

结构力学基础

蔡四维 主编

科学出版社

结构力学基础

蔡四维 主编

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了杆系结构力学的基本理论和计算方法。内容包括静定结构内力、位移计算、超静定结构的力法、位移法、力矩分配法、振动理论与计算、结构的能量原理及应用等,并对杆系结构的矩阵方法作了简要介绍。

本书可供一般科技人员、与建筑有关的技术人员和初学结构力学的大学学生及技术工人自学参考。

结构力学基础

蔡四维 主编

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1986 年 1 月第一次印刷 印张: 10 1/2

印数: 0001—8,000 字数: 239,000

统一书号: 13031·3059

本社书号: 4141·13—2

定价: 1.95 元

目 录

序 言

第一部分 结构静力学

第一章 概论	1
§ 1-1 结构力学的研究对象与任务	1
§ 1-2 结构力学发展简史	2
§ 1-3 本书内容	9
§ 1-4 杆系结构的基本概念	10
第二章 结构的机动分析	19
§ 2-1 结构机动分析的目的	19
§ 2-2 平面体系的自由度	20
§ 2-3 链杆系的自由度计算	24
§ 2-4 自由度计算的意义	25
§ 2-5 几何组成分析	26
第三章 静定结构的内力计算	30
§ 3-1 多跨静定梁	30
§ 3-2 静定平面刚架	38
§ 3-3 静定平面桁架	40
§ 3-4 三铰拱	49
第四章 结构的位移计算	60
§ 4-1 结构位移计算的意义	60
§ 4-2 莫尔积分法	61
§ 4-3 图乘法	66
§ 4-4 迭加原理与线性变形体系	72
§ 4-5 线性变形体系的互等定理	74

第五章 静定结构的影响线与活荷载	79
§ 5-1 活荷载与影响线	79
§ 5-2 简支梁的影响线	81
§ 5-3 伸臂梁的影响线	83
§ 5-4 多跨静定梁的影响线	85
§ 5-5 结点荷载作用下梁的影响线	87
§ 5-6 桁架的影响线	89
§ 5-7 三铰拱的影响线	94
§ 5-8 荷载位置已定时, 利用影响线求内力	96
§ 5-9 集中力系最不利位置的确定	99
§ 5-10 均布荷载最不利位置的确定	103
§ 5-11 简支梁的绝对最大弯矩	105
§ 5-12 梁的位移影响线	107
第六章 用力法解超静定结构	109
§ 6-1 力法的基本概念	109
§ 6-2 力法方程式	113
§ 6-3 基本系的选择	120
§ 6-4 弹性中心法	130
§ 6-5 具有内部赘余联系的桁架结构	139
第七章 位移法解超静定结构	144
§ 7-1 位移法的概念	144
§ 7-2 杆件的定端弯矩和角变位移方程	149
§ 7-3 位移法的法方程式	151
第八章 力矩分配法	161
§ 8-1 和位移法殊途而同归的方法	161
§ 8-2 弯矩的分配系数和传递系数	164
§ 8-3 多跨连续梁的力矩分配法	169
§ 8-4 对称与反对称问题	171
§ 8-5 关于侧移刚架	174
§ 8-6 连续梁的影响线	176

第九章 结构的稳定计算	182
§ 9-1 稳定问题的提出	182
§ 9-2 桁架压杆的稳定分析	183
§ 9-3 刚架的临界荷载	185

第二部分 结构的振动

第十章 结构振动概述	192
§ 10-1 振动问题的性质	192
§ 10-2 周期运动	193
§ 10-3 自由振动、强迫振动、自由度	196
第十一章 单自由度系统的振动	198
§ 11-1 单自由度系统的自由振动	198
§ 11-2 单自由度系统的强迫振动	202
§ 11-3 单自由度系统具粘滞阻尼的自由振动	206
§ 11-4 单自由度系统具粘滞阻尼的强迫振动	210
第十二章 多自由度系统的振动	213
§ 12-1 多自由度系统的自由振动	213
§ 12-2 频率方程式与振型	217
§ 12-3 多自由度系统的强迫振动	227
§ 12-4 用集中质量法计算梁的固有频率	228
第十三章 均质杆横向振动理论基础	233
§ 13-1 单梁横向振动的感应系数	233
§ 13-2 单梁的固有频率与主振型	245
§ 13-3 简单结构的感应系数和频率方程	251
§ 13-4 用位移法解刚架振动问题	261

