中学数学教学参考丛书

直线和平面

上海教育出版社

中学数学教学参考丛书

直 线 和 平 面

夏明德 编

上海教育出版社

内 容 提 要

本书比较深入地讨论了空间两直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，并在此基础上介绍了空间的基本作图与基本轨迹命题，最后介绍了多面角的全等与对称的判定方法．本书可供中学数学教师教学和业务进修参考，也可供中学生课外阅读．

中学数学教学参考丛书
直 线 和 平 面
夏 明 德 编
上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
新华书店上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷
开本787×1092 1/32 印张4.875 字数100,000
1981年1月第1版 1981年1月第1次印刷
印数1—54,000本

统一书号：7150·2367 定价：0.38元

目　　录

一、平面的基本性质

1. 平面和它的表示法

我们在日常生活里看到的物体，它们的形状是千差万别的，它们的表面也各不相同，有的物体的表面是弯曲的，象杯子的表面；有的物体表面是平的，象水的表面和一块穿衣镜的表面.（图 1-1） 象平静的水面、穿衣镜的表面、玻璃台面等都给我们以平面的形象.

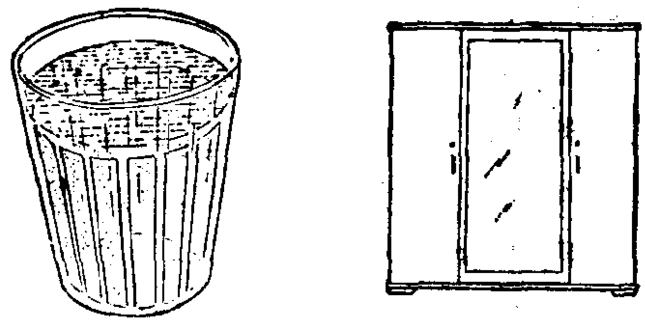


图 1-1

那末什么是平面？我们在一个面上任取两点连一直线，如果这条直线全部在这个面内，就称这个面是平面.

人们在实践中就是应用这个原理来检验一个面是平面的. 例如，木工刨一块木板，为了检验这块木板是否已经刨平，他们用角尺的边缘(直线)紧靠在所刨的木板上，并从一处平行移动到另一处，仔细观察角尺的边缘是否总是与木板表面密合，如果是密合的那就说明木板已经刨平了. 同样，泥工在用水泥铺砌地坪时，也是用一根直尺在刚铺的水泥地面上

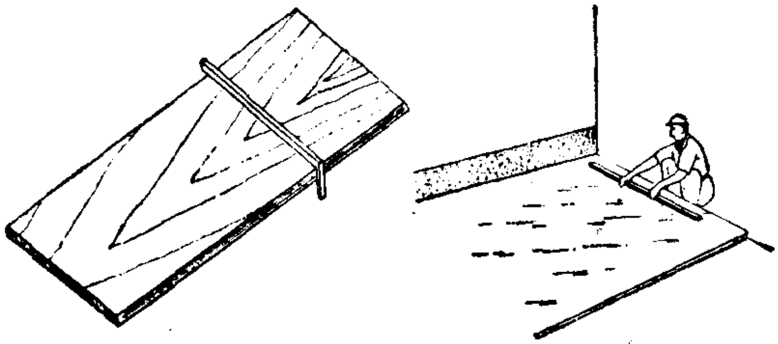


图 1-2

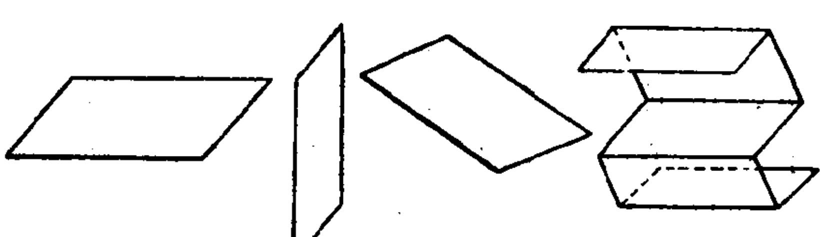
来回刮动，当直尺和水泥地面处处密切接触的话，说明这块地面就已经平了.（图 1-2）

我们生活中见到的一些平面虽然是有范围的，但是不能认为平面就是一个有范围的面. 由于直线是依附于平面的，而直线可以无限延伸，它是无限的，相应地，平面也可以无限扩展，它也是无限的.

