

高等学校交流讲义

內燃機動力学

林大渊編

只限学校内部使用



中国工业出版社

本书是根据天津大学内燃机教研室所用“内燃机动力学”讲义改编而成的。内容包括：内燃机曲柄连杆机构的运动学；单缸与多缸发动机的平衡分析；曲轴系统扭转振动的计算以及测量与消减方法等。

本书可作为高等工业学校一般类型（不設专门化的）内燃机专业的交流讲义，也可供从事内燃机方面工作的工程技术人员参考。

內 燃 机 动 力 学

林 大 淵 編

*

中国工业出版社出版（北京佟麟阁路10号）

（北京市书刊出版事业许可证出字第110号）

崇 文 印 刷 厂 印 刷

新华书店科技发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092 $\frac{1}{16}$ ·印张 11 $\frac{3}{4}$ ·字数 262,000

1961年10月北京第一版·1961年10月北京第一次印刷

印数 0001—2,537·定价（10—6）1.40元

统一书号 15165·756（一机—148）

序 言

本书系今年三月召开的內燃机专业教材會議上推荐的交流讲义，它适用于高等工业学校一般类型（不分专门化的）的內燃机专业采用作为“內燃机設計”課程內燃机动力学部分的教材。

本书系在天津大学內燃机教研室林大渊同志所編写讲义的基础上，根据参加會議代表們的意見加以整理而成。其中第七章“曲軸系統扭轉振动的消滅”則由饒寿人同志进行了改編。附录中的例題是五年級部分学生計算的。

由于出版前改編和整理的时间倉促，其中錯誤与缺点之处在所难免，尚希讀者指正，并将有关意見寄天津大学內燃机教研室是幸。

天津大学內燃机教研室

一九六一年五月

凡 例

r ——曲柄半径, 毫米
 l ——連杆长度, 毫米
 s ——活塞的冲程, 毫米
 x ——活塞的位移, 毫米
 $\dot{x}$ ——活塞的速度, 米/秒
 $\ddot{x}$ ——活塞的加速度, 米/秒²
 n ——曲軸的轉速, 轉/分
 ω ——曲柄旋轉的角速度, 弧度/秒
 λ ——曲柄半径与連杆长度的比值, $\lambda = \frac{r}{l}$
 α ——曲柄轉角, 弧度
 β ——連杆摆角, 弧度
 x_f ——副連杆活塞的位移, 毫米
 $\dot{x}_f$ ——副連杆活塞的速度, 米/秒
 $\ddot{x}_f$ ——副連杆活塞的加速度, 米/秒²
 s_f ——副連杆活塞的冲程, 毫米
 l_f ——副連杆的长度, 毫米
 β_f ——副連杆的摆角, 弧度
 m_A ——活塞組的质量, $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$
 m_j ——曲柄連杆机构作往复运动部分机件的质量, $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$
 m_B ——曲拐的不平衡部分质量, $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$
 m_r ——曲柄連杆机构的旋轉运动不平衡质量, $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$

θ ——轉动慣量, 公斤·厘米·秒²
 P_j ——往复慣性力, 公斤
 P_r ——旋轉运动的离心慣性力, 公斤
 P_N ——气缸的側向压力, 公斤
 P_t ——沿着連杆中心綫的作用力, 公斤
 T ——曲柄上的切向力, 公斤
 Z ——曲柄上的径向力, 公斤
 M ——曲軸的轉矩, 公斤·米
 $M_{\text{反}}$ ——发动机的反轉矩, 公斤·米
 γ_i ——点火間角, 度(弧度)
 γ_K ——曲柄夹角, 度(弧度)
 γ_Z ——气缸軸角, 度(弧度)
 M_r ——旋轉运动的离心慣性力矩, 公斤·米
 M_j ——往复慣性力矩, 公斤·米
 e ——柔度, $\frac{1}{\text{公斤} \cdot \text{厘米}}$
 c ——刚度, 公斤·厘米
 ω_c ——自振角頻率, 弧度/秒
 ω_c ——自振頻率, 次/秒
 ψ ——絕對角位移, 弧度
 φ ——相对角位移
 A ——絕對振幅, 弧度
 a ——相对振幅
 δ ——彈性力矩, 公斤·米
 H ——质量穩度, 公斤·米
 Δ_c ——无因次自振角頻率
 Ω ——强迫振动的角頻率, 弧度/秒
 $H^{(1)}$ ——系統穩度, 公斤·米

