

数学物理方法

严镇军 编著

中国科学技术大学出版社

数学物理方法

严镇军 编著

中国科学技术大学出版社

1999·合肥

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/严镇军编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,1999.1

ISBN 7-312-01033-4

I. 数…

II. 严…

III. 数学物理方法

IV. O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 33409 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本: 850×1168/32 印张: 12.875 字数: 335 千

1999 年 1 月第 1 版 1999 年 1 月第 1 次印刷

印数: 1—3000 册

ISBN 7-312-01033-4/O · 210 定价: 13.00 元

内 容 简 介

本书是作者在中国科学技术大学近四十年的教学实践中编写的,其内容分复变函数和数学物理方程两部分.复变函数部分内容包括复数和平面点集、复变数函数、解析函数的积分表示、解析函数的级数表示、留数及其应用、保形变换、拉普拉斯变换等7章.数学物理方程部分内容包括数学物理中的偏微分方程、分离变量法、特殊函数、积分变换方法、基本解和解的积分表示等5章.各章都配备了较多的习题,书末附有全部习题的答案.

本书在注重科学性与严密性的同时,又注意了它的使用性,具有由浅入深、便于学生自学等特点,可供高等院校“偏工”的系及专业作为数学物理方法课的教材或教学参考书.

前 言

本书是在中国科学技术大学一些“偏工”的系及专业使用的数学物理方法讲义的基础上编写的. 原讲义写于1980年, 18年间重印了3次, 每次重印都作了一些修改. 开设这门课的目的, 是为了适应部分系和专业的要求, 用较少的学时讲授原来开设的复变函数和数学物理方程这两门课. 近年来, 随着学校体制等各方面的改革, 新设置了很多的系和专业, 开设这门课的系和专业越来越多, 为适应这种情况, 才决定把原讲义修改出书.

这次成书, 根据诸位同仁的意见, 并参照我历年来的讲稿, 对原讲义作了很大的修改, 删去了一些不必要的内容, 并增加了保形变换一章, 对许多问题自以为处理得比较简洁. 根据多年的教学经验, 全书内容除极少量带星号的外(打星号的内容全书不超过4学时), 可以在一学期(每周4学时)内讲完. 书中有些小节的例题较多, 是供学生自学之用的, 不一定讲授. 书末附有全部习题的答案, 供使用本书的教师和学生参考.

根据多年经验, 各章的学时分配可大致如下表:

复变函数	第1章	第2章	第3章	第4章	第5章	第6章	第7章
学 时	3	6	7	7	5	6	4

数学物理方程	第1章	第2章	第3章	第4章	第5章
学 时	7	7	8	3	9

这个学时分配表仅供教学参考(如果学时紧张, 可不讲复变函数部分第6章). 笔者教这门课近十届, 虽积累了许多教学经验, 但

不敢说这本教材能尽如人意. 复变函数和数学物理方程的内容都极为丰富, 且后者(尤其是其中的特殊函数)内容很庞杂, 在学时少的情况下, 内容越庞杂的教材是越难写好的.

最后还是老话一句, 书中这样那样的不妥之处在所难免, 不过笔者在中国科学技术大学 39 年的教学生涯已打句号, 只好留待诸君去修正了.

本书承教研室多年的同事季孝达和陆英老师协助校对, 他们两位也多次教过这门课, 在这里向他们表示感谢.

严镇军

1998 年 2 月

于中国科学技术大学

目 次

前言.....	(I)
---------	-------

复 变 函 数

第 1 章 复数和平面点集.....	(3)
1.1 复数	(3)
1.1.1 复数集	(3)
1.1.2 共轭复数	(5)
1.1.3 关于复数模的不等式	(7)
1.1.4 复数的几何表示	(8)
1.1.5 复数的乘方和开方	(14)
1.2 复数序列的极限、无穷远点.....	(15)
1.3 平面点集	(17)
1.3.1 基本概念	(17)
1.3.2 区域与曲线	(18)
习题.....	(20)
第 2 章 复变数函数.....	(24)
2.1 复变数函数	(24)
2.2 函数的极限和连续性	(27)
2.3 导数和分析函数的概念	(29)
2.4 柯西-黎曼方程	(32)
2.5 初等函数	(35)
2.5.1 指数函数	(35)
2.5.2 三角函数和双曲函数	(36)

