动试验技术，机械阻抗技术和振动试验的等效技术等等，本书就未涉及或未充分讨论．不过本书所介绍的随机振动问题的本质和处理这个问题的总体思路还是很有意义的．此外，本书所介绍的技术细节，至今也还没有失去实际意义．

本书的特点是既有理论，又有解决实际问题的方法．在介绍随机振动问题时没有陷入烦琐的细节叙述，而是抓住了问题的本质，介绍了处理问题的出发点、过程与思路，并对现行的处理问题的程式作了较为辩证的分析．

译稿由北京大学申又枨教授和南京航空学院张阿舟教授校核．陈国钧、李岳锋二同志也对译稿提出了许多宝贵意见．译者深表谢意．

译　者

目　　录

第一章　随机振动基本理论……………………D. C. 卡纳勃　1

§1.1　随机过程 ……………………………………………………… 1

§1.2　振动系统 ……………………………………………………… 13

§1.3　振动系统的随机激励 ………………………………………… 29

参考文献 ……………………………………………………………… 36

第二章　平稳随机过程的测量 …………S. H. 克兰德尔　38

§2.1　一个简单的统计模型：Chi-方 ……………………………… 39

§2.2　谱密度的测量 ………………………………………………… 45

§2.3　测量的平均值 ………………………………………………… 49

§2.4　测量的方差 …………………………………………………… 52

§2.5　等效带宽 ……………………………………………………… 55

§2.6　平均时间 ……………………………………………………… 58

§2.7　自相关的测量 ………………………………………………… 63

参考文献 ……………………………………………………………… 68

第三章　非平稳随机输入和响应 ……………T. K.考伊　70

§3.1　引言 …………………………………………………………… 70

§3.2　随机过程的特征化 …………………………………………… 70

§3.3　单自由度系统对非平稳输入的响应 ………………………… 71

§3.4　多自由度系统对非平稳输入的响应 ………………………… 74

§3.5　傅立叶变换应用于非平稳过程 ……………………………… 81

§3.6　例 ……………………………………………………………… 84

参考文献 ……………………………………………………………… 88

第四章　非线性系统的随机激励 ………S. H. 克兰德尔　90

§4.1　非线性系统的确定性特征 …………………………………… 90

§4.2　对于平稳随机激励的响应 …………………………………… 94

§ 4.3　求得期望频率的一种近似方法 …………………… 98
§ 4.4　摄动法 ………………………………………… 99
§ 4.5　等效线性化方法 …………………………………… 102
§ 4.6　$E[xg(x)]$的另一个推导法………………………… 104
参考文献 ………………………………………………… 106
第五章　振动造成的破坏………………… C. E. 克里德 108
§ 5.1　破坏准则 ………………………………………… 108
§ 5.2　系统对随机振动的响应 …………………………… 114
§ 5.3　梁的随机振动 ……………………………………… 121
§ 5.4　累积疲劳损伤 ……………………………………… 130
§ 5.5　拟正弦应力时间历程的疲劳 ……………………… 139
§ 5.6　复杂时间历程的疲劳 ……………………………… 145
参考文献 ………………………………………………… 149
第六章　高速导弹的噪声……………… J. E. F. 威廉斯 151
§ 6.1　不稳定气流所引起的压力脉动的理论 …………… 153
§ 6.2　压力脉动源 ………………………………………… 154
§ 6.3　气动生声 …………………………………………… 158
§ 6.4　比例法则 …………………………………………… 162
§ 6.5　导弹蒙皮上的压力 ………………………………… 167
§ 6.6　超声速飞行 ………………………………………… 168
§ 6.7　亚声速飞行 ………………………………………… 171
§ 6.8　发射情况 …………………………………………… 175
§ 6.9　火箭噪声的其他方面 ……………………………… 177
参考文献 ………………………………………………… 179
第七章　宇宙飞行器结构对火箭发动机噪声的响应
………………………………………………… I. 戴尔 182
§ 7.1　结构模态的能量 …………………………………… 183
§ 7.2　模态密度和加速度谱 ……………………………… 184
§ 7.3　平均传递函数 ……………………………………… 187
§ 7.4　辐射阻尼和机械阻尼 ……………………………… 192