目 次

序 言	3
凡 例	4
緒 論	6
第一章 曲柄連杆机构运动学	7
1 中心曲柄連杆机构运动学	7
2 偏心曲柄連杆机构运动学	19
3 复式連杆机构运动学	21
第二章 曲柄連杆机构动力学	29
1 曲柄連杆机构运动部分的质量	29
2 曲柄連杆机构运动的慣性力	32
3 作用在曲柄連杆机构上的力与力矩	33
4 曲柄銷和主軸頸的負荷	35
5 連杆軸承与主軸承負荷图	41
第三章 发动机的平衡分析	43
1 单缸发动机的平衡分析及其平衡装置	43
2 直列多缸发动机的平衡分析	46
3 V型两列多缸发动机的平衡分析	59
4 发动机平衡分析及平衡装置的实际价值	67
第四章 振动的基本概念	68

1 振动的定义	68
2 系統的自由振动及其特性参数	68
3 强迫振动与共振	92
第五章 曲軸系統扭轉振动的	97
1 曲軸系統扭轉振动特性参数的計算	97
2 曲軸系統的自由扭轉振动	112
3 曲軸系統扭轉振动的干扰力矩	119
4 曲軸系統的强迫振动与临界轉速	127
5 曲軸系統由于扭轉振动引起的应力的确定	137
第六章 曲軸系統扭轉振动的測量	140
1 測振的理論基础	140
2 測振仪举例	141
3 測振記錄的处理	143
第七章 曲軸系統扭轉振动的消滅	145
1 扭轉振动消滅的措施	145
2 振动消滅器的理論基础	146
3 振动消滅器的构造	150
附录: 1. 发动机动力計算例題	154
2. 扭轉振动計算例題	176
参考文献	188

高等学校交流讲义



内 燃 机 动 力 学

林大渊 编

中国工业出版社

本书是根据天津大学内燃机教研室所用“内燃机动力学”讲义改编而成的。内容包括：内燃机曲柄连杆机构的运动学；单缸与多缸发动机的平衡分析；曲轴系统扭转振动的计算以及测量与消减方法等。

本书可作为高等工业学校一般类型（不設专门化的）内燃机专业的交流讲义，也可供从事内燃机方面工作的工程技术人员参考。

內 燃 机 动 力 学

林 大 淵 編

*

中国工业出版社出版（北京佟麟阁路10号）

（北京市書刊出版事业許可証出字第110号）

崇 文 印 刷 厂 印 刷

新华書店科技发行所发行 • 各地新华書店經售

*

开本 787×1092 $\frac{1}{16}$ • 印张 11 $\frac{3}{4}$ • 字数 262,000

1961年10月北京第一版 • 1961年10月北京第一次印刷

印数 0001—2,537 • 定价（10—6）1.40元

統一書号 15165·756 （一机—148）

序 言

本书系今年三月召开的內燃机专业教材會議上推荐的交流讲义，它适用于高等工业学校一般类型（不分专门化的）的內燃机专业采用作为“內燃机設計”課程內燃机动力学部分的教材。

本书系在天津大学內燃机教研室林大渊同志所編写讲义的基础上，根据参加會議代表們的意見加以整理而成。其中第七章“曲軸系統扭轉振动的消滅”則由饒寿人同志进行了改編。附录中的例題是五年級部分学生計算的。

