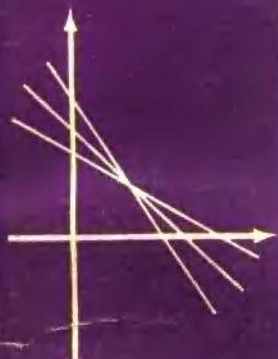
中学教学参考丛书



矩阵与线性方程组

山东人民出版社

中学教学参考丛书

矩阵与线性方程组

杨子胥 编

山东人民出版社

一九八〇年·济南

中学教学参考丛书

矩阵与线性方程组

杨子胥 编

山东人民出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂临沂厂印刷

787×1092毫米32开本　6印张　127千字

1980年5月第1版　1980年5月第1次印刷

印数：1—12,000

书号　7099·923　　定价 0.48 元

编 者 的 话

为了适应中学数学教学的需要，在这本小册子里，我们较为系统地介绍了线性方程组的一般理论。

在讲述线性方程组时，一般都要用到向量的线性相关性。但是，这一概念比较抽象，难于掌握。为了简单易懂，更适于中学数学教学参考，我们在本书中将以行列式和矩阵为工具，采取由简到繁、由特殊到一般的方法来讲述。但考虑到向量在代数，特别是在线性代数中的地位和作用，最后又作了简略介绍，以便读者学习时，起到承前启后、融会贯通的作用。

本书对于一些公式的来源，方法的引进，问题的解法，一般都作了较详细地解释与交代，以便读者深刻领会，掌握实质。

一九八〇年一月

目　　录

引　　言

大家知道，含两个未知量 x 和 y 的实系数一次方程

$$ax+by=c,\qquad a, b\text{不全为零}.$$

在平面直角坐标系中的图象是一条直线.由于这个原因，常把这种方程叫做线性方程.后来又加以推广，把含有多个未知量 x，y，…，z 的一次方程

$$ax+by+\cdots+cz=d$$

都叫做线性方程.其中的 a，b，…，c，d 也不限定为实数，可以为任意常数.

对于含多个未知量的线性方程来说，未知量常用 x_1，x_2，…，x_n 来表示，其中 n 可以是任意的自然数.这样表示还有一个优点，就是 n 本身明确指出了这个方程中未知量的个数.

如果把含 n 个未知量的多个线性方程联立起来，就得到我们所说的线性方程组了.线性方程组的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}\qquad (1)$$

其中 x_1，x_2，…，x_n 代表未知量，而 a_{ij}，b_i（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）代表任意常数；a_{ij} 为第 i 个方程

中第j个未知量x_j的系数，而b_i称为常数项。

方程组(1)中包含m个方程，每个方程都有n个未知量。其中m与n为任意的自然数，它们可以相等也可以不相等。

如果有一组数$x_1=k_1$，$x_2=k_2$，…，$x_n=k_n$，满足方程组(1)中的每一个方程，我们就把这组数叫做这个方程组的一个解。说它是"一个解"，是因为虽然这个解中包含着有次序的一组数，但作为方程组的解来说应该说是"一个"，而不应该说是"一组"。比方说，一个班中虽然包括好多同学，但作为班来说，只能说"一个班"，而不能说成是"一组班"。

设有两个方程组甲与乙，它们都含有n个未知量，但所含方程的个数不一定相等，如果两者都无解，或者当有解时两者有完全相同的解时，称方程组甲与乙同解。

线性方程组的应用非常广泛，不仅在数学本身，而且在物理学、建筑工程学和其他科学技术中都经常要用到。如有很多问题，由于各因素之间存在着错综复杂的相互制约关系，就可以通过线性方程组把它们间的数量关系表示出来。这样一来，问题的解决就常常归结为求线性方程组的解。比方说，在天气预报中要预报七月份的降水量，就需要首先考察与它有关的因素。例如，以往每年七月份的降水量以及头年十二月份或当年一、二月份的降水量和风力、气压、温度、湿度等，都可能同要预报的降水量之间有一定的关联，因而常常要解一个线性方程组来解决这个问题。又如，在管道网络（自来水管道、煤气管道、输油管道…，等等）中，为了计算各管道上的流量，也常常需要解一个线性方程组。这种例子很多，不胜枚举。