§7.5 宇宙飞行器的火箭噪声激励 …………………… 195
参考文献 ………………………………………… 199
第八章 外场测量、规范和试验 …………… I. 维戈尼斯 201
§8.1 引言 ……………………………………… 201
§8.2 正弦振动和随机振动的比较 …………………… 206
§8.3 从外场数据推导规范和试验 …………………… 210
§8.4 装夹具和导向装置 ………………………… 234
§8.5 非平稳和非高斯随机振动 …………………… 242
参考文献 ………………………………………… 248
第九章 振动的产生 …………………………… G. B. 布思 251
§9.1 引言 ……………………………………… 251
§9.2 直接驱动型机械振动台 ……………………… 253
§9.3 反作用型机械振动台 ………………………… 258
§9.4 专用的机械振动台 …………………………… 266
§9.5 电液激励系统 ……………………………… 267
§9.6 电动激励系统 ……………………………… 279
§9.7 振动试验的控制 …………………………… 294
§9.8 随机振动试验的精度 ………………………… 303
第十章 随机振动理论在宇航结构和设备研制中的应用 ……………………………… C. T.莫尔罗 309
§10.1 振动数据、设计准则和试验规范 ……………… 309
§10.2 规范对设计的影响 ………………………… 312
§10.3 对振动规范的约束 ………………………… 314
§10.4 振动与气动噪声 …………………………… 315
§10.5 振动试验 ………………………………… 316
§10.6 综合与响应计算 …………………………… 319
§10.7 计算什么响应 ……………………………… 321
§10.8 结论 ……………………………………… 322
参考文献 ………………………………………… 323

第一章 随机振动基本理论

本章将简单介绍研究随机振动所需要的一些基本概念. 因为涉及的范围很广而篇幅有限，所以对一些概念及结论的含义说明，必然要从简. 但在本章末的参考文献中有好几种书刊论及这里所讨论的题材，读者遇到不熟悉的专题时可以查阅.

本章的第一部分概述随机过程；第二部分介绍寻求机械系统动力响应的常用方法；第三部分叙述在随机激励下线性振动系统响应的某些结果.

§1.1 随机过程

概率 概率是一个数学术语，它是针对理想的实验而不是真实的实验来说的[1-3]. 例如，我们设想一个实验，在记作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 n 个结果中，必定有一个而且只有一个出现，把 A_i 的概率记作 $P(A_i) \geqslant 0$，则

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \tag{1.1}$$

(1.1)式可以解释为每一次理想实验中必然要发生的事件的概率等于 1. 如果令 A 是"理想实验中出现任何一个结果 A_i"的事件，则(1.1)式可写成

$$P(A) = 1 \tag{1.1a}$$

一般地说，概率是介于 0 和 1 之间的正实数. 不能发生的事件的概率等于零. 下面这种说法不一定正确：概率为 1

表示必然性，概率为零表示不可能性．作为后者的一个反例，考虑一个用理想子弹射击理想靶子的问题．由于在靶子上有无限个点，射中某一特定点的概率为零；然而，每一次总会射中某一点．

