

高等学校教材

工程数学

数学物理方程与 特殊函数

(第二版)

南京工学院数学教研组 编

高等教育出版社



高等学校教材

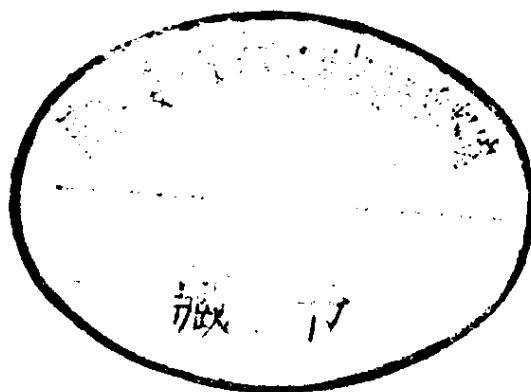
工程数学

数学物理方程与 特殊函数

(第二版)

南京工学院数学教研组 编

GF 139/25



高等教育出版社

内 容 提 要

本书第二版是由编者在1978年版的基础上,参照高等工业学校工程数学教学大纲(草案)并根据使用中积累的意见和建议修改而成的。

修改后的全书共分七章,保持了第一版中以数学物理方程的解法为安排内容的线索的特点。前四章和第七章介绍数学物理方程基本概念和常用解法,第五、六两章讨论两种特殊类型的常微分方程——贝塞尔方程和勒让德方程的解法、解的主要性质以及它们在求解数学物理方程定解问题中的应用。

本书由浙江大学周茂清教授审稿。高等院校工科数学教材编委会同意本书可以作为高等工业学校教材。

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日,上级同意恢复“高等教育出版社”;本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教材

工 程 数 学

数学物理方程与特殊函数

(第二版)

南京工学院数学教研组 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 5.75 字数 130,000

1978年11月第1版

1982年4月第2版 1984年2月第8次印刷

印数 627,401—672,400

书号: 13010·0254 定价 0.58 元

第二版前言

本书从一九七八年作为工程数学试用教材出版以来,得到了许多兄弟院校的关心和支持,一些和我们素不相识的同行们出于高度的事业心和责任感,在使用本书的过程中积累了许多宝贵的意见和建议,这些来自教学实践的经验和要求,是我们这次进行修订的主要依据。

全书由“数学物理方程”与“特殊函数”两大部分内容组成。“数学物理方程”部分,主要是讲了数学物理方程的一些基本概念及三种典型的二阶线性偏微分方程各种定解问题的一些常用解法,其中包括分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法及差分法。在这些解法中,我们把重点放在分离变量法上,较详细地讨论了三种典型方程在直角坐标系、极坐标系、柱坐标系与球坐标系中进行分离变量的一般步骤及各种边界条件的处理。“特殊函数”部分,主要是讲了贝塞尔函数及勒让德多项式,其中包括如何从求解数学物理方程的定解问题引出贝塞尔方程与勒让德方程;两个方程通解的表达式;贝塞尔函数及勒让德多项式的一些重要性质以及利用这两种特殊函数来解决数学物理方程的一些定解问题的全过程。这两大部分内容既有一定的相对独立性,但从某种意义上讲又是一个不可分割的有机整体。

不论是数学物理方程,还是特殊函数,它们的内容都是极其丰富的,作为一本工科院校的工程数学的教材,当然不可能把所有主要的内容都包罗无遗地吸收进来。如何根据工科院校的特点,用较少的篇幅把一些最基本的概念和方法讲清楚,并能为较多的要求各不相同的专业所采用,这一直是编者感到棘手的难题。虽然

我们也作了一些努力,例如,本书采用了以数学物理方程的常用解法为安排内容的线索,且在各种解法中只着眼于求出“形式解”,而略去了对定解问题适定性的讨论;又如,尽可能地把各部分内容写得前后呼应,对各种解法的思路和特点都作了一点简要的说明等等。但这些做法是否妥当,还有待于今后教学实践的检验。

使用本书的教学时数,大体为 33—41 小时,各章学时的分配数可参考下表

章 数	一	二	三	四	五	六	七
时 数	3~4	8~10	4~5	4~5	6~8	4~5	4

本书的第一版是在我们教研组过去编写的讲义的基础上,根据 1977 年在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议通过的大纲编写的,这次又以第一版为基础,参照高等工业学校工程数学教学大纲(草案)和校内外许多同志在使用中所积累的经验和建议修订的。本书主审人浙江大学周茂清教授详细审阅了原稿,并提出了许多宝贵的意见,编者向他表示衷心的感谢。同时,编者还要向以各种方式帮助本书编写与修改的校内外同志,致以诚挚的谢意。