当然，在实践中遇到的线性方程组，一般来说方程的个数和未知量的个数都很多，解这种方程组，就要依赖电子计算机来进行。但是，应该指出，有关线性方程组的基本理论是整个问题的基础。我们在这本书中，就要较为系统地介绍其中最基本的部分.具体有以下几个方面：

第一、线性方程组何时有解？何时无解？给出一个线性方程组有无解的一般判别方法；

第二、当方程组有解时，它有多少解？把它的解具体写出来；

第三、如何具体地求出它的一切解？给出线性方程组的具体求解方法。

这些问题的讲述和解决，在一般高等代数中都有.但是，多半都牵涉到向量线性相关性的概念。在此书中，我们紧密结合中学实际，以行列式和矩阵为工具，尽量采用简便方法来介绍，在先讲述一类特殊线性方程组的基础上，再进一步利用矩阵来介绍一般的线性方程组。

所谓一类特殊的线性方程组，是指方程同未知量的个数一样多的那种线性方程组.其一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

行列式和矩阵都是数学中最基本的概念之一，在数学中占有重要地位，不但在学习线性方程组的理论要用到它们，在近代数学、物理学及其他科学技术中，也要用到它。

行列式理论来源于解线性方程组。它是由德国数学家雅可比（*Jacobi*,1804年—1851年）于1841年系统建立起来的。在第一章中我们将围绕着解线性方程组这一中心问题来展开对行列式的讲述。向量在线性代数中，也有着重要作用，因此，在讲完行列式和矩阵之后，也略加介绍。

第一章　行列式

一、二阶行列式

在这一节中，先介绍最简单的二元一次方程组，并由此引出二阶行列式。

二元一次方程组的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

这个方程组的解法如下：分别用a_{22}与$-a_{12}$乘方程组中第一、二两个方程，然后相加，x_2的系数变为零，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \qquad (2)$$

同样，用$-a_{21}$与a_{11}分别乘方程组中第一、二两个方程，然后相加，x_1的系数变为零，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \qquad (3)$$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，由(2)与(3)得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (4)$$

这就是方程组(1)在$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时的求解公式。

由此可见，对方程组(1)来说，只要知道了它的系数和常数项，当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，通过公式(4)就可以求出它的唯一解来。

我们知道，作为一个公式，不仅应该使我们用起来方便，而且也应该尽可能便于记忆和掌握。

由(4)直接看出，x_1与x_2的分母相同，都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。它是两项的差，并且正好是方程组(1)中四个系数按照一定关系组合而成。根据这一特点，我们现在要特别引用一个记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

来表示差$ad-bc$。它就是上面记号中左上角的a与右下角的d相乘，再减去右上角的b与左下角的c相乘。即：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

我们称它为一个二阶行列式，并且把横的称为行，纵的称为列；其中a,b,c,d称为这个行列式中的元素。

在这一规定下，首先可以看出，公式(4)中x_1与x_2的公分母就可以表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

它正好是原方程组中各系数按原来相对位置所构成的一个二阶行列式。我们自然地称它为方程组(1)的系数行列式。

其次，x_1与x_2的分子又可分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

这样一来，公式(4)通过二阶行列式就可以改造为以下形式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}. \tag{5}$$

应该特别强调的是，把公式(4)改造成公式(5)，虽然在写法上并不见得省事，但公式(5)同(4)相比，却有很强的规律性．那就是：它们的公分母都是原方程组的系数行列式；而x_1的分子就是把系数行列式的第一列换成常数项b_1、b_2所得到的行列式；x_2的分子正好是把系数行列式的第二列换成常数项b_1、b_2所得到的行列式．

由此可见，作为公式来说，只要记住二阶行列式的运算规律，便容易记忆和掌握．

当然，对于二元一次方程组来说，即使没有这样的公式，直接利用加减或代入消元法来求解，也很简单．但是，以后将会看到，这种特殊情况将带有普遍性，它的重要意义在于可以启发我们去考虑更一般的结论．