第三部分 结构的能量理论与矩阵方法

第十四章 结构的能量理论及其应用	268
§ 14-1 结构的变形能	268
§ 14-2 卡氏定理	271

§ 14-3	虚功、虚变形能、虚功方程式	275
§ 14-4	余功、余变形能、余虚功、余虚变形能	279
§ 14-5	最小总势能原理、最小总余能原理	282
§ 14-6	用能量法求结构固有频率的近似值	288
§ 14-7	能量法计算压杆稳定问题的临界荷载	293
第十五章	结构矩阵方法简介	300
§ 15-1	概述	300
§ 15-2	矩阵基础知识	300
§ 15-3	线性代数方程组的解法	309
§ 15-4	位移法的矩阵计算	313

第一部分 结构静力学

第一章 概 论

§ 1-1 结构力学的研究对象与任务

任何一个工程建筑物, 都有结构力学问题需要解决。但凡设计桥梁、房屋、隧洞、水坝、船舶、飞机、导弹、宇宙飞船等等, 都应该保证在不同情况下, 当外荷载作用在这些结构物上面时, 它们在强度、刚度、稳定这三方面, 都能够满足需要。强度和稳定性的需要, 是要求结构物安全而又经济地工作。刚度的需要, 则要保证结构物不发生过大的变形。结构力学就是研究结构物的强度、刚度、稳定的有关原理和计算方法以及研究结构物的组成规律和分析结构的功能的科学。

任何一种结构物, 不外乎是一些杆件、板、壳、连续实体等的组合物。这些部件, 在外荷载作用下, 它们是怎样互相配合和承担任务的? 这是一个比较复杂的问题。有时还相当困难。在没有近代快速计算工具之前, 要想比较严格地按照结构的真实情况作出很详细的分析计算, 简直是异常困难且无法做到的。那时人们只好从便于计算的角度出发, 人为地将一个结构物作适当解剖, 分门别类地提出所谓杆系结构, 板、壳结构, 连续实体结构等等的计算方法。这样做的实质是, 抓住实际结构的主要矛盾, 忽略次要因素, 以期求出问题的近似解。通过长期的实践和科学的实验, 说明这种处理方法是合理可行的, 其精度上的误差, 对一般工程来说也是容许的。这样, 通过长期的研究和实践, 形成了“杆系结构力学”、“板、壳理

论”、“连续块体力学”等。以往所称的“结构力学”，则是专指杆系结构力学而言的。到了近代，在工程中，结构愈来愈复杂，需要考虑的因素也越来越多，对精度的要求也越来越高，而过去近似处理的一些作法，已不能满足实际需要了。自从利用电子计算机以后，由于电子计算机能以很快的速度、很高的精度，来帮助我们去进行分析计算，这就给我们提供了一个工具，使之能够比较精确地分析计算结构物的实际复杂的工作状态。而结构力学也可以按实际结构的本来面目来进行分析计算了。

§ 1-2 结构力学发展简史

十九世纪以前，结构力学还只是力学中的一个分支而没有单独形成一门学科，当时也只有一些关于梁和柱的计算理论。到十九世纪前半期，资本主义经济继续发展，需要很多复杂的、规模很大的建筑（如厂房、堤坝、船舶、桥梁、起重装置等），从而提出了较为复杂的计算问题，特别是十九世纪三十年代，随着蒸汽机的使用而出现铁路桥梁工程，随着桥梁荷载和跨度的加大，其结构型式也随着发生了变化，人们开始利用连续梁、桁架等一类的更为经济合理的结构。工程材料上也开始使用钢材，使钢梁以及大跨度钢桁架结构成为可能。从而形成了连续梁和桁架的计算理论，为结构力学的理论和分析计算，初步奠定了基础。这期间，美国的费伯尔工程师和俄国的茹拉夫斯基工程师，同时提出的桁架计算理论，对推动当时结构力学的发展，有很大的贡献。

十九世纪中期到后半期，钢结构被广泛采用，在结构设计中，要求精确合理的结构计算，从而又推动了计算理论发展。在这个阶段里，不论是连续实体计算、杆系结构计算，还是板、

壳的理论计算, 都有巨大的进展. 杆系结构变形和超静定结构的一般理论, 就是在这个时期内逐渐建立起来的. 其中英国麦克斯威尔 1864 年提出了超静定结构力法方程; 意大利卡斯蒂里亚若 1879 年提出了用变形能求结构位移及计算超静定结构的理论; 德国莫尔发展了利用虚位移原理求位移的一般理论. 在连续实体结构方面, 这时期人们已经建立了满足物体的平衡、连续、材料性质三方面条件的偏微分方程组, 并利用边界条件来解这些微分方程式, 以计算物体的应力和形变. 1862 年艾雷并提出平面弹性体的分析方法; 1850 年克希霍夫解决了平板的平衡与振动问题; 1874 年爱隆提出了薄壳问题理论. 这些都具有很大的理论与实用价值.