假设理想实验的结果是事件 A 和事件 B 两者可以同时发生．A 和 B 都发生的概率 $P(A,B)$ 可表示为

$$P(A,B)=P(A/B)P(B)=P(B/A)P(A) \tag{1.2}$$

其中 $P(A/B)$ 是条件概率，它表示在已知 B 发生的条件下 A 发生的概率．这个概念可以推广到三个或三个以上事件

$$P(A,B,C)=P(A)P(B/A)P(C/A,B) \tag{1.3}$$

如果

$$\begin{aligned}P(A/B)&=P(A)\\P(B/A)&=P(B)\end{aligned} \tag{1.4}$$

换句话说，如果 A 发生的概率与 B 的发生无关，并且 B 发生的概率与 A 的发生无关，则事件 A 和 B 称为是统计独立的．对于统计独立的事件 A 和 B 来说，由(1.2)式和(1.4)式得到

$$P(A,B)=P(A)P(B) \tag{1.5}$$

在进行真实实验时，概率反映为相对频率比．如果有一个实验进行 N 次，每一次在事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有一个而且只有一个发生，则 A_i 的相对频率比 $R_N(A_i)$ 可以写作为

$$R_N(A_i)=\frac{N_i}{N} \tag{1.6}$$

其中 N_i 是 A_i 发生的次数．和(1.1)式相似，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n}R_N(A_i)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(N_i)}{N}=1 \tag{1.7}$$

每次实验中都出现的事件，其相对频率比等于1；每一次总不出现的事件，其相对频率比等于0．与(1.2)，(1.3)，(1.4)，

(1.5)式类似的结果对相对频率比来说也成立.

如果假设真实实验也象理想实验那样受到概率支配，那么可以认为 $R_N(A_i)$ 是 $P(A_i)$ 的近似值. 而且一般地说，N 越大，两者越接近. 作出这样的假设需要工程上的判断，而不是数学上的判断. 因为，实验再多也不能代替数学来证明这一假设成立. 事实上，即使是理想实验，当 $N \to \infty$ 时，$R_N(A_i)$ 并不是象趋于一个极限那样接近于 $P(A_i)$（至少按通常的意义上是如此）.

在理想实验中，伯努里定理把 $R_N(A_i)$ 和 $P(A_i)$ 联系起来

$$P(|R_N(A_i) - P(A_i)| < \epsilon) \to 1, \text{当 } N \to \infty \text{时} \quad (1.8)$$

(1.8)式表示当理想实验的独立实验次数 N 趋于无限时，事件 A_i 的相对频率比与 A_i 的概率之差小于一个任意小数 ϵ 的概率，趋近于1. 但是不可能找到这样一个 N，保证 $|R_N(A_i) - P(A_i)|$ 小于 ϵ.

现在假定理想实验的结果是取变量 x 的一个实数值. 按照惯例，x 就称为随机变量. 如果 x 只取有限个数值，则称为离散随机变量；如果 x 取连续数值，则称为连续随机变量.

关于随机变量的概率通常用分布函数 $P(x \leqslant X)$ 来描述[4]，它表示 x 取小于 X 的一定值的概率. 注意：

$$\left.\begin{array}{l} P(x \leqslant -\infty) = 0 \\ P(x \leqslant +\infty) = 1 \end{array}\right\} \quad (1.9)$$

x 落在 $a < x \leqslant b$ 区间内的概率等于

$$P(x \leqslant b) - P(x \leqslant a) = P(a < x \leqslant b) \geqslant 0 \quad (1.10)$$

从(1.10)式可以看到，如果 $b \geqslant a$，则 $P(x \leqslant b) \geqslant P(x \leqslant a)$，因此分布函数是 X 的单调非减函数. x 只取离散值时，$P(x \leqslant X)$ 如图 1.1(a) 所示；x 取连续值时，则如图 1.1(b) 所示.