例 1　用二阶行列式解下列方程组：

$$\begin{cases}2x_1+x_2=1\\ 3x_1+4x_2=-11.\end{cases}$$

解　因为这个方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=8-3=5\neq 0,$$

而且

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ -11 & 4\end{vmatrix}=4-(-11)=15,\quad \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -11\end{vmatrix}=-22-3=-25,$$

故根据公式(5)得原方程组的解为

$$x_1=\frac{15}{5}=3,\quad x_2=\frac{-25}{5}=-5.$$

例 2 用二阶行列式解下列方程组：

$$\begin{cases}4x_1-x_2=-5\\6x_1+5x_2=38.\end{cases}$$

解 因为此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}4 & -1\\6 & 5\end{vmatrix}=20+6=26\neq 0,$$

而且

$$\begin{vmatrix}-5 & -1\\38 & 5\end{vmatrix}=-25+38=13,\quad \begin{vmatrix}4 & -5\\6 & 38\end{vmatrix}=152+30=182,$$

故得原方程组的解为

$$x_1=\frac{13}{26}=\frac{1}{2},\qquad x_2=\frac{182}{26}=7.$$

例 3 解方程组：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=1\\6x_1+4x_2=2.\end{cases}$$

解 因为此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{vmatrix}=12-12=0,$$

故不能利用公式(5)求解.这种方程组的解法以后讨论.

习 题 一

1. 计算以下二阶行列式：

(1)$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$; (2)$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; (3)$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

(4)$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ -a & b \end{vmatrix}$; (5)$\begin{vmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1+3\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} & 1-2\sqrt{2} \end{vmatrix}$。

2。用行列式解下列方程组：

(1)$\begin{cases} 2x_1+3x_2=3 \\ 18x_1+12x_2=7; \end{cases}$ (2)$\begin{cases} 2x_1+3x_2=0 \\ 3x_1+2x_2=0。 \end{cases}$

3。证明： (1)$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$;

(2)$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$。

4。设b,d都不是零，证明：

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$的充分与必要条件是$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$。

5。设$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，证明：

(1)$\begin{vmatrix} \omega & -\omega \\ 1 & \omega \end{vmatrix}=-1$; (2)$\begin{vmatrix} \omega^2 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}=0$。

二、三阶行列式

含三个未知量和三个方程的线性方程组的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3。 \end{cases} \tag{1}$$

这种方程组的解法如下：先用$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$依次乘方程组中的第一、二、三个方程（为什么用这些数乘，现在看来有些突然，在第七节中将看出它的由来），然后相加，经计算可知，x_2与x_3的系数全变成零，得

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\
&\quad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\
&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3\\
&\quad -a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

同理，分别用$a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$，$a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$，$a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$乘第一、二、三个方程，然后相加，$x_1$与$x_3$的系数变成零，且

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\
&\quad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_2\\
&=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}\\
&\quad -b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

最后，分别用$a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$，$a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$乘第一、二、三个方程，然后相加，$x_1$与$x_2$的系数变成零，得

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\
&\quad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_3\\
&=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{33}\\
&\quad -a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

当（2）、（3）、（4）式中x_1，x_2，x_3的系数不等于零时，可得原方程组的唯一解为：

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&\quad \frac{-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\
x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&\quad \frac{-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\
x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&\quad \frac{-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}.
\end{aligned}
\right. \tag{5}
$$

这就是三元一次方程组（1）在$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$时的求解公式。

很显然，这虽然也是一个公式，但过于复杂，为了便于记忆和掌握，我们可将这个公式作如下改变。

以二阶行列式来解二元一次方程组为借鉴，对三元一次方程组的求解公式（5），类似地引用三阶行列式改写如下，即：

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}
$$

并且称它为<u>三阶行列式</u>。

三阶行列式的特征是，共有九个元素，排成三行三列；它代表6项相加，其中有三个正项，三个负项；每项都是三个元素之积，且三个元素位于D中不同的行和不同的列。