二十世纪初, 建筑工程上开始采用钢筋混凝土结构. 基于这种材料和结构的特性, 人们提出了杆系刚接结构的计算理论. 二十年代, 又确立了刚架结构的位移法. 三十年代, 美国克劳司则提出了属于渐近解的力矩分配法. 这些方法, 至今仍被工程上广泛采用. 之后许多年, 非线性理论、各向异性弹性体理论、薄壳理论等得到很大发展. 随着机械工业的迅速发展, 振动荷载也日益增大, 大型建筑工程的设计等, 都需要考虑到结构的振动及地震等问题. 于是, 结构动力学又得到了新的发展, 与此同时, 由于大型杆系结构、薄壁结构的出现, 结构的稳定问题也就随之产生, 并最后形成了一门独立的学科.

迄今, 结构力学已具备了一整套成熟的基础理论, 它能够用来解决结构设计中的多种计算问题. 它对改进设计质量、降低结构物造价以及适应近代日益复杂的设计任务, 起了很大的作用.

近年来, 由于电子计算机的出现, 它能以较快的速度和较高的精度, 帮助人们进行计算, 这不仅减轻了繁重的计算工

作,并且能够担任许多过去无法进行的计算任务,以满足实际复杂的结构设计需要。此外,电子计算机的利用,也改造提高了结构力学的内容,使结构力学在研究对象、基础理论、计算模型、数学工具各方面都发生了很大的变化。

在上节里,我们谈到了过去为了计算的方便而人为地将一个整体结构物划分为杆系、板、壳、连续实体等作单独分析计算。大约在本世纪五十年代中期,在飞机结构的分析计算中,首先提出将一架整体的飞机设想成是由许多个离散单元体组成的集合,而这些单元体仅仅看成为是在它们的结点(指单元角点或边界上某些点)上互相联系着的。将每个单元(象杆系结构的单杆一样看待)按杆系结构变位法一样的道理,建立各单元结点的平衡和连续性条件,同时利用电子计算机来建立这些条件的方程式并求解,这就创立了目前结构计算的“有限元素法”。这种新的方法,可以直接分析计算任何一个实际的整体结构,而不仅仅局限于杆系、板、壳、连续实体等单一系统。新的计算方法,对任何一个算题,都可以按统一的程序(将物体剖分成一个个单元,一直到考虑结构的物性、平衡、连续条件以导出一系列的代数方程式而后求解)来进行分析计算。这种新的方法对实际结构物的不同工作状态和实际情况都能很方便地加以分析计算。例如,过去为了简化计算而将空间结构化作平面结构处理;将动态化为静态;将非线性化为线性等等,现在都可以从实际和需要出发而放弃这些假定。新的计算方法在数学工具上,充分采用了离散化的数值计算,且分析时都采用矩阵,因为应用矩阵可使运算工作更简洁,也便于作电子计算机的程序设计。总而言之,采用这种新的计算方法,使人们能够得到真实可靠的结果,使结构力学在工程建设中的作用更富有成效。

