随机过程

编著 樊家琨

河南大学出版社

随机过程

樊家琨 编著

河南大学出版社

内 容 提 要

本书是在作者对数学专业高年级学生和自控专业研究生几经讲授随机过程课的基础上编写而成的。

本书共分三章，包括随机过程的基本概念和类型，马尔可夫过程，平稳过程。各章之末配有较多数量的补充与习题，以加深理解全书的内容。为了便于自学，书末给出补充与习题的全部答案或提示。本书不仅可作为数学系高年级学生的教材，而且对于有较好数学基础的理、工科有关专业的高年级学生或研究生以及工程技术人员，也是一本较好的教材或参考书。

随 机 过 程

樊 家 琨 编著

责任编辑 程 庆

河南大学出版社出版

（开封市明伦街85号）

河南省新华书店发行

中国科学院开封印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32 印张：7 字数：176千字

1988年10月第1版 1988年10月第1次印刷

印数1—3000 定价：1.70元

ISBN 7-81018-120-3/O·8

序　言

随机过程作为概率论的一个重要分支，在现代科学的许多领域，如物理、化学、生物、工程、经济中有着广泛的应用。因此，不仅概率论工作者学习、研究它，而且其它领域的工作者中，也有越来越多的人学习和应用它。

随机过程的著作大致有两类：一类是为数学和数学物理工作者写的，它的起点高，需要测度论、泛函分析、拓扑学等现代数学的基础，注重于理论上的严格和完整；另一类则是为实际工作者写的，它的起点较低，只要求有一般的高等数学知识，注重于介绍这一理论和应用于实际。因此对于有较多数学基础知识但又未能掌握现代数学基础的数学系学生来说，在学完概率论与数理统计后，继续学习随机过程，就缺少合适的书。

樊家琨副教授的《随机过程》一书，是根据他本人多年从事数学系高年级随机过程课的教学经验编写而成的。它的起点是微积分、线性代数、实变函数、复变函数，这些内容已为数学系三年级学生所掌握。由于有了较多的数学工具，理论上的论证就可以较为严谨，有利于培养学生的逻辑推理能力。同时，作者考虑到初学者的特点，选择了较多的例子，这对于学习抽象的概念无疑是有益的。

本书取材精练，叙述较为严谨、详尽，不仅适宜于作为数学系学生的教材，而且对于有较好的高等数学、工程数学基础的其它学科的工作者，也是一本有用的参考书。

希望本书的出版，对高等学校数学系随机过程的教学能起到促进作用。

朱作宾

1986年4月于

安徽师范大学

目　　录

第一章 随机过程的基本概念

§1.1 随机过程的直观背景与定义

在概率论的基本理论中，我们首先建立了概率空间，进一步定义了随机变量和它的分布函数，用以刻划随机现象的统计规律性．在那里，我们讨论了一个随机变量或几个随机变量（即有限维随机向量）．在极限理论中，我们虽然涉及到可数无穷多个随机变量，但我们总假设它们之间是相互独立的．然而，在客观实际中存在的随机现象是极其复杂的，常常需要用一族无穷多个按照一定关系联系起来的随机变量才能描述它．

例1 设$X(t,\omega)$表示某电话台在$[0,t)$时间内收到用户的呼叫次数．对于每个固定的$t(0\leqslant t<+\infty)$，$X(t,\omega)$是一个随机变量，它可以取所有非负整数值：0，1，2，….随着时间t的改变，就得到一族无穷多个相互有关的随机变量．

例2 设有一个生物群体由于繁殖而产生后代．对于固定的$n(n\geqslant 1)$，令$X(n,\omega)$表示第n代生物群体的个数，则$X(n,\omega)$是随机变量，可取非负整数值：0，1，2，….而$X(n,\omega)(n=0,1,2,\cdots)$就是无穷多个相互有关的随机变量．

