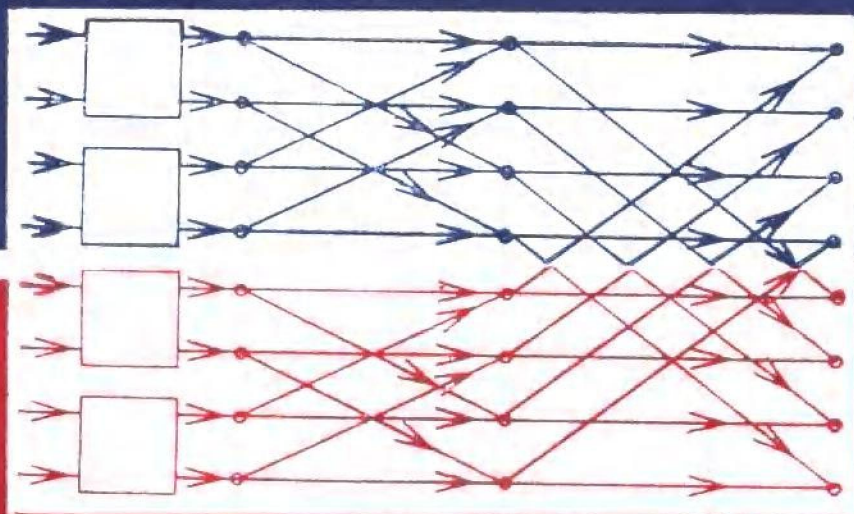


数字信号处理基础

(修 订 版)

董绍平 陈世耕 王 洋 编



哈尔滨工业大学出版社

数字信号处理基础

(修 订 版)

董绍平 陈世耕 王 洋 编

NO13/22

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了数字信号处理基本理论、设计方法和实现等方面内容。全书共分九章：离散时间信号与系统、差分方程（含Z变换）、离散傅立叶变换、离散希尔伯特变换、FIR和IIR数字滤波器的设计与网络结构、快速傅立叶变换、有限字长效应及二维数字信号处理导论等。前四章为数字信号处理基本理论；中间三章为数字信号处理基本技术，最后两章深入地讨论了实现中遇到的问题及扩展应用范围方面的内容。每章后附有习题，书末附有答案，便于学习复习。

本书深入浅出，论述严谨，物理概念清晰。可作为电子与通讯工程类有关专业本科生和研究生的教材，也可供有关科技人员参考。

数字信号处理基础

Shuzi Xinhao Chuli Jichu

（修 订 版）

董绍平 陈世耕 王 洋 编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

黑 龙 江 大 学 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 24.5 字数 564 千字

1996年9月第2版 1998年1月第3次印刷

印数 8 001—13 000

ISBN 7-5603-0178-9/TN·12 定价 24.60 元

再 版 前 言

本次再版根据近年来教学和科研方面的需要进行了一些删补,并对原书中的不当之处和印刷错误做了修改。

首先是从教材的体系上,把原书中的第二章 Z 变换和第三章差分方程合并为差分方程一章,作为本次再版的第二章, Z 变换作为差分方程讨论的工具写成一节出现在差分方程一章中。对于重要而又不便于编入 Z 变换一节的内容(如 Z 变换的性质和基本定理),编为本章的附录,习题亦作了相应修改。原版书中的第四章离散傅立叶变换改为第三章,其次是增加了离散希尔伯特变换一章,列为第四章,以便满足零中频正交双通道信号处理和信号重构基本理论方面的需要。对于二维数字信号处理导论中二维 IR 数字滤波器实现,也做了一些增补。

本版书第一、二、三、五、六、七、八章可作为电子与通信工程类专业高年级本科生的教材,也可作为未具有数字信号处理知识的其他专业研究生的学习教材。第四、八、九章可作为电子与通信工程类专业研究生数字信号处理课的一部分内容。

本次再版由于时间和编者水平所限,未能对全书的不当之处做到尽善尽美的修改,望读者谅解并提出宝贵意见,以便斧正。

编 者

1996年6月

目 录

绪 论	1
第一章 离散时间信号与系统	6
§1-1 离散时间信号	6
§1-2 离散时间系统	9
§1-3 离散时间信号与系统的频域表示	13
§1-4 傅立叶变换的性质	17
§1-5 抽样定理	21
习 题	25
第二章 差分方程	28
§2-1 线性常系数差分方程	28
§2-2 Z 变换	34
§2-3 系统函数及差分方程的 Z 变换	45
§2-4 差分方程的流图表示及其系统的实现	48
§2-5 差分方程的解法	53
习题	65
附录 Z 变换的基本定理与性质	68
第三章 离散傅立叶变换	78
§3-1 周期序列的离散傅立叶级数 (DFS)	78
§3-2 离散傅立叶变换 (DFT)	83
§3-3 Z 变换的抽样	84
§3-4 离散傅立叶变换的性质	88
§3-5 用循环卷积计算序列的线性卷积	96
习题	101
第四章 离散希尔伯特变换	104
§4-1 复序列实部和虚部的希尔伯特变换关系	104
§4-2 带通信号的采样和双通道正交信号处理	109
§4-3 因果序列傅立叶变换的希尔伯特变换关系	115
§4-4 最小相位序列	119
§4-5 离散傅立叶变换下的希尔伯特变换	125
习题	129
第五章 有限冲激响应数字滤波器的设计与网络结构	131
§5-1 有限冲激响应数字滤波器的特性	131
§5-2 窗口法设计有限冲激响应数字滤波器	138
§5-3 模块法设计有限冲激响应数字滤波器	144