对 $P(x \leqslant X)$ 进行微分，我们至少可以在那些导数存在

的区间内，得到概率密度函数 $p(X)$

$$p(X)=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{P(x\leqslant X)-P(x\leqslant X-\Delta X)}{\Delta X} \tag{1.11}$$

$$p(X)=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{P(X-\Delta X<x\leqslant X)}{\Delta X} \tag{1.12}$$

对于图 1.1(a)所示的那种情况，密度函数可以用 $P(x\leqslant X)$中每个跳跃处的脉冲或狄拉克 δ 函数来表示。每一个脉冲占有的面积等于 P 图中对应的跳跃值大小。按这个约定，$X-\Delta X<x<X$ 的概率近似于 $p(X)\Delta X$。 图 1.2 表示相应于图 1.1 的分布函数的密度函数。

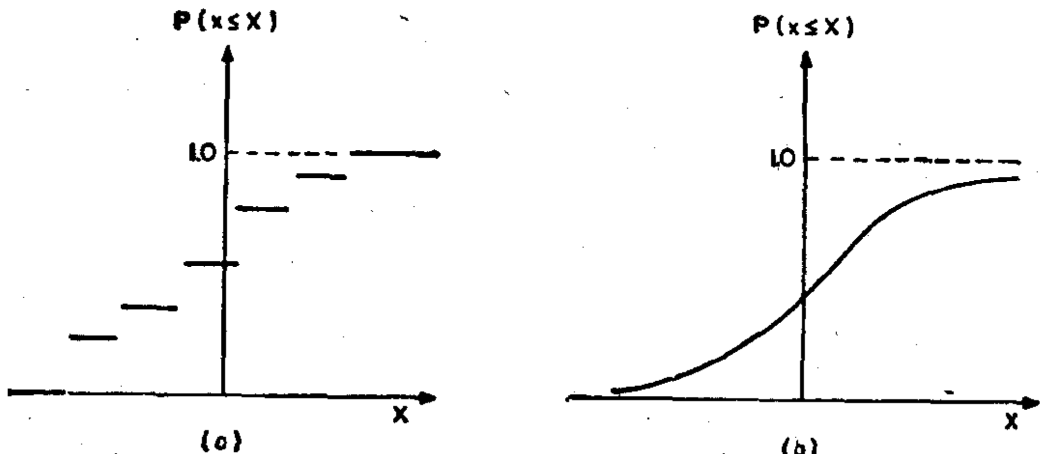

图 1.1　概率分布函数

(a) 离散情况　(b) 连续情况

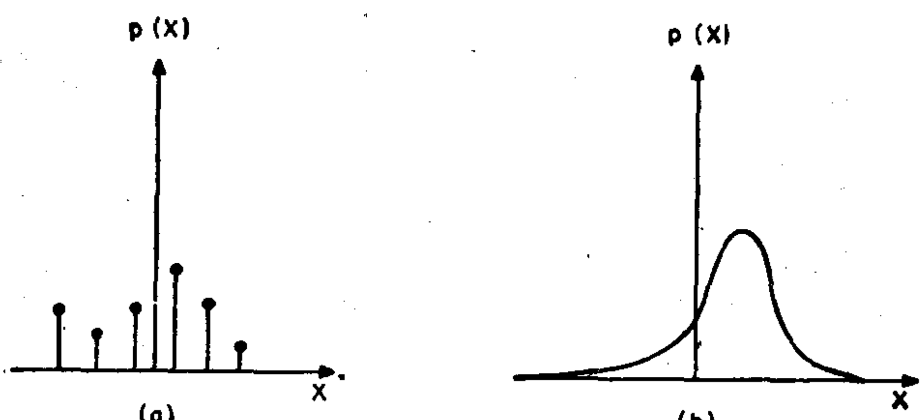

图 1.2　概率密度函数

(a) 离散情况　(b) 连续情况

随机时间函数 产生时间函数的随机过程可以用一个理想实验来说明．我们设想用若干相同的随机机构在固定条件下工作来产生一个时间函数系集[5]．这样就可以定义一系列概率．例如，在任一时间t，一维概率密度函数或分布函数，可以通过考虑样本函数的无限系集并构造相对频率来定义．按照伯努里定理，这个相对频率在概率为1的意义上收敛于预想的概率