那末如何来表示一个平面呢？由于人们所看到的平面图形中最常见的是矩形，而当我们在一个适当的位置上观察矩形的时候，似乎象个平行四边形. 因此，为了便于表达，常常把平面画成平行四边形的形状.

在图 1-3 中，(1) 表示一个水平位置的平面，(2) 表示一个直立位置的平面，(3) 表示一个倾斜状态的平面，(4) 表示五个平面成折叠的状态.

平面除了用平行四边形来表示外，也可以用三角形，用梯



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 1-3

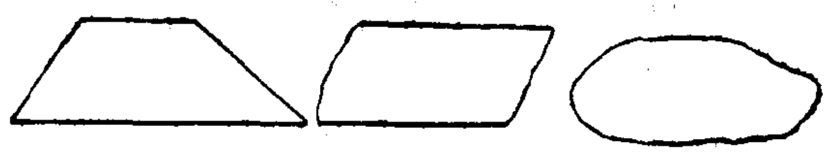
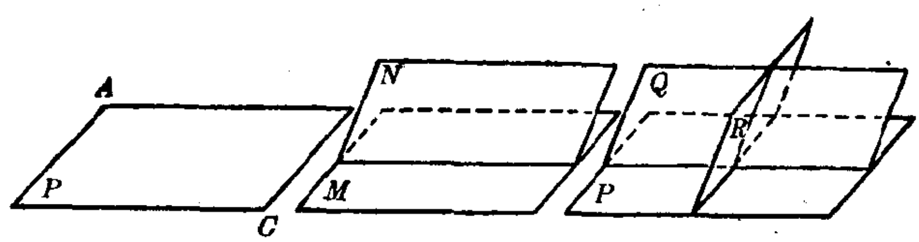


图 1-4

形，用不规则的图形来表示.（图 1-4）

表示一个平面的方法，通常用一个写在平行四边形内部角顶处的大写字母来表示，也可以用写在平行四边形相对两个角顶外的大写字母来表示，如图 1-5(1) 中的平面写作平面 P，也可以写作平面 AC.



(1)　　(2)　　(3)

图 1-5

如果有几个平面相交在一起时，应当用不同的字母分别表示它们，并且用虚线表示被遮住的部分. 图 1-5 (2)、(3) 分别表示平面 M 和平面 N 相交的情形和三个平面 P、Q、R 两两相交的情形.

2. 平面的三条公理

研究空间图形的性质，和研究平面图形的性质一样，也是依据一些公理作为推理的基础，然后由公理和定义推导出新的定理，再由公理和新的定理推导出其他一些定理. 这里，作为逻辑推理的基础就是平面的三条公理.

公理 1 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那末这条直线上所有的点都在这个平面内.

这时，我们说这条直线完全在这个平面内，或者说这个平面通过这条直线.

公理 1 主要说明的是直线和平面的相互位置关系中的直线在平面内的情况. 它告诉我们要判定一条直线是否在一个平面内，或者说要判定平面是否过一条直线的方法，不需要也不可能逐一去检查直线上的所有点是否在这个平面内，而只需要确定直线上的任意两点是否在平面内，如果是的，那末整个直线就全部在平面内.

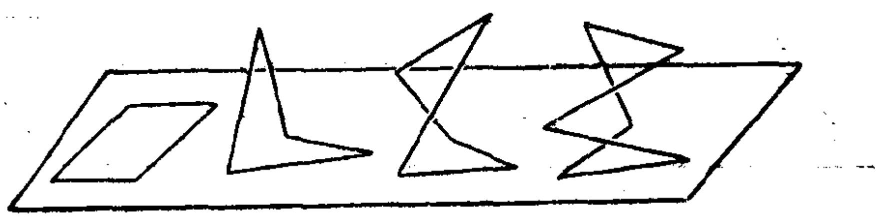


图 1-6

我们常常需要用公理 1 来判断一个多边形是平面多边形还是空间多边形. 所谓空间多边形是指这个多边形的各个顶点不完全在同一平面内，象空间四边形、空间六边形等.（图 1-6）