§5-4 有限冲激响应数字滤波器的网络结构	151
§5-5 整系数滤波器	153
§5-6 有限冲激响应数字滤波器的抽样结构及频率抽样设计法	160
§5-7 有限冲激响应数字滤波器最优化设计概述	167
习题	169
第六章 无限冲激响应数字滤波器的设计与网络结构	172
§6-1 无限冲激响应数字滤波器设计的模拟-数字转换法	172
§6-2 无限冲激响应数字滤波器模拟-数字转换法设计举例	181
§6-3 无限冲激响应数字滤波器的原型变换设计法	190
§6-4 直接法设计无限冲激响应数字滤波器	194
§6-5 无限冲激响应数字滤波器的优化设计	200
§6-6 无限冲激响应数字滤波器的网络结构	205
附录 模拟滤波器设计概述	210
习题	223
第七章 快速傅立叶变换	225
§7-1 基2时域抽选FFT的基本原理	225
§7-2 基2时域抽选FFT的蝶形运算公式及其按点运算程序	230
§7-3 基2时域抽选FFT的其它形式及按组运算程序	237
§7-4 基2频域抽选快速傅立叶变换	243
§7-5 任意基的快速傅立叶变换	250
习题	257
第八章 有限字长效应	259
§8-1 数的表示方法对误差的影响	259
§8-2 模/数转换过程中的量化效应	263
§8-3 定点实现IIR数字滤波器的零输入极限环特性	267
§8-4 定点运算数字滤波器有限字长效应的统计分析	273
§8-5 浮点运算数字滤波器有限字长效应的统计分析	295
§8-6 快速傅立叶变换的有限字长效应	307
§8-7 系数的量化效应	315
习题	320
第九章 二维数字信号处理导论	325
§9-1 二维离散信号与系统	325
§9-2 二维Z变换及差分方程	331
§9-3 二维离散傅立叶变换	335
§9-4 二维有限冲激响应数字滤波器的设计	338
§9-5 二维无限冲激响应数字滤波器的设计	351
§9-6 二维数字滤波器的实现	360
习题	369
习题答案	371
参考文献	385

绪 论

数字信号处理理论与技术是伴随半导体器件和计算机技术的发展而出现的一门新兴学科, 目前它已经成为一门具有系统的基础理论和应用技术并获得广泛应用的学科。它主要是研究用数字或符号的序列来表示信号, 并用数字的方式去处理这些序列, 从而得到我们所需要的信号形式。可以预计, 随着半导体和计算机技术的飞速发展, 数字信号处理技术在信号处理中将显示出明显的优越性。数字信号处理的内容丰富多彩, 但就其技术本身的成熟性和应用的广泛性而言, 数字滤波和数字频谱分析是其中最重要的内容。因此, 本书将就这两方面的内容进行深入详尽的讨论。

为了使读者对数字信号处理的过程有一个概括的了解, 首先介绍一下数字信号处理的一般过程 (见图 0-1)。

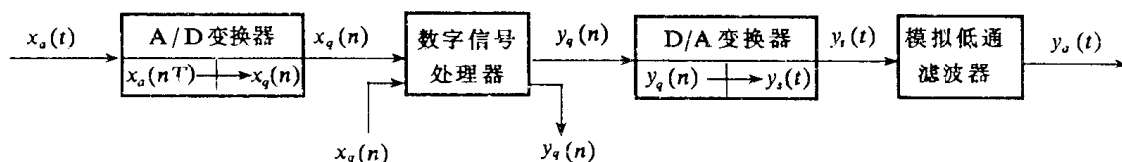


图 0-1 数字信号处理的示意框图

设被处理的是模拟信号 $x_a(t)$, 经过 A/D 变换转换成数字信号 $x_q(n)$ 。数字信号处理器完成规定的运算过程。它可以由通用数字计算机加软件组成, 也可以是专用计算机。数字信号 $y_q(n)$, 经过 D/A 变换器变换为阶梯的模拟信号 $y_s(t)$, 再经过模拟低通滤波器除去阶梯所含有的高频成分, 最后得到所需要的模拟信号 $y_a(t)$ 。如果数字信号处理器是一个数字滤波器, 则图 0-1 相当于一个模拟滤波器, 其各点波形如图 0-2 所示。

根据数字信号处理器对输入量的要求及人们对其输出量的要求, 可对框图中的 A/D、D/A 变换器考虑取舍。

其次介绍一下信号与系统的分类。

携带信息的物理过程称为信号, 在数学上可以描绘成一个或几个独立变量的函数。如语音信号可以看成是时间变量的函数, 图象信号可以看成是二维空间变量的亮度函数。只有一个独立变量的信号, 可以看成是时间的函数, 当然也可以不是时间的函数, 但这并不失一般性。对于信号的自变量和函数值, 原则上可以各自取连续值和离散值, 于是便产生以下各种信号。

模拟信号: 是指在时间上和幅度上都取连续值的信号, 如在上述信号处理过程中的 $x_a(t)$ 、 $y_a(t)$ 等。

数字信号: 是指在时间上和幅度上都取离散值的信号, 如上述处理过程中的 $x_q(n)$ 、 $y_q(n)$ 。

连续时间信号: 是指在时间上取连续值的信号。幅度的取值可以是连续的, 也可以

是离散的。例如上述处理过程中的 $x_a(t)$ 、 $y_a(t)$ 和 $y_s(t)$ 。通常与模拟信号混同。

离散时间信号：是指在时间上取离散值，幅度上取连续值的信号，如上述处理过程中的 $x_a(nT)$ 。

通常把模拟信号与数字信号看成是相互对应的，而把连续时间信号与离散时间信号也看成是相互对应的。又由于通常把模拟信号与连续时间信号混同，所以也可以把模拟信号与离散时间信号看成是相互对应的。