例3 悬浮在液体中的微粒由于分子的随机碰撞而作Brown运动．设$X_1(t,\omega)$与$X_2(t,\omega)$分别表示在时刻$t(0\leqslant t<+\infty)$某微粒所处位置的两个坐标，则$X(t,\omega)=(X_1(t,\omega),X_2(t,\omega))$表示在时刻$t$微粒在平面坐标系中的位置．它是一个二维随机向量．当t改变时，便得到一族无穷多个相互有关的二维随机向量．

类似以上的例子在实际中大量存在，它要求我们必须从理论上扩大概率论的研究范围，随机过程的理论正是为此而建立起来的.

因此，从直观上看，我们可以将随机过程理解为受统计规律支配并且随时间而发展的过程，它描述了随时间而变化的随机现象.

由此可见，随机过程作为概率论的一个分支，它是经典概率论的继续和发展．如果认为经典概率论是研究“静止”（相对于时间不变化)的随机现象，那么，随机过程可认为是研究“运动”(相对于时间而变化）的随机现象，更具有实际意义．例如，在排队论问题中，要求受到服务的“顾客”的数量不仅是随机的，而且随着时间在变化．因此，只有应用随机过程的理论，才能较好地描述这一随机现象，从而解决“服务员”与“顾客”这一矛盾问题.

定义 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，T是一个参数集(一般地$T\subset \mathrm{R}^1$)，$X(t,\omega)(t\in T,\ \omega\in\Omega)$是$T\times\Omega$上的函数．如果对于每一个$t\in T$，$X(t,\omega)(\omega\in\Omega)$都是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量，则称随机变量族$\{X(t,\omega),\ t\in T\}$为定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的**随机过程，或随机函数**.

如果我们不强调概率空间，为了书写简单起见，有时可不明显地写出ω，而把随机过程写为$\{X(t),\ t\in T\}$或X_T.

为了使叙述形象化，参数T一般表示时间参数集（见上面例子)，T可以取下列几种形式之一：

$$\mathrm{R}^1=(-\infty,\ +\infty);\ \mathrm{R}^+=[0,+\infty);$$

$$\mathrm{Z}=\{\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots\};\ \mathrm{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}.$$

特别地，当$T=\mathrm{R}^+$或$T=\mathrm{R}^1$时，称X_T为连续时间的随机过程，如§1.1中例1、例3．当$T=\mathrm{Z}$或$T=\mathrm{Z}^+$时，称X_T为离散时间的随机过程，或随机序列，如§1.1中例2.

随机过程X_T的值域即随机变量$X(t)(t\in T)$所取一切值的集

合，**称为状态空间**，记为E.E中的元素称为**状态**. 状态空间可以是非负整数集，即$E=\{0,1,2,\cdots\}$(如§1.1例1，例2)，也可以是n维欧氏空间$E=R^n$(如§1.1例3中$E=R^2$)，甚至可以是其它抽象空间(本书将不讨论这种情形). 当状态空间为复数域时，称X_T为复值随机过程.

如上所述，已知随机过程$\{X(t,\omega),\ t\in T\}$，当$t\in T$固定时，$X(t,\cdot)$是取值于状态空间E的随机变量；另一方面，当$\omega\in\Omega$固定时，$X(\cdot,\omega)$是取值于状态空间E的一个$t(\in T)$的函数，我们称此函数为随机过程X_T的**样本函数**，有时也称为**轨道**或**现实**. 直观地讲，一个样本函数对应着一次试验(观察)ω的结果.

§1.2 有限维分布函数族

一、有限维分布函数族的定义

研究随机现象，主要是研究它的统计规律性. 对于随机过程，问题不在于如何定义它，而更重要的是如何刻划它的统计规律性.