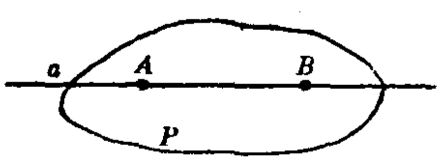


图 1-7

平面可以无限扩展，直线无论引伸到哪里，平面始终可以同时扩展到那里，这样，“直线在平面内”就不应该画成图 1-7 所示的直线有一部分露在平面外的图形.

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那末它们相交于过这点的一条直线.

这时，我们说这两个平面相交，这条直线叫做这两个平面

的交线.

我们经常要用公理 2 来确定平面与平面的交线，以及确定一个平面截一个多面体所得截面的形状等.

应当指出，两个平面交于一点，就交于过这点的一条直线；两个平面有两个公共点，就交于过这两点的一条直线. 因此，把有公共点的两个平面画成图 1-8 及图 1-9 所示的图形是不正确的.

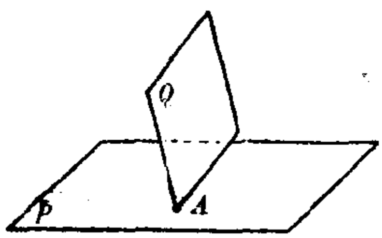


图 1-8

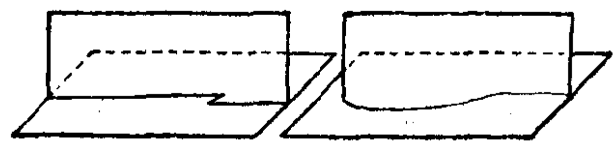


图 1-9

公理 3 不在一直线上的三点确定一个平面.

所谓确定一个平面，指的是两层意思，其一是说过不在一直线上的三点可以作一个平面(即存在一个平面)，其二是指这样的平面只可以作一个. 因此，公理 3 的内容，就是说，经过不在一直线上的任意三点可以作一个平面，并且只可以作一个平面.

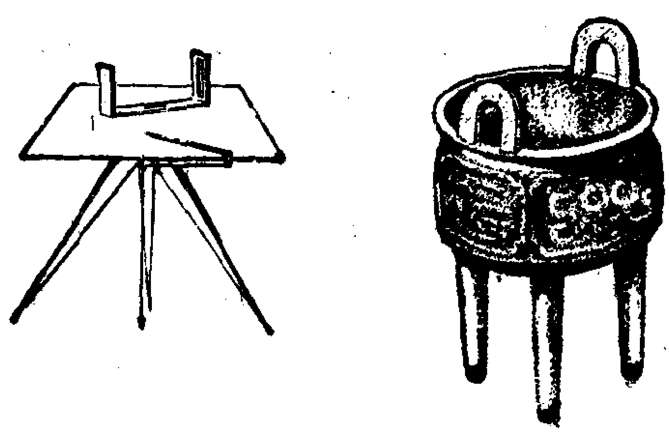


图 1-10

这条公理说明了经过一点，就不可能确定平面的位置；经过两点，同样也不可能确定平面的位置；经过在一直线上的三点，与经过两点一样，也不可能确定平面的位置.

公理3的实际应用是很广的，如小平板仪的撑脚架、商代铜鼎等(图1-10)，都做成三个脚，三个脚与地面接触的一端，就相当于不在一条直线上的三个点，可以确定一个平面，因此，无论地面如何不平，这些物体还是可以放置得很平稳.

3. 确定平面的几条定理

由上面所述的三条公理，我们可以用逻辑推理的方法，推导出下面三条确定一个平面的定理.

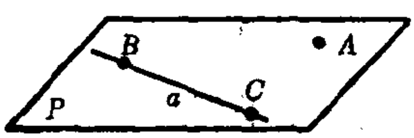


图 1-11

定理1 一条直线和这条直线外的一点可以确定一个平面.