由于出版前改編和整理的时间倉促，其中錯誤与缺点之处在所难免，尚希讀者指正，并将有关意見寄天津大学內燃机教研室是幸。

天津大学內燃机教研室

一九六一年五月

凡 例

r ——曲柄半径, 毫米
 l ——連杆长度, 毫米
 s ——活塞的冲程, 毫米
 x ——活塞的位移, 毫米
 $\dot{x}$ ——活塞的速度, 米/秒
 $\ddot{x}$ ——活塞的加速度, 米/秒²
 n ——曲軸的轉速, 轉/分
 ω ——曲柄旋轉的角速度, 弧度/秒
 λ ——曲柄半径与連杆长度的比值, $\lambda = \frac{r}{l}$
 α ——曲柄轉角, 弧度
 β ——連杆摆角, 弧度
 x_f ——副連杆活塞的位移, 毫米
 $\dot{x}_f$ ——副連杆活塞的速度, 米/秒
 $\ddot{x}_f$ ——副連杆活塞的加速度, 米/秒²
 s_f ——副連杆活塞的冲程, 毫米
 l_f ——副連杆的长度, 毫米
 β_f ——副連杆的摆角, 弧度
 m_A ——活塞組的质量, $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$
 m_j ——曲柄連杆机构作往复运动部分机件的质
量, $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$
 m_B ——曲拐的不平衡部分质量, $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$
 m_r ——曲柄連杆机构的旋轉运动不平衡质量,
 $\frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{米}}$

θ ——轉动慣量, 公斤·厘米·秒²
 P_j ——往复慣性力, 公斤
 P_r ——旋轉运动的离心慣性力, 公斤
 P_N ——气缸的側向压力, 公斤
 P_t ——沿著連杆中心綫的作用力, 公斤
 T ——曲柄上的切向力, 公斤
 Z ——曲柄上的径向力, 公斤
 M ——曲軸的轉矩, 公斤·米
 $M_{\text{反}}$ ——发动机的反轉矩, 公斤·米
 γ_i ——点火間角, 度(弧度)
 γ_K ——曲柄夹角, 度(弧度)
 γ_Z ——气缸軸角, 度(弧度)
 M_r ——旋轉运动的离心慣性力矩, 公斤·米
 M_j ——往复慣性力矩, 公斤·米
 e ——柔度, $\frac{1}{\text{公斤} \cdot \text{厘米}}$
 c ——刚度, 公斤·厘米
 ω_c ——自振角頻率, 弧度/秒
 ω_c ——自振頻率, 次/秒
 ψ ——絕對角位移, 弧度
 φ ——相对角位移
 A ——絕對振幅, 弧度
 a ——相对振幅
 δ ——弹性力矩, 公斤·米
 H ——质量穩度, 公斤·米
 Δ_c ——无因次自振角頻率
 Ω ——强迫振动的角頻率, 弧度/秒
 $H^{(1)}$ ——系統穩度, 公斤·米

目 次

序 言	3
凡 例	4
緒 論	6
第一章 曲柄連杆机构运动学	7
1 中心曲柄連杆机构运动学	7
2 偏心曲柄連杆机构运动学	19
3 复式連杆机构运动学	21
第二章 曲柄連杆机构动力学	29
1 曲柄連杆机构运动部分的质量	29
2 曲柄連杆机构运动的慣性力	32
3 作用在曲柄連杆机构上的力与力矩	33
4 曲柄銷和主軸頸的負荷	35
5 連杆軸承与主軸承負荷图	41
第三章 发动机的平衡分析	43
1 单缸发动机的平衡分析及其平衡装置	43
2 直列多缸发动机的平衡分析	46
3 V型两列多缸发动机的平衡分析	59
4 发动机平衡分析及平衡装置的实际价值	67
第四章 振动的基本概念	68

1 振动的定义	68
2 系統的自由振动及其特性参数	68
3 强迫振动与共振	92
第五章 曲軸系統扭轉振动的	97
1 曲軸系統扭轉振动特性参数的計算	97
2 曲軸系統的自由扭轉振动	112
3 曲軸系統扭轉振动的干扰力矩	119
4 曲軸系統的强迫振动与临界轉速	127
5 曲軸系統由于扭轉振动引起的应力的确定	137
第六章 曲軸系統扭轉振动的測量	140
1 測振的理論基础	140
2 測振仪举例	141
3 測振記錄的处理	143
第七章 曲軸系統扭轉振动的消滅	145
1 扭轉振动消滅的措施	145
2 振动消滅器的理論基础	146
3 振动消滅器的构造	150
附录: 1. 发动机动力計算例題	154
2. 扭轉振动計算例題	176
参考文献	188

緒 論

內燃機動力學是力學的一個分支，它是分析研究內燃機工作過程中各主要零件的運動規律和它們受力的情況，以作為內燃機零件強度、剛度和磨損等問題計算的依據，並且還要研究這些力和力矩對內燃機動力裝置的影響，以及消除這些影響的方法。