2.5.3	对数函数	(39)
2.5.4	一般幂函数	(41)
2.5.5	反三角函数	(43)
习题		(45)
第3章	解析函数的积分表示	(48)
3.1	复变函数的积分	(48)
3.1.1	定义和计算方法	(48)
3.1.2	长大不等式	(52)
3.2	柯西积分定理	(54)
3.3	柯西积分公式	(57)
3.4	原函数	(62)
3.5	解析函数与调和函数的关系	(64)
3.6	平面场	(68)
习题		(74)
第4章	解析函数的级数表示	(78)
4.1	幂级数	(78)
4.1.1	复数项级数	(78)
4.1.2	幂级数及其收敛圆	(80)
4.2	解析函数的泰勒展开	(82)
4.3	解析函数的罗朗展开	(87)
4.3.1	罗朗级数和罗朗定理	(87)
4.3.2	解析函数在孤立奇点的罗朗展开	(92)
4.4	孤立奇点的分类	(96)
4.4.1	函数在有限孤立奇点附近的性状	(96)
4.4.2	函数在无穷远点附近的性状	(102)
习题		(103)
第5章	留数及其应用	(108)
5.1	留数定理	(108)
5.2	定积分的计算	(112)

5.2.1	$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$ 型的积分	(113)
5.2.2	三条引理	(115)
5.2.3	有理函数的积分	(118)
5.2.4	$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos mx dx$ 及 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin mx dx$ ($m > 0$) 型的积分	(120)
5.2.5	杂例	(121)
* 5.2.6	多值函数的积分	(127)
5.3	辐角原理	(132)
习题		(138)
第 6 章	保形变换	(142)
6.1	保形变换的概念	(142)
6.1.1	导数的几何意义	(142)
6.1.2	保形变换的概念	(144)
6.2	分式线性变换	(146)
6.3	初等函数的映照	(154)
6.3.1	幂函数和根式函数	(154)
6.3.2	指数函数和对数函数	(158)
* 6.3.3	儒可夫斯基变换	(160)
* 6.4	用保形变换求平面场的复势	(164)
习题		(166)
第 7 章	拉普拉斯变换	(169)
7.1	拉普拉斯变换的定义	(169)
7.2	拉普拉斯变换的基本运算法则	(172)
7.3	拉普拉斯变换的反演公式	(184)
附表 7.1	拉普拉斯变换基本法则表	(191)
附表 7.2	拉普拉斯变换表	(192)
习题		(197)

数学物理方程

第 1 章 数学物理中的偏微分方程	(205)
1.1 偏微分方程的一些基本概念	(205)
1.2 三个典型方程及其物理背景	(209)
1.2.1 理想弦的横振动方程	(210)
1.2.2 热传导方程	(212)
1.2.3 扩散方程	(215)
1.2.4 静电场的场势方程	(215)
1.2.5 自由电磁波方程	(216)
1.3 定解条件和定解问题	(217)
1.3.1 初始条件和初始问题	(218)
1.3.2 边界条件和边值问题	(219)
1.3.3 混合问题	(221)
1.3.4 定解问题的适定性概念	(224)
1.4 关于定解问题的解法	(225)
1.4.1 达朗贝尔公式	(225)
* 1.4.2 广义解	(227)
1.5 叠加原理和齐次化原理	(228)
1.5.1 叠加原理	(228)
1.5.2 齐次化原理	(231)
习题	(234)
第 2 章 分离变量法	(237)
2.1 有界弦的自由振动	(237)
2.2 极坐标系下 $\Delta_2 u = 0$ 的边值问题	(242)
2.3 固有值问题的斯图模-刘维尔理论	(245)
2.4 非齐次情形	(259)
2.4.1 边界条件是齐次的非齐次发展方程的混合	