已知：直线 a 和直线 a 外的一点 A.（图1-11）

求证：直线 a 和点 A 可以确定一个平面.

证明 在直线 a 上任取两点 B 和 C.

$\because$ A、B、C 三点不在一直线上，

$\therefore$ A、B、C 确定一个平面 P.（公理3）

$\because$ B、C 两点在平面 P 内，

$\therefore$ 直线 a 上所有的点都在平面 P 内.（公理1）

如果过直线 a 和它外面的一点 A 还可以作另一个平面 Q，那末点 A、B、C 又都在平面 Q 内，这样，过不在一直线上的三个点可以确定平面 P 和平面 Q，这与公理3相矛盾，所以，平面 P 和平面 Q 重合.

因此，过直线及它外面的一点可以作一个也只能作一个

平面.

定理 2 两条相交直线可以确定一个平面.

已知：直线 a 和直线 b 相交于 O.（图 1-12）

求证：直线 a 和 b 确定一个平面.

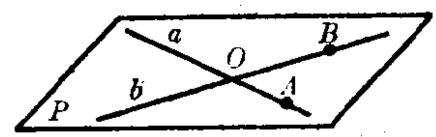


图 1-12

证明 在直线 a 上，在点 O 外任取一点 A，在直线 b 上，在点 O 外任取一点 B.

$\because$ 点 A、B、O 不在一直线上，

$\therefore$ A、B、O 三点确定一个平面 P.（公理 3）

$\because$ 直线 a、b 上分别有两点在平面 P 内，

$\therefore$ 直线 a、b 都在平面 P 内.（公理 2）

如果过直线 a 和 b 还可以作另一个平面 Q，那末，点 A、B、O 又都在平面 Q 内，这与公理 3 相矛盾，所以平面 P 和平面 Q 重合.

因此，过两条相交直线可以作一个也只能作一个平面.

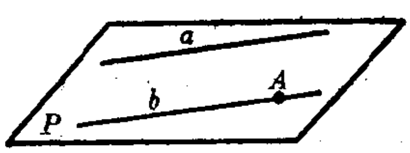


图 1-13

定理 3 两条平行直线可以确定一个平面.

已知：直线 a 和直线 b 平行.（图 1-13）

求证：a、b 确定一个平面.

证明 $\because$ $a /\!/ b$.

根据平行线的定义可以知道，直线 a 和直线 b 在同一平面内.

$\therefore$ 过 a、b 可以作一个平面 P.

如果过直线 a 和 b 还可以作一个平面 Q，那末平面 P 和平面 Q 都要经过直线 a 及直线 b 上的任意一点 A（或者经

过直线 b 及直线 a 上的任意一点 B)，这与定理1相矛盾. 所以，平面 P 和平面 Q 重合.

因此，过两平行直线可以作一个也只能作一个平面.

上述平面确定的三条定理，在生产和生活实际中应用是十分广的. 例如，要起吊重物时，常常把吊装绳放成图 1-14 所示的几种位置，这样起吊就平稳.

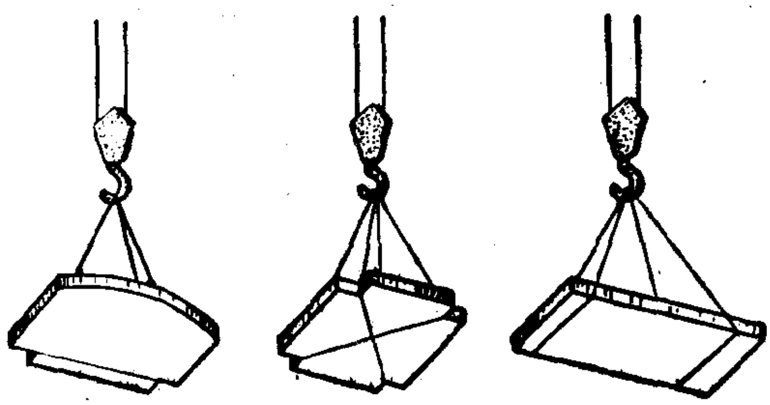


图 1-14

下面我们应用上述三条公理及确定平面的三条定理举一些例题.