$$p(X, t)dX = P(X - dX < x(t) \leqslant X) \tag{1.13}$$

在(1.13)式中，$x(t)$表示随机过程（实质上是样本函数的无限系集），$p(X,t)$表示密度函数．在意义明确的场合，这个密度函数往往用$p(x,t)$来表示．类似地，联合密度函数定义作

$$\begin{aligned}
p(X_1, t_1, X_2, t_2, \cdots, X_n, t_n)\, dX_1\, dX_2 \cdots dX_n \\
= P(X_1 - dX_1 < x(t_1) \leqslant X_1, \\
X_2 - dX_2 < x(t_2) \leqslant X_2, \cdots, \\
X_n - dX_n < x(t_n) \leqslant X_n)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

只要不致于引起混淆，这里的联合密度函数就可写成$p(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots, x_n, t_n)$．所有可能的联合概率密度函数确定以后，便确定了一个数学随机过程．这些密度函数有如下性质

$$0 \leqslant p(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots, x_n, t_n) \tag{1.15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots, x_n, t_n) dx_1 \cdots dx_n = 1 \tag{1.16}$$

对较高维的密度函数进行积分便可求得较低维的密度函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, t_1, \cdots, x_m, t_m, x_{m+1}, t_{m+1}, \cdots, x_n, t_n) \times dx_{m+1} \cdots dx_n = p(x_1, t_1, \cdots, x_m, t_m), m < n \tag{1.17}$$

实际上，我们不可能进行那么多的实验来求出各维（除了非常低维以外）密度函数的相对频率．

如果联合概率密度函数不随时轴平移而改变，则称这种

过程是平稳的．此时

$$p(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n)$$
$$= p(x_1,t_1+T,\cdots,x_n,t_n+T) \tag{1.18}$$

平均 由于一般不可能用实验来求出完全确定一个随机过程的所有联合概率，所以工程界设法用几个容易得到的平均作为研究随机过程的工具，这些平均仅仅部分地描绘所研究的随机过程．例如，$x(t)$ 的平均、统计平均或系集平均都写成

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} Xp(X,t)dX \tag{1.19}$$

其中符号 E 还来源于另一个名词——$x(t)$ 的期望值．系集平均可以推广，设 $y = g(x)$，则 y 或 $g(x)$ 的期望值可以写成

$$E[y_t] = E[g(x_t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X)p(X,t)dX$$

特别有用的是一组平均，称为矩．第 n 阶矩定义为

$$E[x_t^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_t^n p(x_t)dx_t \tag{1.20}$$

由此可见，一次矩正好就是平均．中心矩定义为

$$E[x_t - E(x_t)]^n = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_t - E(x_t)]^n p(x_t)dx_t \tag{1.21}$$

在 (1.20) 式和 (1.21) 式中，上标 t 强调表示平均是对某一特定时刻而言的，因为一般地说 $p(X,t)$ 要随时间而变．在平稳的条件下，$p(X)$ 以及与 $p(X)$ 有关的平均都不随时间变化．在许多应用中，二次中心矩尤为重要，称它为方差，记作 σ_x^2

$$\sigma_x^2 = E[x_t - E(x_t)]^2 = E[x_t^2] - [E(x_t)]^2 \tag{1.22}$$

我们可以把求期望值的运算看作是对随机过程样本函数系集的平均．我们也可以对系集中某一特定现实取时间平均．例如，

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)dt \tag{1.23}$$

其中时间函数上加一横表示时间平均. 函数 $g(x)$ 的时间平均是

$$\overline{g(x)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} g(x_t)dt \tag{1.24}$$

人们往往假设平稳过程还具有一种所谓**遍历性**即时间平均和系集平均相等. 很明显,非平稳随机过程不可能是遍历的,因为它的系集平均要随时间改变. 粗略地说,遍历过程中系集的任一现实几乎都是系集的"典型"[1]. 遍历性是一个非常有用的性质,随机振动里的平稳过程通常都假设成遍历的,除非有明确的理由说明不可能是遍历的. 必须看到,遍历性假设往往是工程师们的信念,而不是已经证实的结果[2].