物理上把处理信号的装置或技术称为系统。把处理信号的装置称为系统是人们容易理解的，但把处理信号的技术也称为系统，则比较费解，需要加以说明。如为了对信号进行频谱分析，需要用窄带滤波器组来实现，它是一种装置；另外也可以利用计算机软件进行 FFT（快速傅立叶变换）处理，而 FFT 是一种技术，也称为系统。

系统的分类与要处理的信号形式相对应。根据上述信号形式，系统可分类如下：

模拟系统：是指其输入和输出均为模拟信号的系统。

数字系统：是指其输入和输出均为数字信号的系统。

连续时间系统：是指其输入和输出都是连续时间信号的系统。在实际应用中，连续时间系统和模拟系统是混同的。

离散时间系统：是指其输入和输出都是离散时间信号的系统。

本书大部分内容是讨论离散时间信号和与之相对应的离散时间系统，仅有一章考虑了幅度量化后产生的影响，是针对数字系统进行讨论的。

另外，系统还可分为线性系统与非线性系统。满足迭加原理的系统是线性系统，否则为非线性系统。线性移不变系统是指系统的参数不随时间（位移）而变化的系统，它又可分为连续线性移不变系统和离散线性移不变系统，本书只讨论离散线性移不变系统。

数字信号处理与模拟信号处理相比，有其一系列的特点。首先，数字信号处理的精度高。在模拟信号处理中，模拟网络元件的精度要达到 10^{-3} 就已经很困难了，而 16 位字

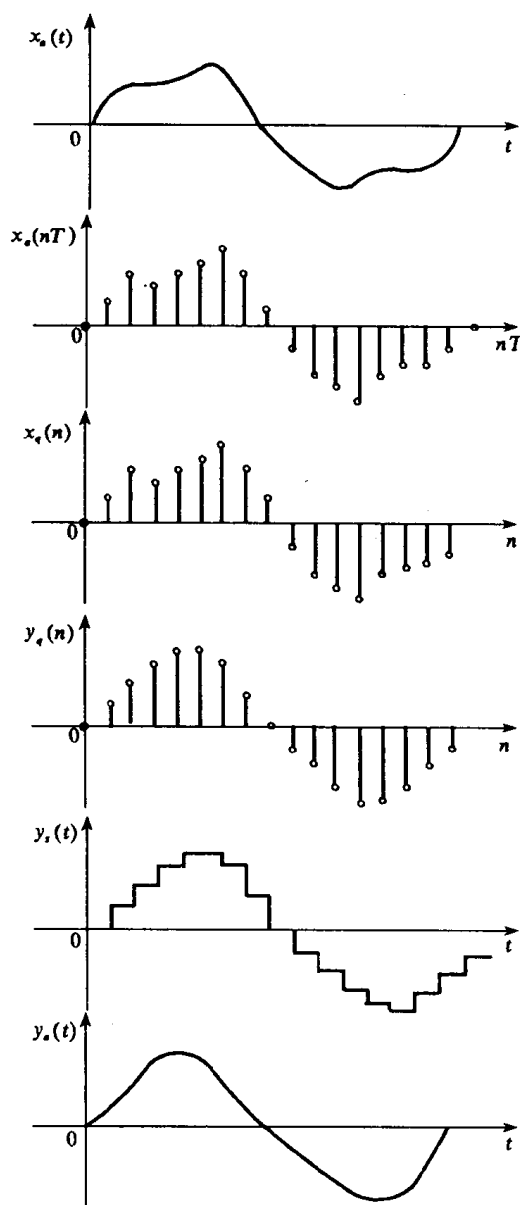


图 0-2 模拟信号数字化处理波形图

长的数字系统的精度则可接近 10^{-5} 。因此要求处理精度较高时，就应该用数字系统。第二，数字信号处理系统可靠性高。模拟系统中各种参数与温度等环境条件密切相关，因此处理的结果要随环境条件的变化而变化，产生不稳定现象。数字信号处理系统受环境条件的影响较小，甚至可以消除环境条件的影响，因此比较稳定，可靠性高。第三，数字信号处理较灵活，并可以分时复用。一个数字信号处理系统的主要特性是由输入到乘法器的各个系数决定的，而这些系数预先已存放在存储器中，因此，只要改变这些系数或存贮单元，就可改变系统的特性，故较灵活。这种灵活性也提供了分时多路复用的可能性，如图 0-3 所示。每增加一路，只需增加存放系数的存贮单元，不需要增加乘法器。用同步器控制分路器和数字信号处理器中信息输入到乘法器的存贮单元，就可以得到不同特性的数字信号处理器，即可实现分时多路复用。

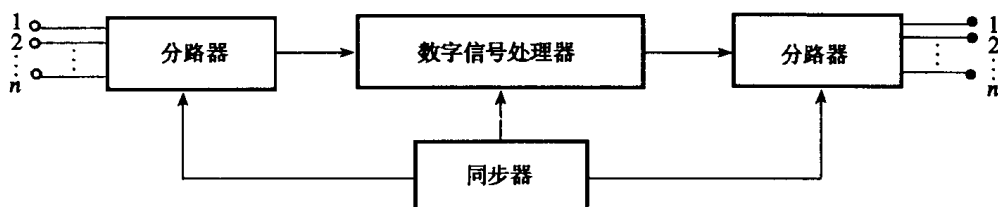


图 0-3 数字信号处理器分时复用示意图

如处理每秒抽样 20 次的地震数据，完成一个滤波运算的时间为 $500\mu s$ ，在每个抽样间隔内，可以容纳 100 个滤波运算。第四，数字信号处理系统便于大规模集成。对于模拟网络，实现大规模集成是比较困难的，因为诸多元件的参数数值很难做得一致。尤其是低频网络， L 、 C 的数值很大，很难集成化。而数字网络只要求呈现两种状态，因此对元件数值的要求不象模拟网络那样严格，便于大规模集成。另外在低频时，与模拟网络相比，数字网络的体积、重量较小。频率越低，这种优点越显著。第五，有限冲激响应数字滤波器容易实现精确的线性相位滤波。第六，数字信号处理系统可以实现多维滤波。数字系统可以有庞大的存储器，将图象信号的一帧或数帧存贮起来，实现图象信号的二维滤波或帧间滤波。