[例 1] 空间任意四点❶可以确定几个平面.

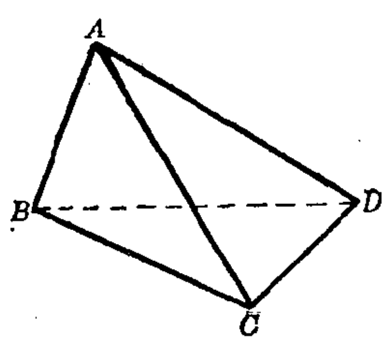


图 1-15

解 设空间任意四点为 A、B、C、D. 任取其中三点可以确定一个平面，这样就可确定如图 1-15 所示四个平面，即平面 ABC，平面 ACD，平面 ABD 及平面 BCD.

本题如果换成空间有任意五点并且其中无四点在同一平面内，问共可确定几个平面.

❶ 空间任意四点，一般是指这四点不在一个平面内的，通常作为约定，以后不再说明.

解 设空间任意五点为 A、B、C、D、E.

任取其中三点可以确定一个平面. 这样有平面:

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE 及 CDE 共十个. (图 1-16)

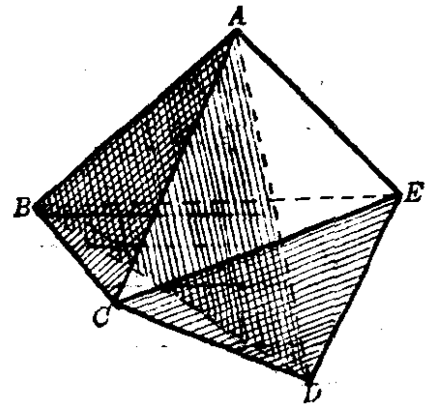


图 1-16

一般地说, 如果空间有 n 个点($n\geqslant3$ 的正整数), 且其中没有四点或者多于四点在同一平面内, 问可确定多少个平面, 可以这样考虑:

不在一直线上的三点确定一个平面, 那末 n 点中可以确定的平面数, 相当于从 n 点中任选三点的组合数, 由组合公式得

$$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}$$

共有这许多面. 例如从空间 100 个点(其中没有四点在同一平面内)就可确定平面

$$C_{100}^3=\frac{100\cdot99\cdot98}{1\cdot2\cdot3}=161700(个).$$

[例 2] 直线 l 和过点 S 的几条直线 m、n、p、q 都相交, 求证这些直线都在同一个平面内.

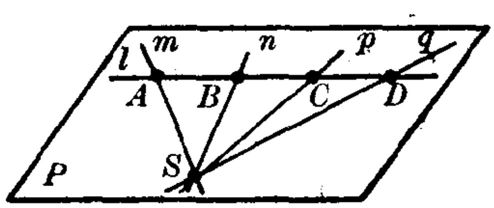


图 1-17

证明 如图 1-17, 直线 l 和过点 S 的直线 m、n、p、q 交于 A、B、C、D, 过相交两直线 m、q 作一个平面 P.

$\because$ 点 A、D 在直线 m、q 上,

∴ 过点 A、D 的直线 l 在平面 P 内.

同理 B、S, C、S 在平面 P 内,

∴ 过点 B、S 及点 C、S 的直线 n、p 在平面 P 内,

∴ 直线 l、m、n、p、q 在同一平面 P 内.

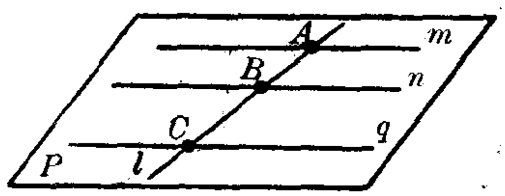


图 1-18

上题如果换成直线 l 和几条平行线 m、n、q 相交于 A、B、C, 求证直线 l、m、n、q 在同一平面内的命题时, 可这样证: (图 1-18)

证明 过两平行线 m、q 作一个平面 P.