应该特别指出的是,我国远在古代在结构工程实践和结

构力学方面就取得了许多辉煌成绩和作出了卓越的贡献。中国科学院在西安郊区曾发掘出新石器时代的建筑遗迹，它表明当时我国对木结构即已初具规模。长期以来，我国在充分发挥不同建筑材料特性、采用合理的结构型式方面，作出了优异成绩。四川灌县的都江堰，是秦朝（公元前 221—202 年）蜀郡太守李冰父子和川西劳动人民所建造的。用直径为 1 米、长约 33 米的竹笼，中间填满卵石，堆筑成堤，把岷江分为内外两江，内江灌溉，外江排洪。这座构造简单而规模宏伟的结构，历经两千余年而至今仍然完好，为中外水工结构专家所称道。据水经注所载，晋代我国就已知道利用石料的抗压性能高的特点来建造石拱桥。隋朝（公元 581 至 618 年）李春、李通等工匠所建河北赵县安济石拱桥，跨长 37.02 米，宽 10 米，拱矢 7.28 米，桥身全长 50.82 米，桥拱上有四个附拱，以减轻桥身自重并利于排洪，这种型式的桥，在欧洲到 1912 年才有出现。南北朝时（公元 420 至 580 年）我国西北地区即流行用伸臂式木结构桥，桥梁两端作成伸臂，以支持中间的简支梁，这是短梁跨过宽河道的卓越结构型式。建造在四川泸定的大渡河铁索桥，跨长 104 米，这座桥我国早在 1696 年就已建成，其后 45 年，英国才建成 20 英尺跨长的铁索桥。这些实例足以说明，我国古代劳动人民的结构力学水平，一直在当时欧洲各国之上，生产力的发展程度，当时也在全世界范围内领先，但是由于封建社会制度的束缚，限制了生产力的进一步发展。也限制了科学技术水平的提高，对古代这些宝贵的实践经验，没有能提高到理论分析阶段加以总结。甚至到新中国成立之前，欧美各国科学技术事业飞速发展，而我国的科研事业，仍然受到反动统治的阻挠与摧残，当时虽有少数学者，从事于研究工作并作出一定的贡献，但成绩仅散见于国内外杂志期刊，而没有系统整理。

新中国成立以来,党领导全国人民从事社会主义建设,出现了空前的兴旺景象,先后建成了很多宏伟的建筑,这些工程,不论在规模、设计和施工技术各方面,都达到了世界先进水平,这些工程的兴建,也提出许多新的复杂技术问题,这些问题反过来又推动了结构力学理论的迅速发展。这些年来,我国结构力学工作者除研究和改善已有的经典力学方法之外,也提出了许多新的具有创见性的方法。

例如,对改进工程上最常用的力矩分配法方面,1954年由俞忽提出,周泽西、王磊等参加推广的“集体分配法”,将刚架结点分为主结点、附属结点两组,先将不平衡力矩集中于各主结点,引进主结点的“集体分配系数”从而显著地加快了解题的收敛性;1957年刘恢先提出“旋转力矩法”,以旋转力矩为未知量进行松弛,使问题的未知数减少而计算工作简化。1954年孟昭礼提出的“角变传播法”、1954—1958年蔡方荫、顾翼鹰提出“不均衡力矩传播法”1956年魏链提出的“不均衡力矩和侧力传播法”这些都只需利用所谓“刚构常数”将有关不均衡因素作传播,最后一次分配即可得出刚架各杆端弯矩而不必像原有力矩分配法那样进行多次分配传递。

我国在空腹桁架分析方面,取得了优异成绩,已形成了一套简便而切实可行的方法。1950年由钱令希、胡海昌提出,并由潘家铮、陈叔陶等参加推广的“调整分配法”,使每一次分配过程、弯矩和切力同时获得平衡,从而使这类复杂的刚架计算与用普通力矩分配法来分析刚性支承上连续梁一样简单。这个方法比国外发展的“无切力分配法”应用范围更为广泛。

关于弹性地基梁方面,解放后开始学习研究将地基假定为半无限体的新理论。1954年钱令希提出的级数解,为这项研究工作树立了良好开端,他的近似公式应用起来非常简便,至今为一些工程设计人员所偏爱。在钱令希教授创导下,曾

出现一个开展这项研究工作的热潮。1956年田千里提出的“初参数法”，具有古典文克尔地基梁理论初参数法的许多优点。1956年陈叔陶对国外链杆法提出改进，以简支梁作基本结构以代替国外悬臂梁基本结构，可以减少链杆法方程式的个数。1959年蔡四维提出的新解法，直接用地基沉陷量计算梁截面弯矩并引进梁挠度二阶微分方程的差分格式，方法上公认为较新颖，应用上其方程个数比国外链杆法少，方程式的系数计算也非常容易，方程式迭代求解收敛快。新近湖南大学应用数学力学组对这种方法再次提出改进，解决了梁上集中力矩作用和截面突变影响。1965年丁大钧提出对链杆法的另一改进方法，其基本结构是：当对称荷载时，采用中心固定的悬臂梁，当反对称荷载时，采用有悬臂的两支点梁，这样能减少链杆法方程的个数，并使系数计算简单。1959年潘家铮提出了弹性地基上框架的算法。1957年洪承礼提出了埋设在半无限弹性体中基础反力分布的研究成果。这些富有实用价值的研究工作，为实际工程建设作出了贡献。