问题	(259)
2.4.2 一般非齐次混合问题	(263)
2.4.3 泊松方程的边值问题	(266)
习题	(268)
第3章 特殊函数	(272)
3.1 贝塞尔函数	(272)
3.2 贝塞尔函数的性质	(277)
3.2.1 母函数和积分表示	(277)
3.2.2 微分关系和递推公式	(278)
3.2.3 渐近公式、衰减振荡性和零点	(283)
3.3 贝塞尔方程的固有值问题	(285)
3.4 勒让德方程的固有值问题	(292)
3.5 勒让德多项式的母函数和递推公式	(296)
3.6 函数的富里叶-勒让德展开	(299)
习题	(305)
第4章 积分变换方法	(310)
4.1 用富里叶变换解题	(310)
4.1.1 富里叶变换	(310)
4.1.2 解题举例	(312)
4.2 用拉普拉斯变换解题	(317)
习题	(323)
第5章 基本解和积分表达式	(325)
5.1 δ 函数	(325)
5.2 场势方程的边值问题	(334)
5.2.1 $Lu=0$ 型方程的基本解	(334)
5.2.2 格林函数及其物理意义	(336)
5.2.3 用镜像法求格林函数	(341)
5.2.4 二维情形	(346)
5.3 $u_t=Lu$ 型方程柯西问题的基本解	(352)

5.4	$u_{tt}=Lu$ 型方程柯西问题的基本解	(357)
5.4.1	柯西问题解的积分表示	(357)
5.4.2	降维法	(362)
* 5.4.3	自由波的传播	(365)
5.4.4	推迟势公式	(371)
习题		(372)
习题答案		(375)

复变函数

第 1 章 复数和平面点集

复变函数这门学科的一切讨论都是在复数范围内进行的. 本章内容是中学复数知识的复习和补充.

1.1 复数

1.1.1 复数集

我们知道, 由于负数在实数范围内不能开平方, 就由关系 $i^2 = -1$ 引进了虚单位 $i = \sqrt{-1}$. 并把由一切有序实数对 (x, y) 所确定的集合

$$\{z | z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}\}$$

称为复数集. 实数 x, y 分别称为复数 $z = x + iy$ 的实部及虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

特别地, 当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, $z = \operatorname{Re} z = x$ 是实数; 当 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $\operatorname{Im} z \neq 0$ 时, $z = i \operatorname{Im} z = iy$ 称为纯虚数.

两个复数相等, 是指它们的实部和虚部分别相等. 如果一个复数的实部和虚部都等于零, 就称这个复数等于零. 两个复数 $x + iy$ 和 $x - iy$ 称为相互共轭, 如果其中一个用 z 表示, 则另一个用 $\bar{z}$ 表示. 显然, 实数的共轭仍为该实数.

设有两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$, 它们的四则运算规则定义如下:

1) 加法和减法. z_1 及 z_2 的和与差分别为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

及

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

2) 乘法. z_1 和 z_2 相乘, 可以按多项式的乘法法则来进行, 只是必须将结果中的 i^2 代之以 -1 , 即

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

特别地, 当 $z = x + iy$ 时, 有

$$z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

通常, 称非负实数 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 z 的模, 记为 $|z|$. 于是, 上式可写成

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

3) 除法. z_1 除以 z_2 ($z_2 \neq 0$) 的商定义为

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{|z_2|^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

读者很容易利用乘法运算规则直接验证, 这样定义的除法运算是乘法运算的逆运算, 即有

$$z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = z_1.$$

由上面的运算规则可见, 复数运算满足下列规律: 设 z_1, z_2, z_3 是复数, 则

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (\text{交换律});$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (\text{结合律});$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (\text{分配律}).$$

1.1.2 共轭复数

共轭复数的运用,在复数运算上有着特殊的意义.先把它的一些运算性质罗列如下:

- 1) $\bar{\bar{z}} = z$;
- 2) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}z$, $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}z$;
- 3) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
- 4) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;
- 5) $z\bar{z} = (\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2 = |z|^2$.

这些性质都不难证明,留给读者做练习.此外,由性质2)的第二个式子可知,复数 z 是实数的充要条件为 $z = \bar{z}$;由性质2)的第一个式子得知, z 是纯虚数的充要条件为 $z = -\bar{z}$,且 $z \neq 0$.

例1 设 $z = x + iy$, $y \neq 0$, $y \neq \pm i$. 证明:当且仅当 $x^2 + y^2 = 1$ 时, $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数等价于

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即

$$z + z\bar{z}^2 = \bar{z} + \bar{z}z^2,$$

亦即

$$(z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0.$$

因 $y \neq 0$,故 $2iy = z - \bar{z} \neq 0$,从而

$$1 - z\bar{z} = 0,$$

$$|z|^2 = 1,$$

即

$$x^2 + y^2 = 1.$$

由于上述推导的每一步都是可逆的,故命题得证.