在概率论中我们已经知道，一个随机变量ξ的统计规律性完全被它的分布函数$F_\xi(x)$所刻划，有限个随机变量的统计规律性完全被它们的联合分布函数所刻划. 既然随机过程可视为一族(一般有无穷多个)随机变量，是否也可以用一个无穷多维的联合分布函数来刻划它呢？由测度论的理论可知，使用无穷维分布函数的方法是行不通的(例如，联合分布函数的四个性质，无穷维分布函数一般不具备. 因此，不能由无穷维分布函数产生测度等等.). 可行的办法，就是采用有限维分布函数族来刻划随机过程的统计特性.

定义1 设随机过程X_T的状态空间为R^1(或Z)，对于任意自然数n以及任意参数$t_1,\cdots,t_n\in T$，n个随机变量$X(t_1),\cdots,$

$X(t_n)$的（n 维）联合分布函数为

$$F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)=P(X(t_1)<x_1,\cdots,X(t_n)<x_n),$$

所有这些分布函数的集合：

$$\{F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant 1\}$$

称为随机过程 X_T 的**有限维分布函数族**.

如果知道了随机过程 X_T 的有限维分布函数族，则便知道该随机过程的任意有限个随机变量的联合分布，也就可以完全确定它们之间的统计关系. 例如，$F(t;x)$，$t\in T$，描述了所有随机变量 $X(t)$的分布规律；$F(t_1,t_2;x_1,x_2)$，$t_1,t_2\in T$，描述了随机过程 X_T 中两个时刻 t_1，t_2 之间的统计关系，等等.

例1 设 $T=\{1,2,\cdots,n\}$，则 $X_T=\{X(1),\cdots,X(n)\}$ 是一n维随机向量. 对于这种随机过程，只要给出它的 n 维联合分布函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$，便可知道它的各级边沿分布函数，从而也就得到它的有限维分布函数族. 它说明，有限维随机向量被它的联合分布函数完全描述，这和概率论中的结论是一致的.

例2 设 $T=\{1,2,3,\cdots\}$，$X_T=\{X(1),\ X(2),\ X(3),\ \cdots\}$ 是一个独立随机变量序列，我们也称 X_T 为独立随机过程（序列）. 对于任意 $n\geqslant 1$ 以及 X_T 中的任意 n 个随机变量 $X(t_1)$，…，$X(t_n)$，它的 n 维联合分布函数为（由于独立性）：

$$F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)=F(t_1;x_1)\cdots F(t_n;x_n).$$

由此可见，对于独立随机过程，只要知道它的一维分布函$F(t;x)$，$t\in T$，就能完全确定它的有限维分布函数族. 对于这种极为简单的随机过程，我们在概率论中已经充分讨论过.

二、有限维分布函数族的性质

由多维分布函数的性质和上述定义，容易证明，一个随机过程的有限维分布函数族具有下列两个性质：

（1）对称性：对于$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，有

$$F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=F(t_{i_1},\cdots,t_{i_n};x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$$

（2）相容性：设 $m<n$，则有

$$F(t_1,\cdots,t_m;x_1,\cdots,x_m)=F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_m,\underbrace{\infty,\cdots,\infty}_{n-m个})$$

三、有限维特征函数族及其性质

定义2 设随机过程 X_T 的状态空间为 R^1（或Z）. 对于任意自然数 n 以及任意参数 $t_1,\cdots,t_n\in T$，n 个随机变量 $X(t_1),\cdots,X(t_n)$ 的（n 维）特征函数为

$$\begin{aligned}&\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n)\\&=E\{\exp(i[\theta_1X(t_1)+\cdots+\theta_nX(t_n)])\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n)]F(t_1,\cdots,t_n;\mathrm{d}x_1,\\&\cdots,\mathrm{d}x_n)\end{aligned}$$

所有这些特征函数的集合：

$$\{\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n),t_1,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant1\}$$

称为随机过程 X_T 的**有限维特征函数族**.