本书的编写与修订工作是由王元明同志执笔完成的。孙家乐、宋柏生两同志在这次修订时提供了一些有益的建议。

由于编者水平所限,书中一定还存在不少错误和缺点,敬请赐教。

编 者

1982年3月

目 录

第一章 一些典型方程和定解条件的推导	1
§ 1.1 基本方程的建立	1
§ 1.2 初始条件与边界条件	11
§ 1.3 定解问题的提法	15
习题一	17
第二章 分离变量法	19
§ 2.1 有界弦的自由振动	19
§ 2.2 有限长杆上的热传导	30
§ 2.3 圆域内的二维拉普拉斯方程的定解问题	34
§ 2.4 非齐次方程的解法	38
§ 2.5 非齐次边界条件的处理	43
* § 2.6 关于二阶常微分方程固有值问题的一些结论	51
习题二	54
第三章 行波法与积分变换法	58
§ 3.1 一维波动方程的达朗倍尔公式	58
§ 3.2 三维波动方程的泊松公式	65
3.2.1 三维波动方程的球对称解	65
3.2.2 三维波动方程的泊松公式	66
3.2.3 泊松公式的物理意义	72
§ 3.3 积分变换法举例	75
习题三	83
第四章 拉普拉斯方程的格林函数法	85
§ 4.1 拉普拉斯方程边值问题的提法	85
§ 4.2 格林公式	87
§ 4.3 格林函数	93
§ 4.4 两种特殊区域的格林函数及狄氏问题的解	96
4.4.1 半空间的格林函数	96
4.4.2 球域的格林函数	97
习题四	100

第五章 贝塞尔函数	101
§ 5.1 贝塞尔方程的引出	101
§ 5.2 贝塞尔方程的求解	103
§ 5.3 当 n 为整数时贝塞尔方程的通解	107
§ 5.4 贝塞尔函数的递推公式	109
§ 5.5 函数展成贝塞尔函数的级数	112
5.5.1 贝塞尔函数的零点	112
5.5.2 贝塞尔函数的正交性	114
§ 5.6 贝塞尔函数应用举例	117
* § 5.7 贝塞尔函数的其他类型	122
5.7.1 第三类贝塞尔函数	122
5.7.2 虚宗量的贝塞尔函数	123
5.7.3 开尔文函数	124
* § 5.8 贝塞尔函数的渐近公式	125
习题五	126
第六章 勒让德多项式	129
§ 6.1 勒让德方程的引出	129
§ 6.2 勒让德方程的求解	131
§ 6.3 勒让德多项式	134
§ 6.4 函数展成勒让德多项式的级数	137
6.4.1 勒让德多项式的正交性	137
6.4.2 函数展成勒让德多项式的级数	139
* § 6.5 连带的勒让德多项式	145
习题六	148
第七章 数学物理方程的差分解法	150
§ 7.1 将微分方程化成差分方程	150
§ 7.2 拉普拉斯方程的差分格式	153
§ 7.3 热传导方程的差分格式	159
§ 7.4 波动方程的差分格式	161
习题七	163
附录 A 「函数的基本知识	164
附录 B 傅氏变换与拉氏变换简表	169
习题答案	172

第一章 一些典型方程和定解条件的推导

在讨论数学物理方程的解法以前, 我们首先要弄清楚数学物理方程所研究的问题的正确提法. 为此, 我们从两方面来讨论, 一方面要建立描述某种物理过程的微分方程, 另一方面要把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来.

§ 1.1 基本方程的建立

在本节, 我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程, 这些方程构成本书的主要研究对象.

例 1 弦的振动

弦的振动问题, 虽然是一个古典问题, 但对于初学者仍然具有一定的启发性.