数字信号处理除了上述优点外，也有其缺点和局限性。目前，其处理的速度还不够高，A/D 变换器以及逻辑硬件的速度也只有几十兆赫，因此不能处理频率更高的信号。另外，数字信号处理系统的结构较复杂，价格较贵，所以对要求较低的信号处理系统仍以采用模拟系统为宜。但是可以相信，随着半导体器件和计算机技术的发展，数字系统必将会逐步得到改善。

数字信号处理技术起源很早。16 世纪发展起来的经典数值分析技术是数字信号处理技术的理论基础，18 世纪拉普拉斯发展的 Z 变换是数字信号处理的数学基础。凯塞认为，数字滤波器是在 17 世纪初由天文学课题和编选数学用表诱导出来的。到了 1947 年，赫尔维兹发表了名为 “Theory of seromechanisms” 的论文，这是有关抽样数据控制系统的第一篇近代论文。

由上述可见其发展是很缓慢的。但近 20 年来却得到了迅速的发展。

第二次世界大战后不久,人们就开始探讨用数字元件构成数字滤波器的问题。但当时从成本、体积和可靠性考虑,其远不如模拟滤波器和模拟谱分析。到了50年代,控制理论已发展成为一门比较完整的科学,抽样的概念及其频谱效应已被人们充分了解,Z变换理论已普及到电子工程领域。1958年,Ragazzini等人写出了名为“Sampled Data Control Systems”的著作,它是有关数字信号处理的第一本近代著作。但限于当时的工艺水平,人们只能对一些低频的控制或地震信号的数字处理问题做一些实践性的尝试。到了60年代中期,才开始出现较为定型的数字信号处理理论。这时人们已看到了集成电路工艺的潜力,并相信用数字元件构成较完善的信号处理系统是完全可能的。

数字信号处理的重大进展之一是1965年发表的快速傅立叶变换。它使数字信号处理从概念到实现发生了重大转折。60年代初,人们已经掌握了利用计算机进行谱分析的原理,但其所需的时间太长,实际应用还有许多困难。而快速傅立叶变换使计算的时间缩短了两个数量级,因而使数字信号处理技术得以成功应用。

近几年来又出现了一些新的快速算法。在本世纪60年代末期和70年代初期,先后由C.M.Rader、R.C.Agarwal和C.S.Burrus等人提出了用数论变换(Number Theoretic Transforms)进行卷积运算的方法,比FFT卷积运算速度更高,且由于是采用整数模运算,因而不存在运算误差。1975年后,S.Winograd等人又提出了比FFT更快的离散傅立叶变换(DFT)的另一种算法——WFTA(Winograd Fourier Transform Algorithm)算法,该算法具有与FFT一样的物理意义。本世纪60年代以来,人们又重新发展了以沃尔什函数为基础的沃尔什变换(WHF)及其快速算法(FWHT),目前已在通信和图象处理中得到应用。

数字信号处理发展过程中的另一个重大进展是有限冲激响应(FIR)和无限冲激响应(IIR)数字滤波器地位的相对变化。最初,人们通常认为IIR数字滤波器比FIR数字滤波器优越。随着信息理论的发展,人们认识到除信号的幅度包含信息外,相位同样也包含着信息。为了得到更多的信息,需要同时提取包含在幅度和相位中的信息。这样,就不允许信号处理过程中有相位失真。IIR数字滤波器不能严格满足这个要求,因此人们现在常常宁可牺牲阶数也采用FIR数字滤波器来进行信号处理。另外,也有人提出用快速傅立叶变换进行卷积运算,这就有可能用快速傅立叶变换实现高阶的FIR滤波运算。这样,人们不再一概而论地认为IIR比FIR数字滤波器更优越了,而应视应用场合加以选择。这就促使人们对FIR数字滤波器进行进一步的研究。70年代以来,许多科学工作者对数字信号处理中的有限字长效应进行了分析研究,解释了数字信号处理中出现的许多现象,使数字信号处理的基本理论进入了基本成熟的阶段,1975年,A.V.Oppenheim、R.W.Schafer所著的《数字信号处理》一书是数字信号处理理论的代表作。

从数字信号处理技术的实现上看,大规模集成电路技术是推动数字信号处理技术发展的重要因素。由于大规模集成电路的出现,数字信号处理不仅可以用计算机来实现,而且可以用数字部件组成专用硬件来完成。目前数字部件的单片集成密度已达到几十万个电路,数字信号处理用的很多通用部件已单片化,因此,一些数字信号处理系统可以用很少的单片组成。例如,80年代推出的NEC μ PD7720、AMTS2811、INTEL2920、

TMS320 等系列产品都具有很强的数字信号处理功能。总之，微处理机的发展，使数字信号处理技术应用的领域发展得更加深入、广泛。

目前，数字信号处理已在生物医学工程、地震、声学工程、雷达、通信、语音、图象等领域得到了广泛的应用；应用的技术有滤波、变换、调制、解调、均衡、增强、压缩、估值、识别、产生等；应用的方式可分为如下几种情况：

第一，对某些数据处理没有严格的时间限制的情况。如地球物理数据处理、图象处理等，可以把数据记录下来，用大型计算机进行非实时处理。几秒钟记录的数据可能需要处理几个小时。

第二，用于设计和模拟。在设计中常常会用到数字信号处理技术，如在声表面波器件设计中，就要用到快速傅立叶变换（FFT）技术。另外在实施一个系统之前，可以用计算机进行模拟，验证其正确性。