隨著資產階級產業革命後生產的發展，十八世紀三十年代分析力學也開始有了較大的發展。當時，法國學者潘舍利(Poncelet)在其所著“機器力學”一書中，已經對曲柄連杆機構的動力現象作了基本的分析。但是，由於當時低速蒸汽機的曲柄連杆機構運動慣性力的影響並不突出，所以也沒有得到進一步的發展。

十九世紀，由於蒸汽機的不斷發展，更重要的還是由於內燃機的出現，以及它的迅速發展和在生產實際中的廣泛應用，這時它們轉速的提高，已經使曲柄連杆機構運動的慣性力達到不可忽視的程度。這才促使人們重視研究與發展“內燃機動力學”這門科學。

二十世紀初葉，內燃機曲軸系統的疲勞破壞事故日益增多，又促使人們致力於曲軸系統扭轉振動問題的研究。

十月革命以後，許多蘇聯學者，如馬爾金斯(П.К.Мартенс)、李伏夫(Е.Д.Львов)、茹多米斯基(И.Ш.Житомирский)、涅依曼(И.Ш.Нейман)、捷爾斯基(В.П.Терский)等人，對內燃機動力學的發展作出了巨大的貢獻，並且創立了嚴整的學說。

近百年來，我國遭受着帝國主義的侵略和掠奪，加以封建、軍閥和國民黨的反動統治，經濟的貧困也反映到科學的貧困，偌大的國土上幾乎沒有自己的內燃機製造工業，內燃機科學也得不到重視，更不可能有所發展。

解放以來，我國工業建設一日千里，黨對內燃機工業的發展，十分重視，十餘年來，我國內燃機製造工業，已經有了巨大的發展。尤其是一九五八年大躍進以來，發展得更快，我國內燃機工業的發展，已經向我們內燃機工作者提出這樣的要求：必須迅速掌握、研究 and 發展內燃機科學。因此，內燃機動力學就成為內燃機專業學生所必須很好掌握的最基本的理論的一方面。

第一章 曲柄連杆机构运动学

1. 中心曲柄連杆机构运动学

研究曲柄連杆机构运动的主要任务是在于找出活塞运动的规律。

从结构形式来说曲柄連杆机构可分为中心曲柄連杆机构，偏心曲柄連杆机构，复式曲柄連杆机构等等；但是最广泛应用的还是中心曲柄連杆机构，所以我们将以中心曲柄連杆机构为主要的研究对象。

中心曲柄連杆机构的特点是它的气缸中心线通过曲轴的旋转中心。图1所示就是中心曲柄連杆机构的结构简图。图中O点为曲轴的旋转中心，B点为曲柄销的中心，A点是活塞销的中心。从曲轴旋转轴线中心到曲柄销中心的距离OB为曲柄半径，用r表示。从曲柄销中心到活塞销中心的距离AB为連杆长度，用l表示。r与l是中心曲柄連杆机构结构的主要参数。取r与l的比值为 λ ， λ 用来表示这两个参数的相对关系，即 $\lambda = \frac{r}{l}$ 。现代内燃机的 λ 值在 $\frac{1}{3} \sim \frac{1}{5}$ 的范围内。

由于现代发动机曲柄旋转角速度变化不大，所以我们在研究曲柄連杆机构运动时，是把曲柄运动看作为等角速度旋转的。也就是当转速是n转/分时，曲柄旋转的角速度为 $\omega = \frac{n\pi}{30}$ 弧度/秒。曲柄的瞬时位置是以曲柄与气缸中心线的夹角 α 来表示的。当 $\alpha = 0^\circ$ 时，曲柄与气缸中心线重叠，曲柄销中心B正处在B'点，活塞销中心A处在A'点，这时活塞的位置是在上死点。当 $\alpha = 180^\circ$ 时，曲柄再次与气缸中心线重叠，曲柄销中心B正处在B''点，活塞销中心A处在A''点，这时活塞在下死点位置。活塞由上死点到下死点的移动距离称为活塞的冲程，用符号S表示，在中心曲柄連杆机构中，活塞的冲程等于曲柄半径的二倍，即 $S = 2r$ 。曲柄转角 α 是曲柄連杆机构运动的主要参数；所有的其他参数都可以用曲柄转角 α 的函数来表示。連杆的位置用連杆中心线与气缸中心线的夹角 β 来表示；通常称 β 为連杆摆角。