∵ 直线 l 上有两点 A、C 在平面 P 内,

∴ 直线 l 在平面 P 内.

∵ 点 B 在直线 l 上,

∴ 点 B 在平面 P 内.

∵ 直线 $n \parallel$ 直线 q,

∴ 直线 n 和直线 q 确定一个平面设为 Q.

∵ 平面 P 和平面 Q 公有直线 q 及 q 外一点 B,

∴ 平面 P 和平面 Q 重合,

∴ 直线 n 在平面 P 内.

所以直线 l、m、n、q 在同一平面 P 内.

[例 3] 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 在它的顶上、棱上或者面上有不在一直线上的三个已知点, 试根据平面的基本性质, 确定截面❶的形状, 并作出图形.

(1) 三个已知点为 (i) A_1、B、C_1, (ii) A_1B_1、B_1C_1 的两个中点 M、N 及顶点 B.

(2) 三个已知点为 (i) AB、BC 的中点 E、F 及 D_1, (ii)

❶ 一个平面和几何体的各个面相交, 交线所围成的平面图形称为截面.

AB、BC 的中点 E、F，及 DD_1 的中点 G.

解 (1)(i)如图 1-19，截面与上底面公有点 A_1、C_1，所以截面与上底面交于 A_1C_1，同理截面与正面及右侧面交于 A_1B 及 BC_1，

因为 $$A_1C_1 = A_1B = BC_1 = 棱长 \times \sqrt{2},$$

所以截面是正三角形 A_1BC_1.

(ii) 同上，截面是等腰三角形 BMN.

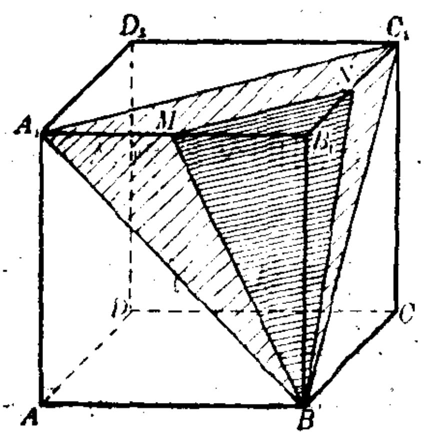


图 1-19

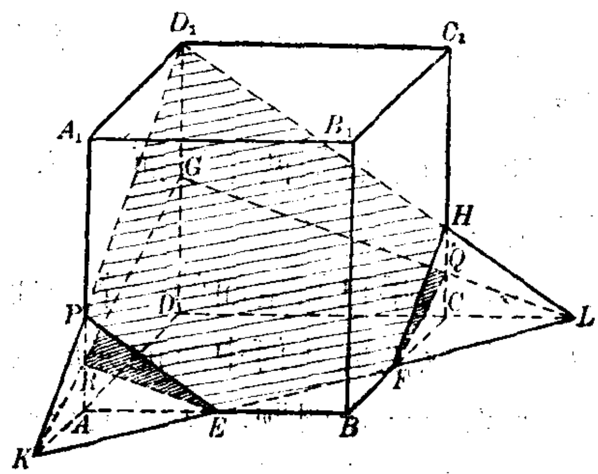


图 1-20

(2) (i)如图1-20，截面与正方体的底面公有 E、F 两点，所以截面与下底面公有过 EF 两点的直线，设这条直线(又称迹线)与 DA、DC 的延长线分别交于 K、L 两点.

∵ 点 K 和 D_1 都在左侧面 A_1D 内，且 D_1K 和 A_1A 不平行，它们必相交于一点设为 P.

同理 D_1L 和 C_1C 必相交于一点设为 H.

连结 D_1P, PE, EF, FH, D_1H,

则五边形 D_1PEFH 是所求过 D_1、E、F 三点的截面.

(ii) 同上，过 E、F、G 的截面是五边形 $GREFQ$.

根据平面的三条公理及确定平面的三条定理，我们来研

究空间作图问题.

所谓空间作图是指按照一定的条件,根据作图的公法(公认为最基本的作图方法),把作图过程按逻辑的层次表达出来的问题.