由特征函数的唯一性定理可知，有限维分布函数族与有限维特征函数族是相互唯一决定的. 因此，有限维分布函数族的对称性和相容性对有限维特征函数族仍然成立，即

（1）对称性：对于 $(1,2,\cdots,n)$ 的任一排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，有

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n)=\varphi(t_{i_1},\cdots,t_{i_n};\theta_{i_1},\cdots,\theta_{i_n});$$

（2）相容性：设 $m<n$，则有

$$\varphi(t_1,\cdots,t_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_m,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-m个})$$

四、Колмогоров 定理

现在我们考虑以上问题的相反问题：已知一个分布函数族（或特征函数族）满足对称性和相容性两个条件，试问是否存在一个概率空间及其上的随机过程，它的有限维分布函数族（或有限维特征函数族）与已知的有限维分布函数族（或有限维特征函数族）

相重合？Колмогоров 在 1931 年证明了存在性定理，肯定地回答了这个问题．但证明需要较多的测度论知识，我们不加证明地叙述如下：

定理（Колмогоров 存在性定理） 设分布函数族

$$\{F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n),t_1,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant 1\}$$

满足对称性和相容性条件，则必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义于其上的一个随机过程 $X_T=\{X(t),\ t\in T\}$，使 X_T 的有限维分布函数族与$\{F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant 1\}$相重合．

显然，将定理中的分布函数族换成特征函数族，定理仍然成立．

五、随机过程的数字特征

虽然有限维分布函数族能够用来描述随机过程的统计特性，但是，在实际问题中，除了少数特殊情况以外，大部分的随机过程的有限维分布函数族是难以给出来的．因此，在大多数情况下，研究随机过程的各种数字特征，具有理论和实际的重要意义（这一点和概率论中讨论数字特征相类似），它们一方面能够反映出随机过程的局部特性，另一方面，在一些特殊的情况下，它们也可以完全决定有限维分布函数．（如同正态分布被一阶矩和二阶矩唯一决定一样，这一点可从下面的例 3 中看出．）

如果对于每一个 $t\in T$，X_t 的数学期望存在，则

$$m(t)=EX(t),\quad t\in T$$

称为随机过程 X_T 的**均值函数**．

如果对于每一对 $s,t\in T$，$(X(s),X(t))$的协方差存在，则

$$\Gamma(s,t)=E[(X(s)-m(s))(X(t)-m(t))],\ s,t\in T$$

称为随机过程 X_T 的**协方差函数**．

特别，当 $s=t$ 时

$$\Gamma(t,t)=E[X(t)-m(t)]^2=DX(t)=D(t)$$

称为随机过程 X_T 的**方差函数**.

与概率论的情况类似，均值函数 $m(t)$ 描述了随机过程 X_T 的平均状态的演化，协方差函数 $\Gamma(s,t)$ 描述了随机过程 X_T 的相关性的演化，而方差函数 $D(t)$ 则描述了随机过程 X_T 取值的分散程度的演化.

例3 设 $X(t)=\xi\cos\theta t+\eta\sin\theta t$，$t\geq 0$，其中 ξ，η 是相互独立的且服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量，θ 为一实常数.

对于固定的 t，$X(t)$ 是独立正态随机变量 ξ 与 η 的线性组合，所以 $X(t)$ 也是正态随机变量. 同样，对于任意 $n\geq 1$ 以及任意 $t_1,\cdots,t_n\in T$，$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$ 是 n 维正态随机变量(这由概率论可知，正态变量在线性变换下还是正态变量)，它的联合分布函数是 n 维正态分布函数. 由概率论可知，它被一阶矩和二阶矩所完全决定. 因此，只要求出随机过程 X_T 的均值函数和协方差函数就可确定它的有限维分布函数族.