我们规定：曲轴在按时针方向旋转时取符号为正号；与此相对应，这时的曲柄转角 α 也算作正值，連杆的摆动则当按逆时针方向转动时算作正角，而活塞的运动是当向着曲轴的旋转中心方向时取作正值。

1. 活塞的位移 当曲柄转过 α 角时，活塞的相应位移为x，x与 α 的关系 $x = f_1(\alpha)$ 可以由图1的几何关系中找出：

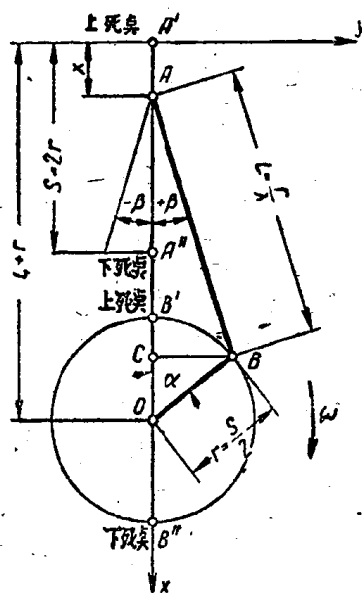


图1 中心曲柄連杆机构简图

$$x = \overline{AA'} = \overline{A'O} - \overline{AO} = r + l - \overline{AO}。$$

由三角形 ABO 得知

$$\overline{AO} = \overline{OC} + \overline{CA} = r \cos \alpha + l \cos \beta，$$

所以

$$\begin{aligned} x &= l + r - r \cos \alpha - l \cos \beta \\ &= r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta) \\ &= r \left[(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{\lambda}(1 - \cos \beta) \right]。 \end{aligned} \quad (1)$$

上式中的 β 可以用 α 的函数来表示，在三角形 ABO 中由于

$$l \sin \beta = r \sin \alpha，$$

所以

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha = \lambda \sin \alpha。 \quad (2)$$

对于不同的 λ 值，与 α 相对应的 β 值如表 1 所示。

表 1 在不同的 λ 值时，与 α 相对应的 β 值

$\frac{1}{\lambda}$ α°	符号	3.3	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	符号	$\frac{1}{\lambda}$ α°
0	+	0	0	0	0	0	0	-	360
10	+	3°07'	2°56'	2°46'	2°37'	2°29'	2°22'	-	350
20	+	6°08'	5°46'	5°27'	5°10'	4°54'	4°40'	-	340
30	+	8°59'	8°27'	7°59'	7°34'	7°11'	6°50'	-	330
40	+	11°35'	10°54'	10°17'	9°44'	9°15'	8°48'	-	320
50	+	13°51'	13°01'	12°17'	11°33'	11°02'	10°31'	-	310
60	+	15°42'	14°45'	13°55'	13°10'	12°30'	11°54'	-	300
70	+	17°05'	16°50'	15°53'	15°01'	14°15'	13°34'	-	290
80	+	17°55'	16°50'	15°53'	15°01'	14°15'	13°34'	-	280
90	+	18°13'	17°06'	16°06'	15°15'	14°29'	13°47'	-	270
100	+	17°55'	16°50'	15°53'	15°01'	14°15'	13°34'	-	260
110	+	17°05'	16°03'	15°08'	14°15'	13°35'	12°56'	-	250
120	+	15°42'	14°45'	13°55'	13°10'	12°30'	11°54'	-	240
130	+	13°51'	13°01'	12°17'	11°38'	11°02'	10°31'	-	230
140	+	11°35'	10°54'	10°17'	9°44'	9°15'	8°48'	-	220
150	+	8°59'	8°27'	7°59'	7°34'	7°11'	6°50'	-	210
160	+	6°08'	5°46'	5°27'	5°10'	4°54'	4°40'	-	200
170	+	3°07'	2°56'	2°46'	2°37'	2°29'	2°22'	-	190
180	+	0	0	0	0	0	0	-	180
α° λ	符号	0.313	0.295	0.278	0.263	0.250	0.238	符号	α° λ

由三角函数的基本关系中得知：

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}。$$

将 (2) 式代入得出： $\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} = (1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}。$