第三，对信号进行实时处理。在很多情况下要求对信号进行实时处理，但往往受到计算机和A/D、D/A 变换器速度的限制。目前对音频信号可以实现实时处理。在雷达技术方面，FFT已用于超视距雷达的谱分析、脉冲压缩和多卜勒频率的提取。数字信号处理的发展与应用概貌如图 0-4 所示。

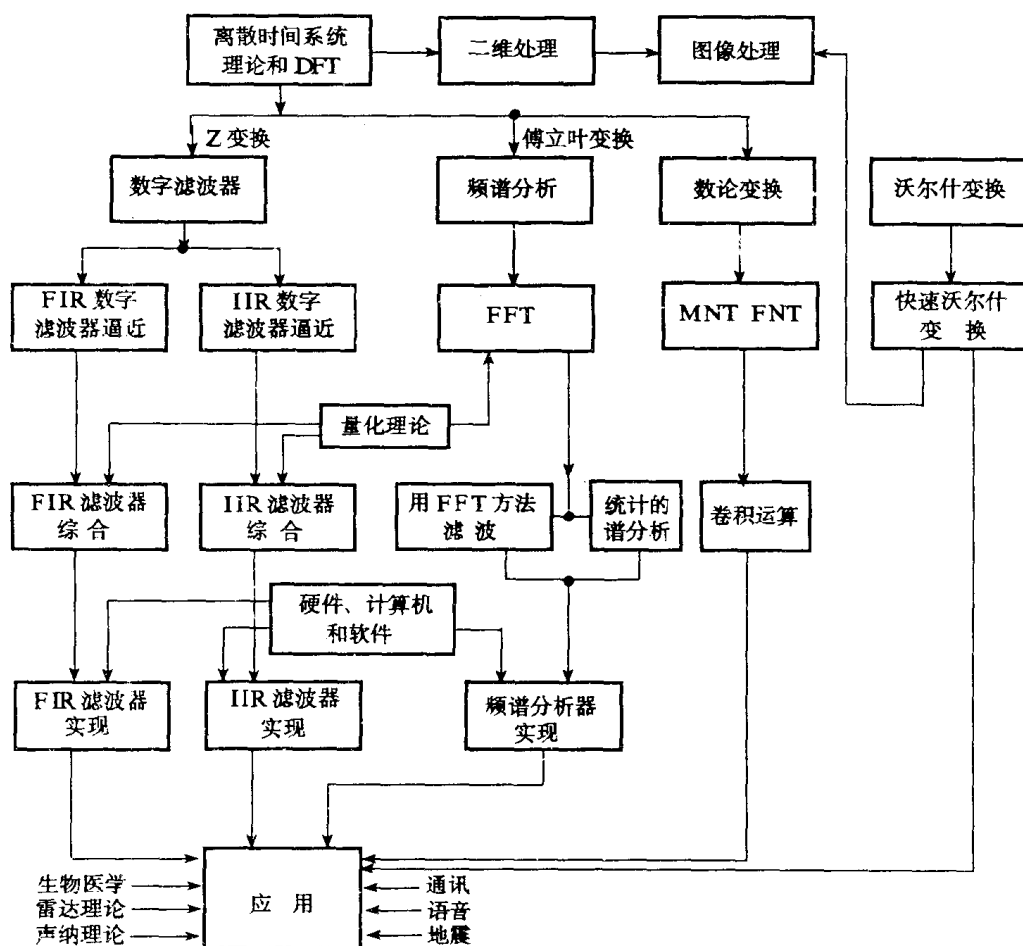


图 0-4 数字信号处理与应用概貌

第一章 离散时间信号与系统

本章将讨论离散时间信号与系统的基本概念以及信号通过离散时间系统等问题。方法是直接从离散时间信号与系统着手，而并不是先由模拟信号开始，然后把两者联系起来得出所要求的结论。本章将介绍一些最常用的基本序列，讨论用卷积和来表示线性移不变系统的输入输出关系，给出系统的稳定性和因果性的定义以及离散时间信号和系统的频域表示及抽样定理等。

§1-1 离散时间信号

离散时间信号是指在时间上取离散值而不考虑其幅度是否离散（或量化）的信号，可用序列来表示。序列是指按着一定次序排列的数值 $x(n)$ 的集合，表示为

$$\{x(-\infty), \dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots, x(\infty)\}$$

或

$$\{x(n)\}, -\infty < n < \infty$$

其中 n 为整数，是 $\{x(n)\}$ 的序号； $x(n)$ 表示序列中的第 n 个抽样值。符号 $\{\cdot\}$ 表示全部抽样值的集合。序列 $\{x(n)\}$ 又可写成

$$\text{序列 } x = \{x(n)\} \quad -\infty < n < \infty \quad (1-1)$$

用式 (1-1) 表示序列还嫌繁琐，为简便起见，我们把序列 $\{x(n)\}$ 直接写成 $x(n)$ 。序列也常用图形表示，如图 1-1 所示。

应当注意， $x(n)$ 仅仅是当 n 为整数值时才有定义。对于非整数 n ， $x(n)$ 没有定义，而不能错误地认为 $x(n)$ 为零。

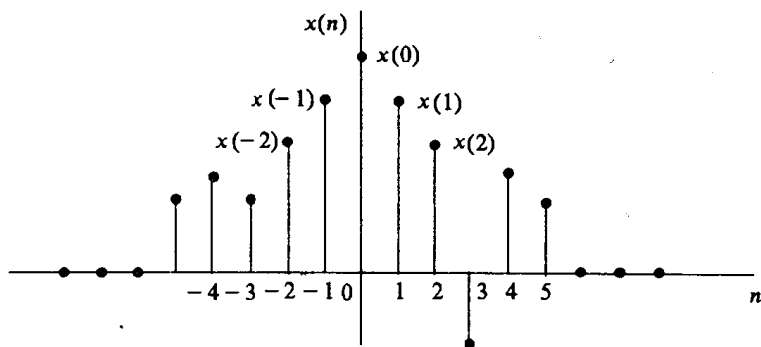


图 1-1 离散时间信号序列的图形表示

下面介绍几种最常用的典型序列：

1. 单位抽样序列 $\delta(n)$

其定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

它在数字系统中所起的作用和模拟系统中冲激函数 $\delta(t)$ 所起的作用相似。所不同的只是在 $n=0$ 时, $\delta(n)=1$, 而不是无穷大。