立体几何中,对于空间作图,规定有下面三条作图公法:(有的书上称为规定)

(1) 如果一个平面符合平面确定的条件,那末这个平面就认为可以作出的.

(这里,确定平面的条件主要是公理3及确定平面的三条定理.)

(2) 如果已知两个平面相交,那末它们的交线就认为可以作出的.

(3) 如果已知空间的一个平面,那末就认为可以在这个平面内完成平面几何中所能完成的一切作图.

所谓空间作图题,实际上是有限次的运用三种空间基本作图.它们不外乎是:

(1) 过不在一直线上的三个点作一个平面.

(2) 作出已知两个相交平面的交线.

(3) 在一个已知平面内,用圆规、直尺等作图工具作出平面图形.

空间作图和平面作图有十分明显的不同. 平面作图,图形上的点都在一个平面内,这就可以利用圆规和直尺等作图工具正确进行作图,对于空间作图,我们不能在空间利用圆规、直尺在空间进行作图,只能用合乎逻辑的论理来阐明作图的步骤,归结为有限个数的基本作图问题.

这里还需指出,空间作图往往必须先作一个平面,然后在这个平面内进行平面几何的作图.

例如，图 1-21 所示的是在一个水平放置的平面 P 内完成的下面一些作图：(1)过已知点 A 作直线 $a /\!/$ 已知直线 b；(2)过已知点 M 作已知直线 a 的垂线 c；(3)过已知点 M 作一直线和已知直线 a 相交，并与已知直线 a 所成的角等于 60°；(4) 已知直角三角形 ABC，自直角顶点 C 向斜边引垂线 CD.

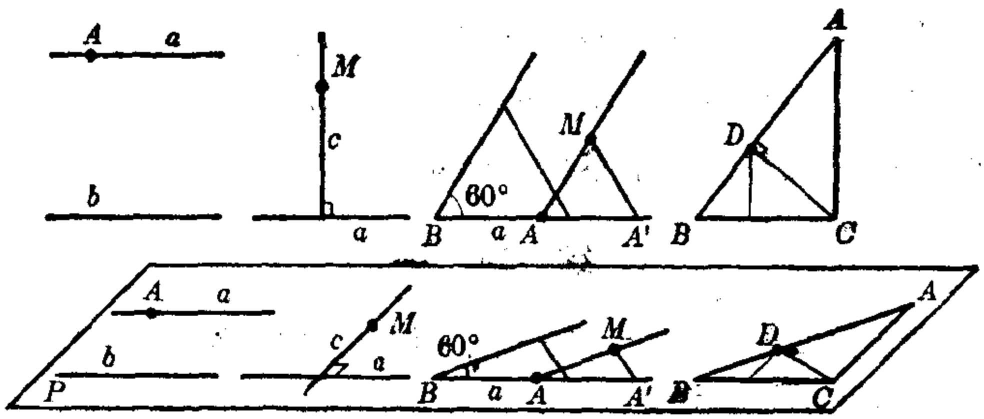


图 1-21

这八个图中，上面的四个图都是平面几何的作图问题，下面四个图表示上述四个作图的空间作图，它们都是首先确定一个平面 P，然后在这个平面 P 内，进行平面几何的作图.

[例 4]　过不在同一平面内的两条直线外的一点，作一直线，使和这两条直线都相交.

已知：不在同一平面内的两条直线 a 和 b，点 C 在直线 a、b 之外.(图 1-22)

求作：过点 C 的直线使和 a、b 相都交.

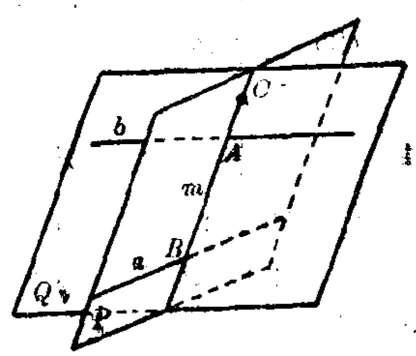


图 1-22

作法

1．过直线 a 和点 C 可以作一个平面 P.

2．过直线 b 和点 C 可以作一个平面 Q.