上式按牛頓二項式定理展开, 可写成:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \alpha + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2!} \lambda^4 \sin^4 \alpha - \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right)}{3!} \lambda^6 \sin^6 \alpha + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2 \times 4} \lambda^4 \sin^4 \alpha - \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} \lambda^6 \sin^6 \alpha + \dots\end{aligned}$$

利用下列三角函数的关系式:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha), \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha), \\ \sin^3 \alpha &= \frac{1}{4} (\sin 3\alpha + 3\sin \alpha), \\ \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4} (\cos 3\alpha + 3\cos \alpha), \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

可以使上式改用倍角函数来表示:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{3}{64} \lambda^4 - \frac{5}{256} \lambda^6 + \frac{175}{1282} \lambda^8 + \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda^4 + \frac{15}{512} \lambda^6 + \frac{35}{2048} \lambda^8 + \dots \right) \cos 2\alpha \\ &\quad - \left(\frac{1}{61} \lambda^4 + \frac{3}{256} \lambda^6 + \frac{35}{4096} \lambda^8 + \dots \right) \cos 4\alpha \\ &\quad + \left(\frac{1}{512} \lambda^6 + \frac{5}{2048} \lambda^8 + \dots \right) \cos 6\alpha \\ &\quad - \left(\frac{5}{1282} \lambda^8 + \dots \right) \cos 8\alpha + \dots\end{aligned} \quad (3)$$

将上式代入公式(1)即得:

$$\begin{aligned}x &= r [(1 + A) - (A_0 \cos \alpha + A_2 \cos 2\alpha - A_4 \cos 4\alpha + A_6 \cos 6\alpha - A_8 \cos 8\alpha + \dots)] \\ &= r \{ [1 + A] - [A_0 \cos \alpha + \sum_{n \neq 0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{2n} \cos 2n\alpha] \}.\end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{式中 } A = \frac{1}{4} \lambda + \frac{3}{64} \lambda^3 + \frac{5}{256} \lambda^5 + \frac{175}{1282} \lambda^7 + \dots,$$

$$A_0 = 1,$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{16} \lambda^3 + \frac{15}{512} \lambda^5 + \frac{35}{2048} \lambda^7 + \dots,$$

$$A_4 = \frac{1}{64} \lambda^3 + \frac{3}{256} \lambda^5 + \frac{35}{4096} \lambda^7 + \dots,$$

$$A_6 = \frac{1}{512} \lambda^5 + \frac{5}{2048} \lambda^7 + \dots,$$

$$A_8 = \frac{5}{1282} \lambda^7 + \dots.$$

在不同的 λ 值时, 各項 A 的值如表 2 所示:

表 2 在不同的 λ 值时, 活塞的位移的方程中各項系数 A 的值

λ A	1/3.4	1/3.6	1/3.8	1/4.0	1/4.2	1/4.4	1/4.6	1/4.8	1/5.0
A	0.0749	704	667	632	602	514	542	520	504
A ₂	0.0753	708	670	635	604	576	544	521	505
A ₄	0.000424	355	301	256	220	200	167	146	130
A ₆	0.0000050	35	27	20	15	12	9	7	6
A ₈	0.00000058	37	27	19	14	10	7	5	4

注: 表中第二列以后各数值小数点以后的位数与第一列中的相同。

由此可見, 用来表达活塞位移的无穷級数是一个收斂得很快的級数, 所以我們完全可以忽略其高阶項, 而近似地认为:

$$x = r[(1 - \cos \alpha) + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)]。 \quad (4')$$

这就是通常应用的活塞位移公式。为着計算的方便, 我們取活塞的位移 x 与曲柄半径 r 的比值为活塞位移的无因次量:

$$\frac{x}{r} = (1 - \cos \alpha) + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)。 \quad (4'')$$