2. 单位阶跃序列

其定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

由定义可明显地看出 $u(n)$ 与 $\delta(n)$ 的关系为

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1-4)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-5)$$

式 (1-5) 中的 $u(n-1)$ 是 $u(n)$ 的位移序列。

一般来说, 若序列 $y(n)$ 与序列 $x(n)$ 之间满足 $y(n)=x(n-k)$ 的关系, 则称序列 $y(n)$ 为序列 $x(n)$ 的位移 (或延迟) 序列。其中 k 为整数。当 k 为正值时为向右移位, k 为负值时为向左移位。

3. 实指数序列

其定义为

$$x(n) = a^n \quad (a \text{ 为实数}) \quad (1-6)$$

4. 正弦序列

其表示式为

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi) \quad (1-7)$$

式中 n 为整数, ω_0 为数字角频率, φ 为初相角。

5. 复指数序列

其表示式为

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_r)n} \quad (1-8)$$

如果对所有的 n , 关系式 $x(n)=x(n+N)$ 均成立, 且 N 为满足关系式的最小正整数, 则 $x(n)$ 定义为周期序列, 其周期为 N 。例如, 若

$$\sin(\omega_0 n + \varphi) = \sin[\omega_0(n+N) + \varphi]$$

则只有当 $\omega_0 N = 2\pi$ 或 $\frac{2\pi}{\omega_0} = N$ 时, $\sin(\omega_0 n + \varphi)$ 才为周期序列, 其周期为 N 。若

$\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不为整数, 而为有理数, $\sin(\omega_0 n + \varphi)$ 仍可为周期序列, 但其周不为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$, 而

为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的整倍数, 其倍数为分数 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的不可约分母。若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不为有理数, 则 $\sin(\omega_0 n + \varphi)$

不是周期序列。

当 $\sigma=0$ 时, 复指数序列与上述正弦序列的情况是相同的, 因为有

$$e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$$

由于正弦序列和复指数序列的 ω_0 值可以在 $2\pi k \leq \omega_0 < 2\pi(k+1)$ 内连续取值 (k 为任意整数), 因此 ω_0 具有多值性。由于 k 取整数时, 得到的正弦序列或复指数序列 (当 $\sigma=0$ 时) 的值完全相同, 所以为避免多值性, 规定 ω_0 在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 内取值。这不会影响序列值。

上述各序列的图形如图 1-2 所示。

在离散时间信号处理中, 需要进行序列的运算, 其基本运算有如下几种: 设序列

$$x = \{x(n)\}, y = \{y(n)\}$$

1. 两序列之积。两序列之积为在同一序号下, 两序列的值 $x(n)$ 和 $y(n)$ 之积所形成的新序列, 表示为

$$\begin{aligned} \{x(n)\} \{y(n)\} &= \\ \{x(n) \cdot y(n)\} \quad (1-9) \end{aligned}$$

2. 两序列之和。两序列之和, 为在同一序号下, 两序列的值 $x(n)$ 和 $y(n)$ 之和所形成的新序列, 表示为

$$\begin{aligned} \{x(n)\} + \{y(n)\} &= \\ \{x(n) + y(n)\} \quad (1-10) \end{aligned}$$

3. 序列乘以常数 a 。序列乘以常数 a , 即为序列的每一序号的值 $x(n)$ 都乘以常数 a 所得的新序列, 表示为

$$a\{x(n)\} = \{ax(n)\} \quad (1-11)$$

4. 序列的位移 (延迟)。在数字信号处理中, 序列的位移也可看成是一种运算。

我们利用单位抽样序列的定义和位移序列的概念, 可把任意序列表示成各移位的单位抽样序列的加权和。例如图 1-3 所示的序列 $x(n]$ 可表示为

$$x(n) = a_{-3} \delta(n+3) + a_1 \delta(n-1) + a_2 \delta(n-2) + a_7 \delta(n-7)$$