设有一根均匀柔软的细弦, 平衡时沿直线拉紧, 而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外, 不受外力影响. 下面研

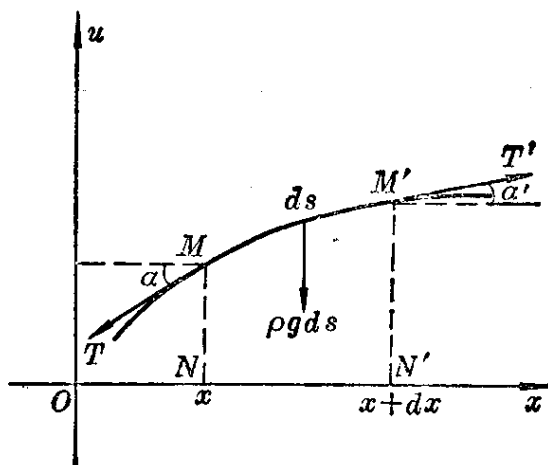


图 1-1

究弦作微小横向振动的规律. 所谓“横向”是指全部运动出现在一个平面上, 而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(图 1-1). 所谓“微小”是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小, 以致它们的高于一次方的项都可略而不计.

设弦上具有横坐标为 x 的点, 在时刻 t 时的位置为 M , 位移 NM 记作 u . 显然, 在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数 $u(x, t)$.

现在来建立位移 u 满足的方程。我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动, 然后再考虑小弧段趋于零的极限情况。在弦上任取一弧段 $\widehat{MM'}$, 其长为 ds , 设 ρ 是弦的线密度, 弧段 $\widehat{MM'}$ 两端所受的张力记作 T, T' 。由于假定弦是柔软的, 所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向。现在考虑弧段 $\widehat{MM'}$ 在 t 时刻的受力情况。用牛顿运动定律, 作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度。

在 x 轴方向弧段 $\widehat{MM'}$ 受力的总和为 $-T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$, 由于弦只作横向振动, 所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \quad (1.1)$$

按照上述弦振动微小的假设, 可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小, 即 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$, 从而由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

可知, 当我们略去 α 与 α' 的所有高于一次方的各项时, 就有

$$\cos\alpha \approx 1, \cos\alpha' \approx 1,$$

代入(1.1)式, 便可近似得到

$$T = T'.$$

在 u 方向弧段 $\widehat{MM'}$ 受力的总和为 $-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds$, 其中 $-\rho g ds$ 是弧段 $\widehat{MM'}$ 的重力。又因当 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$ 时

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x},$$

$$ds = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2} dx \approx dx,$$

且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度近似为 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$, 小弧

段的质量为 ρds , 所以

$$-T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

或

$$T \left[\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho g dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad (1.2)$$

上式左边方括号内的部分是由于 x 产生 dx 的变化而引起的 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 的改变量, 可用微分近似代替, 即

$$\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx,$$

于是
$$\left[T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho g \right] dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

或
$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来, 张力较大时弦振动速度变化很快, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 要比 g 大得多,

所以又可以把 g 略去. 经过这样逐步略去一些次要的量, 抓住主要的量, 在 $u(x, t)$ 关于 x, t 都是二次连续可微的前提下, 最后得出 $u(x, t)$ 应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

这里的 $a^2 = \frac{T}{\rho}$. (1.3) 式称为一维波动方程.

如果在振动过程中, 弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力, 且假定在时刻 t 弦上 x 点处的外力密度为 $F(x, t)$, 显然, 在这时 (1.1) 及 (1.2) 分别为

$$T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = 0,$$

$$F ds - T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的重量, 可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.3)'$$

其中 $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$, 表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力.

方程(1.3)与(1.3)'的差别在于(1.3)'的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x, t)$, 这个项称为自由项. 包括有非零自由项的方程称为非齐次方程. 自由项恒等于零的方程称为齐次方程. (1.3)为齐次一维波动方程, (1.3)'为非齐次一维波动方程.

例2 传输线方程

对于直流电或低频的交流电, 电路的基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律指出同一支路中电流相等. 但对于较高频率的电流 (指频率还没有高到能显著地幅射电磁波的情况), 电路中导线的自感和电容的效应不可忽略, 因而同一支路中电流未必相等.