表 3 在不同的 λ 值时, 与 α 相对应的 $\frac{x}{r}$ 值

$\frac{1}{\lambda}$ α°	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	$\frac{1}{\lambda}$ α°
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	360
10	0.020	0.020	0.019	0.019	0.019	0.019	350
20	0.079	0.078	0.077	0.076	0.075	0.074	340
30	0.173	0.171	0.169	0.167	0.165	0.164	330
40	0.298	0.295	0.291	0.288	0.286	0.284	320
50	0.449	0.444	0.439	0.434	0.431	0.427	310
60	0.617	0.610	0.604	0.599	0.594	0.590	300
70	0.796	0.788	0.781	0.774	0.768	0.763	290
80	0.978	0.969	0.951	0.954	0.948	0.943	280
90	1.156	1.147	1.139	1.132	1.125	1.119	270
100	1.325	1.316	1.308	1.301	1.295	1.289	260
110	1.480	1.472	1.466	1.458	1.452	1.447	250
120	1.617	1.610	1.604	1.599	1.594	1.590	240
130	1.734	1.729	1.724	1.720	1.716	1.713	230
140	1.831	1.827	1.823	1.820	1.818	1.815	220
150	1.905	1.909	1.901	1.899	1.897	1.896	210
160	1.958	1.957	1.956	1.955	1.954	1.954	200
170	1.989	1.989	1.989	1.989	1.989	1.989	190
180	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	180
α° λ	0.312	0.296	0.278	0.263	0.250	0.238	α° λ

我們可以認為，方程式(4')中活塞位移是由二个簡諧函数所組成的。

即

$$x = x_I + x_{II} = \underbrace{r(1 - \cos \alpha)}_I + \underbrace{r \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)}_{II}.$$

这就使我們有可能用簡諧曲綫作图法作出 $x = f_1(\alpha)$ 的曲綫，如图2—a所示。但是在实际应用中，并不采用这种方法来作活塞的位移曲綫图，而是采用更为簡便的費·勃留克斯(Ф.Брикс)的活塞位移作图法。这种方法示于图3上首先以O点为圓心，以曲柄半径 r 为半径作一圓。自O点向死点方向偏移 $\frac{r\lambda}{2}$ 距离，得到O'点；自O'点作曲柄的平行綫 O'C，交曲柄圓圓周于C点；自C点对AO作投影，得到C'点。則AC'即为在此曲柄位置时活塞的位移。