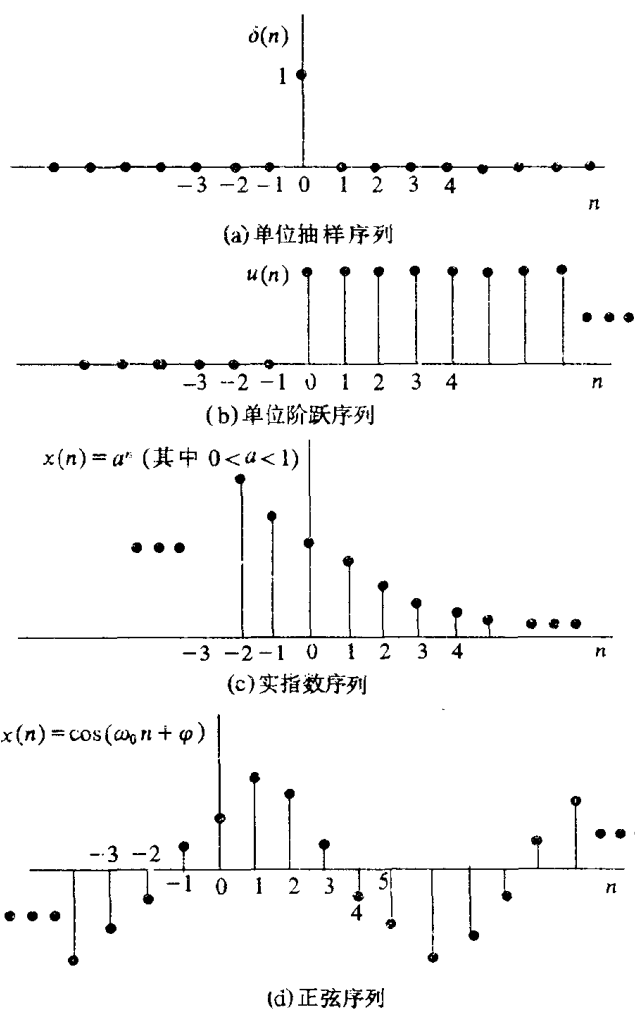


图 1-2 常用的典型序列图形

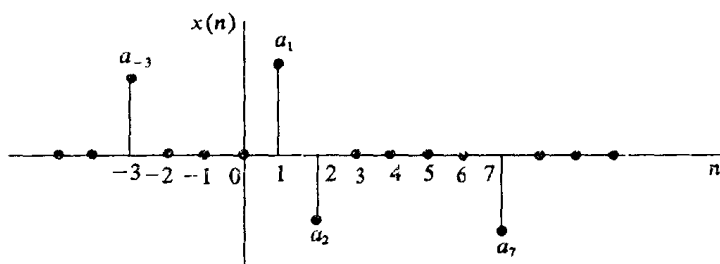


图 1-3 任意序列的图形表示

一般地, 任意序列可以表示为

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \quad (1-12)$$

式中 $x(k)$ 是序列在序号为 k 处的加权值; $\delta(n-k)$ 是移动 k 之后的单位抽样序列。

§ 1-2 离散时间系统

在绪论中, 我们已给出了系统的物理定义。在此我们给出其数学定义: 离散时间系统即为将输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列 $y(n)$ 的唯一性的变换或运算, 记为

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1-13)$$

其框图表示如图 1-4 所示。其中 $x(n)$ 表示输入序列, $y(n)$ 表示输出序列, $T[\cdot]$ 表

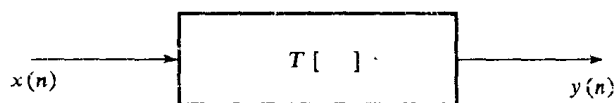


图 1-4 输入 $x(n)$ 映射成输出 $y(n)$ 的变换

示变换符号, 其性质取决于系统。对变换 $T[\cdot]$ 加上各种约束条件, 即可定义出下列各类离散时间系统:

线性系统: 满足迭加原理的系统定义为线性系统。若 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 分别为输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的输出响应, 则迭加原理可用下式描述, 即

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (1-14)$$

其中 a 、 b 为常系数。满足式 (1-14) 的系统即为线性系统。迭加原理可用均匀性和迭加性来描述, 即 a 、 b 均为 1 时表示迭加性, a 、 b 至少有一个不为 1 时表示均匀性。

移不变 (或非移变、时不变) 系统: 若系统的输出响应随输入的位移而位移, 即若

$$y(n) = T[x(n)]$$

则

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

那么称此系统为移不变系统。

若系统对单位抽样序列 $\delta(n)$ 的响应为 $h(n)$ (称单位抽样响应, 亦称冲激响应), 则根据上式有 $h(n-k) = T[\delta(n-k)]$ 。根据线性和非移变系统的性质, 将式 (1-12) 代入式 (1-13), 则有

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right] =$$

或

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (1-15)$$

式 (1-15) 称为卷积和公式。

任何线性移不变系统都可由单位抽样响应 $h(n)$ 来表征。式 (1-15) 表明, 对这类系统, 其输出等于它的输入 $x(n)$ 与其单位抽样响应 $h(n)$ 的卷积和, 表示为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = h(n) * x(n) \quad (1-16)$$

由上述可见, 卷积结果与进行卷积的两个序列的次序无关, 即将输入与单位抽样响应互相调换, 系统的输出不变, 满足交换律。

根据上述性质, 两个线性移不变系统的级联或并联组合之后, 仍构成一个线性移不变系统。图 1-5 示出了三种以不同级联组合方式构成同一等效系统的情况。图 1-6 示出了并联的两个线性移不变系统等效于一个系统的情况, 其等效系统的单位抽样响应等于两个并联系统的单位抽样响应之和。因此, 序列的卷积和满足交换律、结合律和分配律。