今考虑一来一往的高频传输线, 它被当作具有分布参数的导体(图 1-2), 我们来研究这种导体内电流流动的规律. 在具有分布参数的导体中, 电流通过的情况, 可以用电流强度 i 与电压 v 来描述, 此处 i 与 v 都是 x, t 的函数, 记作 $i(x, t)$ 与 $v(x, t)$. 以 R ,

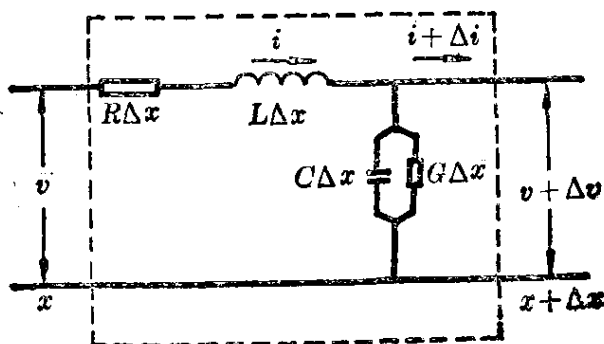


图 1-2

L, C, G 分别表示下列参数:

R —— 每一回路单位的串联电阻,

L —— 每一回路单位的串联电感,

C —— 每单位长度的分路电容,

G —— 每单位长度的分路电导.

根据基尔霍夫第二定律, 在长度为 Δx 的传输线中, 电压降应等于电动势之和, 即

$$v - (v + \Delta v) = R\Delta x \cdot i + L\Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t}.$$

由此可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (1.4)$$

另外, 由基尔霍夫第一定律, 流入节点 x 的电流应等于流出该节点的电流, 即

$$i = (i + \Delta i) + C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + G\Delta x \cdot v,$$

或

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} - Gv. \quad (1.5)$$

将方程(1.4)与(1.5)合并, 即得 i, v 应满足如下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0. \end{cases}$$

从这个方程组消去 v (或 i), 即可得到 i (或 v) 所满足的方程. 例如, 为了消去 v , 我们将方程(1.5)对 x 微分 (假定 v 与 i 对 x, t 都是二次连续可微的), 同时在方程 (1.4) 两端乘以 C 后再对 t 微分, 并把两个结果相减, 即得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G \frac{\partial v}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - RC \frac{\partial i}{\partial t} = 0,$$

将(1.4)中的 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入上式, 得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \quad (1.6)$$

这就是电流 i 满足的微分方程. 采用类似的方法从(1.4)与(1.5)中消去 i 可得电压 v 满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv, \quad (1.7)$$

方程(1.6)或(1.7)称为传输线方程.

根据不同的具体情况, 对参数 R, L, C, G 作不同的假定, 就可以得到传输线方程的各种特殊形式. 例如, 在高频传输的情况下, 电导与电阻所产生的效应可以忽略不计, 也就是说可令 $G = R = 0$, 此时方程(1.6)与(1.7)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

这两个方程称为高频传输线方程.

若令 $a^2 = \frac{1}{LC}$, 这两个方程与(1.3)完全相同. 由此可见, 同一个方程可以用来描述不同的物理现象. 一维波动方程只是波动方程中最简单的情况, 在流体力学、声学及电磁场理论中, 还要研究高维的波动方程.

*例3 电磁场方程

从物理学我们知道, 电磁场的特性可以用电场强度 E 与磁场强度 H 以及电感应强度 D 与磁感应强度 B 来描述. 联系这些量的麦克斯韦(Maxwell)方程组为

$$\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad (1.11)$$

其中 J 为传导电流的面密度, ρ 为电荷的体密度.

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$D = \epsilon E, \quad (1.12)$$

$$B = \mu H, \quad (1.13)$$

$$J = \sigma E \quad (1.14)$$

相联立, 其中 ϵ 是介质的介电常数, μ 是导磁率, σ 为导电率, 我们假定介质是均匀而且是各向同性的, 此时 ϵ, μ, σ 均为常数.

方程 (1.8) 与 (1.9) 都同时包含有 E 与 H , 从中消去一个变量, 就可以得到关于另一个变量的微分方程. 例如先消去 H , 在 (1.8) 式两端求旋度 (假定 H, E 都是二次连续可微的) 并利用 (1.12) 与 (1.14) 得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} E + \sigma \operatorname{rot} E,$$

将 (1.9) 与 (1.13) 代入上式得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t},$$

而 $\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = \operatorname{grad} \operatorname{div} H - \nabla^2 H$, 且 $\operatorname{div} H = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} B = 0$, 所以最后得到 H 所满足的方程为

$$\nabla^2 H = \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t};$$

同理, 若消去 H 即得 E 所满足的方程

$$\nabla^2 E = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t}.$$

如果介质不导电 ($\sigma = 0$), 则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 H, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 E, \quad (1.16)$$

(1.15)与(1.16)称为三维波动方程.

若将三维波动方程以标量函数的形式表示出来, 则可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 u = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.17)$$

其中 $\alpha^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}$, u 是 E (或 H) 的任意一个分量.