我们有：

$$m(t)=EX(t)=E(\xi\cos\theta t+\eta\sin\theta t)=0;$$

$$\begin{aligned}\Gamma(s,t)&=E[(\xi\cos\theta s+\eta\sin\theta s)(\xi\cos\theta t+\eta\sin\theta t)]\\&=\sigma^2(\cos\theta s\cdot\cos\theta t+\sin\theta s\cdot\sin\theta t)\\&=\sigma^2\cos(s-t)\theta\end{aligned}$$

由 $m(t)$ 和 $\Gamma(s,t)$，我们可以确定 X_T 的有限维分布函数族或有限维特征函数族.

我们指出，如果 $X_T=\{X(t),\ t\in T\}$ 是复值随机过程，则其协方差函数与方差函数分别改为

$$\Gamma(s,t)=E[X(s)-m(s)]\overline{[X(t)-m(t)]},\quad s,t\in T.$$

$$D(t)=E|X(t)-m(t)|^2,\quad t\in T.$$

其中“——”与“|　|”分别表示“共轭”与“模”.

§1.3 随机过程的分类

随机过程种类繁多，为便于研究，我们将随机过程按下列两种方式进行分类.

一种分类方式是对随机过程 $X_T=\{X(t),\ t\in T\}$，按照参数集 T 和状态空间 E 是离散(即有限或可列)集或连续集而分成四类：

(1)参数集 T 离散、状态空间 E 离散的随机过程；

(2)参数集 T 离散、状态空间 E 连续的随机过程；

(3)参数集 T 连续、状态空间 E 离散的随机过程；

(4)参数集 T 连续、状态空间 E 连续的随机过程.

然而，这种分类法是比较表面的，而更深刻的是按另一种方式即按过程的概率结构进行分类. 下面我们介绍几种主要类型.

一、二阶矩过程

定义1 设 $X_T=\{X(t),\ t\in T\}$ 是一个(复或实值)随机过程，如果对于每一个 $t\in T$，都有 $E|X(t)|^2<\infty$，则称 X_T 为**二阶矩过程**.

由此定义可知，对于二阶矩过程 X_T，其均值函数 $m(t)=EX(t)$ 总是存在的. 因此，如从 $X(t)$ 中减去 $m(t)$，即代替 $\{X(t),\ t\in T\}$ 而考虑 $\tilde{X}(t)=X(t)-m(t)$，则其均值函数为

$$E\tilde{X}(t)=0,$$

因此，我们一般都假定二阶矩过程 $\{X(t),\ t\in T\}$ 的均值函数为零. 这时，协方差函数简化为

$$\Gamma(s,t)=E[X(s)\overline{X(t)}],\quad s,t\in T.$$

与概率论中一样，应用 Schwartz 不等式可以证明，二阶矩过程的协方差函数总是存在的. 事实上，由 Schwartz 不等式有

$$|EX(s)\overline{X(t)}|^2 \leqslant E|X(s)|^2 \cdot E|X(t)|^2 < \infty.$$

下面我们给出二阶矩过程的协方差函数的两个性质：

性质1 二阶矩过程的协方差函数 $\Gamma(s,t)$ 具有 Hermite 性，即

$$\Gamma(s,t) = \overline{\Gamma(t,s)}, \quad s,t \in T.$$

如果二阶矩过程是实的，即 $X(t)$ 是实值随机变量，则 $\Gamma(s,t)$ 是对称函数.

证明 $\overline{\Gamma(t,s)} = \overline{EX(t)\overline{X(s)}} = E\overline{X(t)}X(s)$

$$= EX(s)\overline{X(t)} = \Gamma(s,t).$$ （证毕）

性质2 二阶矩过程的协方差函数 $\Gamma(s,t)$ 具有非负定性，即对任意有限个 $t_1,\cdots,t_n \in T$ 和任意的普通复函数 $\theta(t)$，$t \in T$，Hermite 二次型：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Gamma(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)} \geqslant 0.$$

证明 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Gamma(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} EX(t_k)\overline{X(t_j)}\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)}$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^{n} X(t_k)\theta(t_k)\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} X(t_j)\theta(t_j)\right)}$$

$$= E\left|\sum_{k=1}^{n} X(t_k)\theta(t_k)\right|^2 \geqslant 0$$ （证毕）

我们指出，由非负定性可以推出 Hermite 性. 因此，性质 2 包含了性质 1.