現在讓我們来对这种作图法加以証明。

从图2中可見：

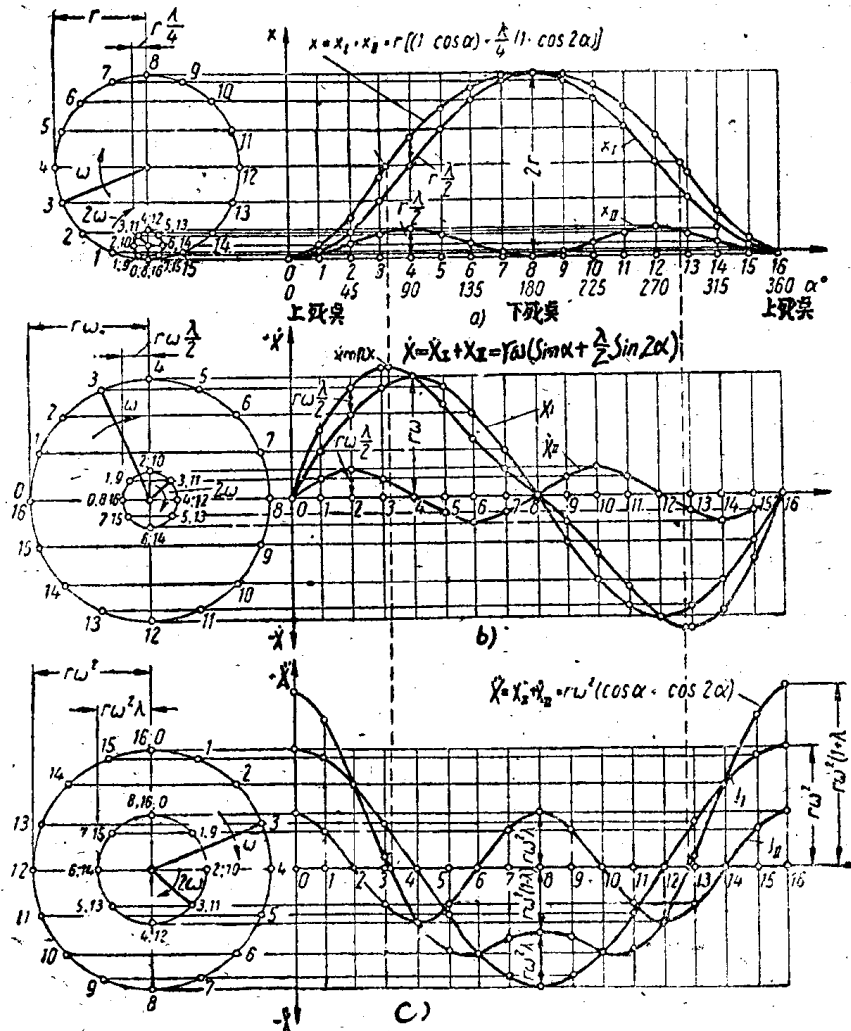


图2 活塞的位移、速度、加速度曲綫簡諧作图法

a. 活塞位移图；b. 活塞速度图；c. 活塞加速度图。

$$\begin{aligned}\overline{AC'} &= \overline{AB'} + \overline{B'C'} \\ &= \overline{AO} - \overline{OB'} + \overline{B'C'}.\end{aligned}$$

如果近似地把 $\widehat{BC}$ 看作为 $\overline{BC}$ 并且与 $\overline{O'C}$ 相垂直, 則有

$$\begin{aligned}\overline{AC'} &= (r - r\cos\alpha) + \overline{BC}\sin\alpha \\ &= r(1 - \cos\alpha) + \overline{OO'}\sin\alpha\sin\alpha \\ &= r(1 - \cos\alpha) + \frac{r\lambda}{2}\sin^2\alpha \\ &= r\left[(1 - \cos\alpha) + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)\right].\end{aligned}$$

与(4')式对照可知: $\overline{AC'}$ 即为活塞的位移 x 。

勃留克斯的活塞位移作图法曾假定: $\widehat{BC} = \overline{BC}$, 所以是不精确的, 但是实际上誤差并不大, 可以被作图誤差所掩盖。

2. 活塞运动的速度 将公式(4')所示的活塞位移对時間作一次微分, 就可以得到活塞的速度与曲柄轉角之間的关系式: $\dot{x} = f_2(\alpha)$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = r\omega(\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha). \quad (5)$$

精确地说: 与活塞的位移一样, 活塞的速度也是一个无穷級数, 公式(5)所表示的只是它的前两项而已。不过在实际計算中, 采用公式(5)已經足够精确了。为着計算方便起見, 我們取活塞的速度 $\dot{x}$ 与曲柄銷中心的切向速度 $r\omega$ 的比值: $\frac{\dot{x}}{r\omega}$ 作为活塞速度的无因次量。即

$$\frac{\dot{x}}{r\omega} = \sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha. \quad (5')$$

表4列出了在不同 λ 值时, 与 α 相对应的 $\frac{\dot{x}}{r\omega}$ 值。

公式(5)表明, 活塞的运动速度也可以看成是由曲柄轉角 α 的二个正弦函数所組成的, 即

$$\dot{x} = \dot{x}_I + \dot{x}_{II} = r\omega \sin\alpha + \frac{r\lambda}{2}\omega \sin 2\alpha. \quad (5'')$$

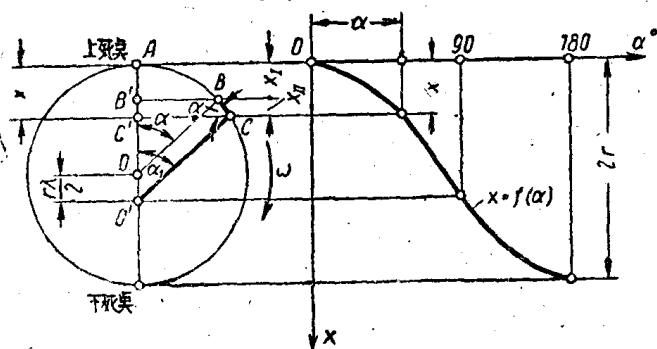


图3 弗·勃留克斯的活塞位移作图法

这样, 我們也可以用簡諧曲綫作图法分別作出这两条正弦曲綫, 而后再在同一坐标上代数相加, 就可以得到活塞速度依曲柄轉角变化的关系式 $\dot{x} = f_2(\alpha)$ 的曲綫; 如图2—b所示。

活塞运动的速度, 也可以通过連桿运动的瞬时中心用作图法求出。图4示出活塞速度的瞬时中心图解法, 連桿上B点的速度就是曲