从方程(1.11)与(1.12)还可以推导出静电场的电位所满足的微分方程. 事实上, 以(1.12)代入(1.11)得

$$\operatorname{div} D = \operatorname{div} \epsilon E = \epsilon \operatorname{div} E = \rho,$$

而电场强度 E 与电位 u 之间存在关系

$$E = -\operatorname{grad} u,$$

所以可得

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

$$\text{或} \quad \nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (1.18)$$

这个非齐次方程称为泊松(Poisson)方程.

如果静电场是无源的, 即 $\rho = 0$, 则(1.18)变成

$$\nabla^2 u = 0, \quad (1.19)$$

这个方程称为拉普拉斯(Laplace)方程.

例 4 热传导方程

一块热的物体, 如果体内每一点的温度不全一样, 则在温度较高的点处的热量就要向温度较低的点处流动, 这种现象就是热传导. 由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化. 所以, 解决传热问题都要归结为求物体内部温度的分布, 现在我

我们来推导均匀且各向同性的导热体在传热过程中温度所满足的微分方程. 与上例类似, 我们不是先讨论一点处的温度, 而应该先考虑一个区域的温度. 为此, 在物体中任取一闭曲面 S , 它所包围的区域记作 V (图 1-3). 假设在时刻 t 区域 V 内点 $M(x, y, z)$ 处的温度为 $u(x, y, z, t)$, $\mathbf{n}$ 为曲面元素 ΔS 的法向 (从 V 内指向 V 外).

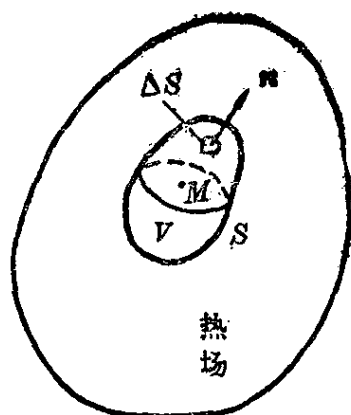


图 1-3

由传热学中傅里哀(Fourier)实验定律可知, 物体在无穷小时间段 dt 内, 流过一个无穷小面积 dS 的热量 dQ 与时间 dt , 曲面面积 dS , 以及物体温度 u 沿曲面 dS 的法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比, 即

$$\begin{aligned} dQ &= -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt \\ &= -k (\text{grad } u)_n dS dt \\ &= -k \text{grad } u \cdot d\mathbf{S} dt, \end{aligned}$$

其中 $k=k(x, y, z)$ 称为物体的热传导系数, 当物体为均匀且各向同性的导热体时, k 为常数.

上式中的负号是由于热量的流向和温度梯度的正向, 即 $\text{grad } u$ 的方向相反而产生的. 这就是说, 当 $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot \mathbf{n} > (<) 0$ 时, 物体的温度沿 $\mathbf{n}$ 的方向增加(减少), 而热流方向却与此相反, 故沿 $\mathbf{n}$ 的方向通过曲面的热量应该是负(正)的.

利用上面的关系, 从时刻 t_1 到时刻 t_2 , 通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \text{grad } u \cdot d\mathbf{S} \right] dt.$$

流入的热量使 V 内温度发生了变化, 在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内区域 V 内各点温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 变化到 $u(x, y, z, t_2)$, 则在 $[t_1, t_2]$ 内 V 内温度升高所需要的热量为

$$\iiint_V c \rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV.$$

其中 c 为物体的比热, ρ 为物体的密度, 对均匀且各向同性的物体来说, 它们都是常数.

由于热量守恒, 流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的热量, 即

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{S} \right] dt \\ &= \iiint_V c \rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV. \end{aligned}$$

此式左端的曲面积分中 S 是闭曲面, 假设函数 u 关于 x, y, z 具有二阶连续偏导数, 关于 t 具有一阶连续偏导数, 可以利用奥-高公式将它化为三重积分, 即

$$\iint_S k \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V k \operatorname{div} \operatorname{grad} u dV = \iiint_V k \nabla^2 u dV,$$

同时, 右端的体积分可以写成

$$\iiint_V c \rho \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dV = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt.$$

因此有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V k \nabla^2 u dV \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt. \quad (1.20)$$

由于时间间隔 $[t_1, t_2]$ 及区域 V 都是任意取的, 并且被积函数是连续的, 所以 (1.20) 式左右恒等的条件是它们的被积函数恒等, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.21)$$