事实上，取$n=2$，$\theta(t_1)=1$，$\theta(t_2)=i(i=\sqrt{-1})$，则由非负定性得：

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Gamma(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)}$$

$$=\Gamma(t_1,t_1)-\Gamma(t_1,t_2)i+\Gamma(t_2,t_1)i+\Gamma(t_2,t_2),$$

显然，$\Gamma(t_1,t_1)=D(t_1)\geqslant0$，$\Gamma(t_2,t_2)=D(t_2)\geqslant0$，且都是实的，所以，

$$-\Gamma(t_1,t_2)i+\Gamma(t_2,t_1)i$$

应是实的．于是，$\Gamma(t_1,t_2)$的实部应与$\Gamma(t_2,t_1)$的实部相等．类似地，取$n=2$，$\theta(t_1)=\theta(t_2)=1$，用同样的方法可知

$$\Gamma(t_1,t_2)+\Gamma(t_2,t_1)$$

也应是实的．于是，$\Gamma(t_1,t_2)$的虚部应与$\Gamma(t_2,t_1)$的虚部有相同的绝对值但符号相反．综上所述，即得

$$\Gamma(t_1,t_2)=\overline{\Gamma(t_2,t_1)}.$$

我们指出，性质2是二阶矩过程最基本的也是最本质的性质．

二阶矩过程有三个重要子类，现在我们分别叙述于下．

1．正态过程

正态过程在随机过程论中占着重要地位，其重要性表现在两个方面，一方面是正态过程可以作为许多实际随机过程的近似；另一方面是正态过程比别的随机过程更便于进行数学处理．

定义2 随机过程$X_T=\{X(t),\ t\in T\}$称为**正态过程**，如果对于任意$n\geqslant1$以及任意$t_1,\cdots,\ t_n\in T$，n个随机变量$X(t_1),\cdots,X(t_n)$的联合分布函数是n维正态分布函数．

由于n维正态分布函数用相应的n元（联合）特征函数表述更为简洁，所以，我们将相应的特征函数写出：

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n)$$

$$=\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\theta_k m_k-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_j\lambda_{jk}\theta_k\right),$$

其中 θ_1，…，θ_n 为 n 个实变量，$m_k=EX(t_k)$，$\lambda_{jk}=\Gamma(t_j,t_k)$ 是 $X(t_j)$与 $X(t_k)$的协方差.

使用向量记号，令 $m=(m_1,\cdots,m_n)$，$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$，$\theta^\tau$ 为 θ 的转置，即为列向量；

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix}$$

为协方差阵．此时，n 元特征函数可写为

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta)=\exp\left(im\theta^\tau-\frac{1}{2}\theta\Lambda\theta^\tau\right).$$

由概率论已知，Λ 是非负定的，即对于任意实数 $a_1,\cdots$，a_n，有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\geqslant 0.$$

如果将“$\geqslant$”换为“$>$”，则 Λ 是正定的.

当 Λ 是正定时，它的行列式 $|\Lambda|\neq 0$，所以其逆矩阵 Λ^{-1} 存在．此时，它的 n 维分布密度是(设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$)

$$f(t_1,\cdots,t_n;x)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Lambda|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)\Lambda^{-1}(x-m)^\tau\right).$$

由于正态分布的二阶矩必存在，所以，正态过程是二阶矩过程.

我们知道，正态分布完全被一阶矩(均值函数)和二阶矩(协方差函数)所决定．因此，对于正态过程主要是讨论其均值函数 $m(t)=EX(t)$ 和协方差函数 $\Gamma(s,t)=E[X(s)-m(s)][X(t)-m(t)]$.

下面我们讨论相反的问题，即正态过程的存在定理.