1953—1958年蔡方荫提出变截面梁、变截面刚构的整套研究成果。他编制的变梁常数表，只须根据荷载和杆端约束情况，就可直接查出杆端弯矩，在电业基本建设部门有效地使用了这套表格。

以上仅谈到刚架静力分析方面的部分成果。静力计算的新的成果，很自然地会被转用到动力计算方面而促进结构动力学的进展。对动力问题的其他方面，如地震荷载、结构抗震问题等，都作有深入研究，取得了可喜的成绩。对板、壳、实体结构方面的理论分析计算，也都如此，这里不一一列出了。通过这些，已足见新中国成立以来在结构力学这一领域我们的成就是很大的。但是之后若干年间，由于种种原因，我国在应用电子计算机作结构计算方面，则显得落后了。上面谈到的

一些研究成果,都只是当年以手算为依据的条件下提出来的。从目前电算需要的角度来看,上述方法不免有很多不足之处了。但是也仍应该看到,例如前面谈到的钱令希空腹桁架平行弦的无切力分配法由于基本公式所具有的优点,当编制程序在电子计算机上计算时,仍比其他计算方法优越。用它来解高层对称刚架所需的计算机时间,比目前国外普遍采用的位移法要大大减少。蔡方荫的变截面刚架算法,当编制程序用电子计算机求解时,不仅比有限元素法快,而且精度高。俞忽的集体分配法,如用到弹性理论的差分网格法计算上,将比目前国外的松弛法收敛快。蔡四维的弹性地基梁解法,由于方程式简单、方程组迭代求解收敛快,从电算的角度来看,仍不失其价值。可见,在看待我国已取得的科研成果时,如何仔细去研究其理论方法和实质,取其精华,进一步探讨使之发展改进,以适应近代计算需要,将是今后科研工作的一个有益的方面。我们要学习国外的长处,看到自己的差距,取长补短,但也不必妄自菲薄,只看见自己国家落后的方面而看不到我国已取得的科研成果。

最后,还应该强调一下我们国家在“有限元素法”这一先进方法上的贡献。前节介绍过“有限元素法”是50年代中期在国外由一些力学工作者根据飞机结构计算而提出来的。六十年代,吸收了少数数学工作者参加,弄清了这个方法其数学实质是微分方程式的一种数值解法,是与变分原理相联系的。之后又投入了更多力量对这种方法研究收敛、误差方面的问题,并推广到不存在变分原理的问题及非结构问题上去。但也应看到,我国对这种新的方法的基础理论研究较之西方各国并不逊色,而仅仅是在实际应用方面,比较落后。早在1954年,胡海昌提出的“广义变分原理”是固体力学中很有价值的理论,日本鷺津久一郎于1955年也独立地提出这相同的

原理,这就是目前国际上的胡海昌-鹭津久一郎变分原理,而这正是研究“有限元素法的有利工具。此外,六十年代初,冯康即已独立于西方而创立了当时命名“基于变分原理的差分格式”的方法,这个方法,即就是目前国际上通称的“有限元素法”。因此,对这个具有巨大生命力的先进方法,在时间上,可以认为我国和西方是同时提出的。而且,与西方各国不同的是,冯康教授一开始就从数学的观点提出问题 and 解决问题的,而且重视理论和实践的统一。

§ 1-3 本书内容

前面已经谈到过去为了计算上的方便,将一个整体结构人为地划分为杆系结构、板、壳结构,连续实体结构等。到了近代,由于利用电子计算机而能按结构物的本来面目,对全结构进行整体计算。由此,新写一本结构力学方面的书,就应该从变分原理出发,利用矩阵数学来分析计算实际的整体结构了。但是,作为结构力学的一本入门书,向初学者作介绍,我们以为仍按旧的体系,专谈些杆系结构,可能还是很有必要的。一方面,前述新的结构计算方法,从力学观点来看,是从杆系结构位移法的道理得到启发而提出来的,杆系是一种很自然的有限元素组合模型。因此熟习一下杆系结构的基础理论、计算方法,对进一步学习了解有限元素法,无疑是有益的。此外,从整体结构中人为地抽出来的杆系结构,其计算结果,虽然是近似的,但长期以来的实践证明,所得到的结果还是符合一般规律的。因此,通过杆系结构的学习,掌握它们的力学性质,对进行整体结构设计、对有限元素法计算结果的检验等,仍然是有用的。何况目前大部分从事基层工程技术的工作人员,在处理一些中小型的结构工程时,往往还需要用到本书