关于两个变量间的统计相关性的这一重要概念,可以用另一形式的平均来表示. 设两个随机变量 x 和 y 的联合概率密度函数为 $p(x, y)$,其**相关系数**为

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x-E[x])(y-E[y])]}{\sigma_x\sigma_y} \tag{1.25}$$

引入标准化变量 ξ 和 η

$$\xi = \frac{x-E[x]}{\sigma_x}$$

$$\eta = \frac{y-E[y]}{\sigma_y}$$

---

1) 严格地说,某些样本函数不一定是"典型"的,这些函数的时间平均不一定等于系集平均. 这样的非典型样本函数系必须是"零测度"的,也就是说,选出这一种特殊样本函数的概率一定等于零.

2) 由于一般随机振动从开始到终止的时间是有限的,因而在严格意义上人们甚至没有根据说某过程是真正平稳的,更不用说是遍历的了.

$$E[\xi] = E[\eta] = 0$$
$$\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = 1$$

我们得到

$$\rho_{xy} = \rho_{\xi\eta} = \rho = E[\xi,\eta] \tag{1.25a}$$

可以证明

$$-1 \leqslant \rho \leqslant +1 \tag{1.26}$$

而且 ρ 是在 ξ,η 散布图中按最小均方差原则所得到的最优直线的斜率(见图 1.3)[6] 注意：如若 $\eta = \pm\xi$，则 $\rho_{xy} = \rho_{\xi\eta} = \rho$ 就取值±1．ρ 取±1之间的中间值时，其值大小是 x 和 y 之间或 ξ 和 η 之间的线性统计相关性的一种量度．

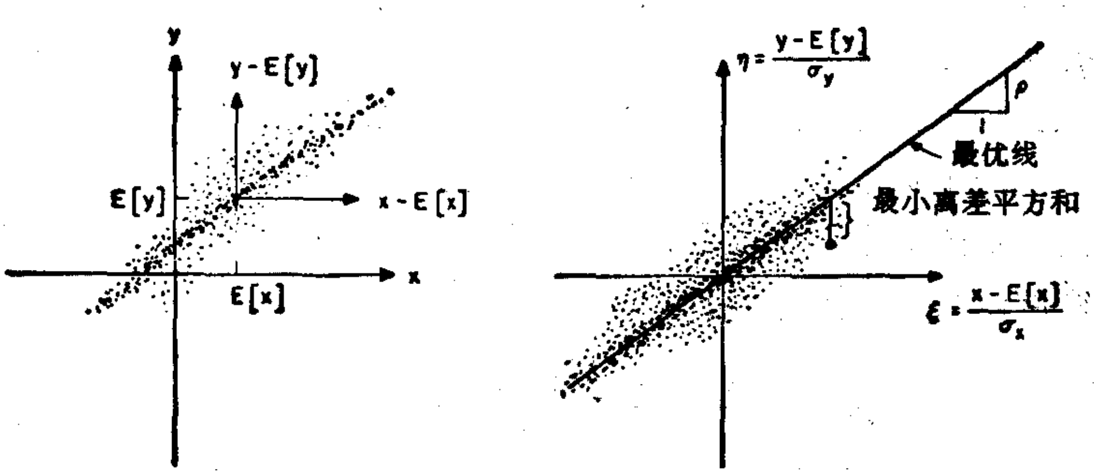

图 1.3 说明相关系数的散布图

对于一个随机过程而言，可以用自相关函数来表示 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$之间的相关性

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \tag{1.27}$$

对于平稳过程，它将只与 t_1 和 t_2 之差 τ 有关．因此

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \tag{1.28}$$

其中 t 是任意的．对于遍历过程，自相关函数也可以通过对系集的任一样本函数(零测度样本函数系除外)作时间平均来求得