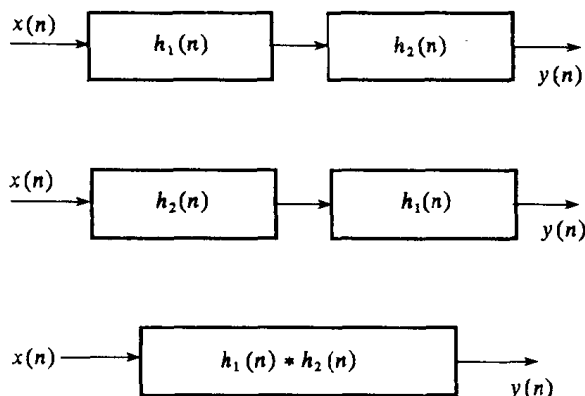


图 1-5 单位抽样响应相同的三个线性移不变系统

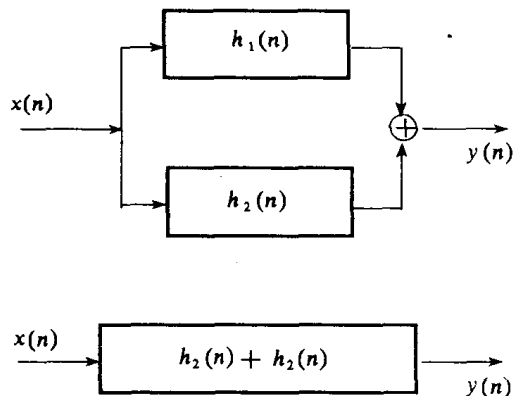


图 1-6 并联组合及其等效系统

需要指出, 虽然卷积和的表示式类似于模拟系统理论中的卷积积分, 但不能认为卷积和是卷积积分的近似。

卷积和除了在理论上有其重要作用外, 在实际应用中, 还可用它来实现离散线性移

不变系统。

例 1-1 一系统，其单位抽样响应为

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

或

$$h(n) = a^n u(n)$$

其输入序列为 $x(n) = u(n) - u(n - N)$ ，求输出响应 $y(n)$ 。

解 首先讨论用图解法求卷积和。从卷积和公式 (1-15) 可以看出，为求得输出序列 $y(n)$ 的第 n 个值，必须算出序列的乘积 $x(k)h(n-k)$ ，并将得到的新序列的各值相加。序列 $x(k)$ 绘于图 1-7(a) 中。序列 $h(n-k)$ 对应不同的 n 值，分别绘于图 1-7(c)、(d)、(e) 中。由图可以看出， $h(-k)$ 是 $h(k)$ 以纵轴为轴的翻转，它们对纵坐标对称。 $h(n-k)$ 随 n 值的不同沿横坐标轴移动。对某个确定的 n 值，求出不同 k 值时的 $x(k)h(n-k)$ 值，并将其求和，便得到系统的第 n 个输出值 $y(n)$ 。如图 1-7(f) 所示。

其次讨论解析法求卷积和。首先要根据卷积和的变化情况，按转折划段，然后对每段的卷积和确定上下限。确定上下限的一般原则是：若给定两序列 $x(k)$ 和 $h(n-k)$ 的非零值的下限分别为 L_1 、 L_2 ，上限分别为 V_1 、 V_2 ，则选 L_1 、 L_2 中大者作为卷积和的下限，选 V_1 、 V_2 中小者作为卷积和的上限。固定序列 [式 (1-15) 的 $x(k)$] 的上下限是固定不变的，而移动序列 [式 (1-15) 中的 $h(n-k)$] 的非零值上下限是随着 n 值的变化而变化的，所以对应不同的 n 值，移动序列就会有不同的上下限。由图 1-7 可以看出，上述卷积和应该分为三段。当 $n < 0$ 时， $x(k)$ 与 $h(n-k)$ 互不重叠，其乘积为零，输出 $y(n) = 0$ ；当 $0 \leq n < N$ 时， $x(k)$ 的下限为零 ($L_1 = 0$)， $h(n-k)$ 的下限 $L_2 = -\infty$ ，故取 $L_1 = 0$ 作为卷积和的下限。而 $x(k)$ 的不为零上限为 $V_1 = N-1$ ， $h(n-k)$ 的不为零上限为

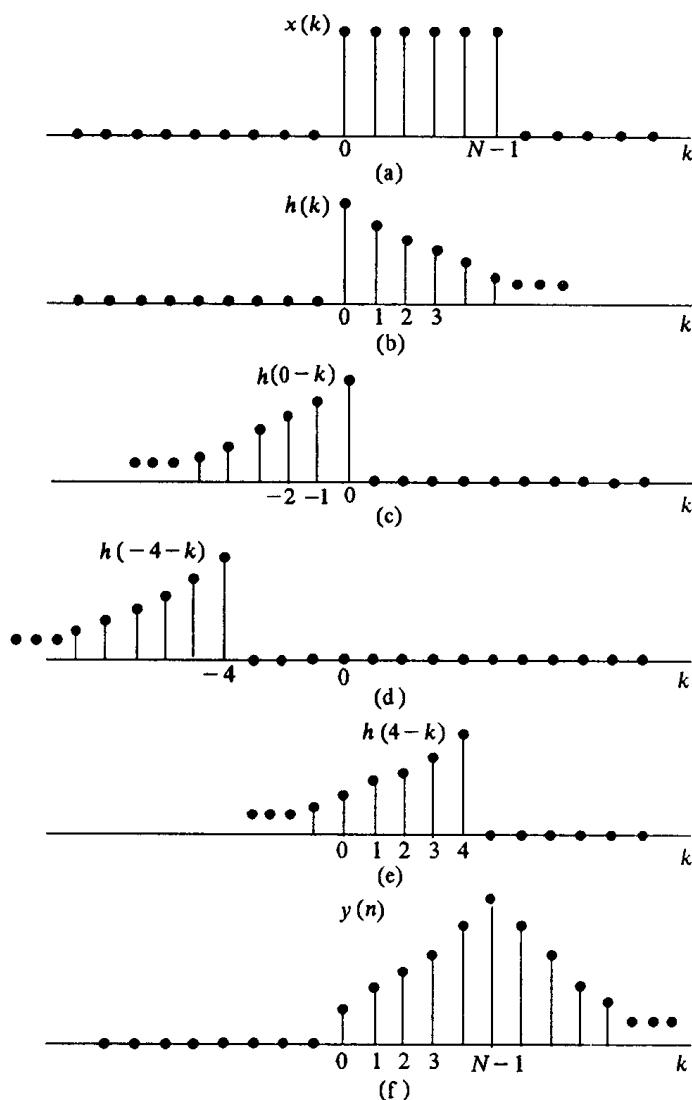


图 1-7 卷积过程图

(a)、(b) 卷积的序列；(c)、(d)、(e) 卷积过程；(f) 卷积结果