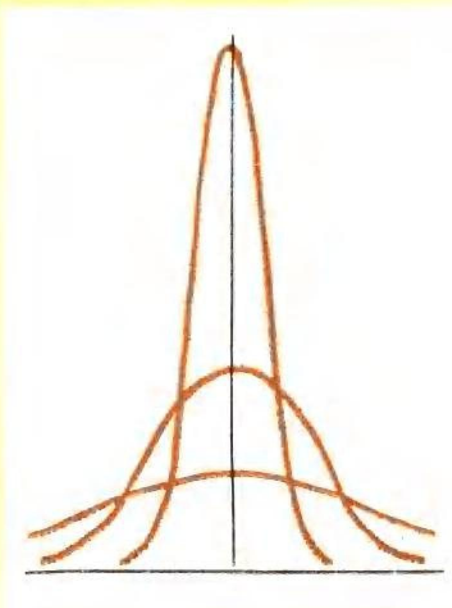
工科大学数学丛书

应用概率统计

天津大学概率统计教研室 编



天津大学出版社

工科大学数学丛书

应用概率统计

天津大学数学系概率统计教研室编

天津大学出版社
1990年

内 容 提 要

本书是根据国家教委1987年制定的《高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求》编写的教材。内容包括随机事件与概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析。

本书叙述详细、文字流畅、内容适当、例题较多、书末还附有习题答案，便于教学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员自学之用。

应用概率统计

天津大学数学系概率统计教研室

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：14 1/2 字数：377千

1990年8月第一版 1997年5月第五次印刷

印数：23 001—28 000

ISBN 7-5618-0203-X

O·23 定价：16.00元

前　　言

本书是根据国家教委1987年制定的《高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求》，结合我校多年来教学实践经验编写的。

概率论与数理统计的研究对象是随机现象的数量规律。考虑到这一学科的特点，我们在编写本书时，自始至终注意说明各概念的现实背景和实际意义。为便于自学，在叙述上力求通俗易懂、深入浅出。对基本理论，除详尽分析外，本书还收入大量典型例题，以使学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，培养他们解决实际问题的能力。各章均配有习题，书末附有全部习题答案及有关概率统计用表。全书所需教学时数为64—68学时，其中概率论基础部分为32—36学时，数理统计部分为32学时（参数估计与假设检验16学时，方差分析与回归分析16学时）。

本书分别由彭大鹏（第一、三章），尚泰寅（第二、四章），王家生（第五、六章），徐漪萍（第七章），田广武（第八章），王佩荔（第九章）执笔。

本书是在马逢时教授的直接指导下编写而成的。马逢时教授、欧俊豪副教授审阅了全书，提出了重要的改进意见。谨在此表示衷心谢意。

由于编者水平所限，不妥之处恳请读者批评指正。

编者

1988.9

目　　录

前言

第一章　随机事件和概率…………………………(1)

§1.1　随机现象和随机试验 …………………………(1)

§1.2　随机事件和事件域 …………………………(4)

§1.3　概率的公理化定义 …………………………(10)

§1.4　古典概型 …………………………(13)

§1.5　条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式 …………………………(22)

§1.6　相互独立的随机事件 …………………………(29)

§1.7　贝努里(Bernoulli)概型…………………………(35)

习题…………………………(38)

第二章　随机变量及其分布…………………………(44)

§2.1　随机变量及其概率分布的概念 …………(44)

§2.2　随机变量的分布函数 …………………………(48)

§2.3　离散型随机变量的概率分布和分布函数 …………………………(50)

§2.4　连续型随机变量的概率密度 ……………(71)

§2.5　随机变量的函数的分布 …………………………(95)

§2.6　随机变量的数字特征 …………………………(103)

§2.7　几种重要分布的数学期望与方差 ………(129)

习题…………………………(136)

第三章　多维随机变量…………………………(148)

§3.1　多维随机变量和联合分布 ………………(148)

§3.2　边缘分布 ……………………………………（155）
§3.3　条件分布 ……………………………………（160）
§3.4　随机变量的独立性 …………………………（168）
§3.5　条件期望 ……………………………………（172）
§3.6　多维随机变量的函数的分布 ………………（176）
§3.7　多维随机变量的数字特征 …………………（185）
习题……………………………………………………（198）
第四章　大数定律和中心极限定理……………………（207）
§4.1　随机变量序列的相互独立性与两种收敛方式……………………………………………（207）
§4.2　大数定律 ……………………………………（208）
§4.3　中心极限定理 ………………………………（212）
习题……………………………………………………（218）
第五章　数理统计的基本概念…………………………（220）
§5.1　总体与样本 …………………………………（221）
§5.2　统计量及其分布 ……………………………（225）
习题……………………………………………………（244）
第六章　参数估计………………………………………（247）
§6.1　参数估计的意义 ……………………………（247）
§6.2　点估计 ………………………………………（248）
§6.3　估计量的评选标准 …………………………（258）
§6.4　区间估计 ……………………………………（265）
习题……………………………………………………（277）
第七章　假设检验………………………………………（282）
§7.1　假设检验的基本概念 ………………………（282）
§7.2　参数假设检验 ………………………………（286）
§7.3　非参数假设检验 ……………………………（303）
习题……………………………………………………（319）
第八章　方差分析………………………………………（327）

§8.1 单因素重复试验的方差分析 ……………… (328)
§8.2 单因素不等重复试验的方差分析 ……… (338)
§8.3 双因素无交互作用试验的方差分析 …… (347)
§8.4 有交互作用的双因素方差分析 ………… (352)
§8.5 双因素试验的线性模型 ………………… (361)
§8.6 方差分析小结 …………………………… (366)
习题…………………………………………… (367)
第九章 回归分析…………………………………… (371)
§9.1 两种不同类型的变量关系 ……………… (371)
§9.2 一元线性回归 …………………………… (373)
§9.3 回归系数与相关系数 …………………… (381)
§9.4 回归方程的方差分析 …………………… (385)
§9.5 回归方程的预报与控制 ………………… (392)
§9.6 一元非线性回归 ………………………… (396)
习题…………………………………………… (406)
习题答案…………………………………………… (408)
附录
表一…………………………………………… (429)
表二…………………………………………… (432)
表三…………………………………………… (434)
表四…………………………………………… (436)
表五…………………………………………… (438)
表六…………………………………………… (454)
表七…………………………………………… (455)
表八…………………………………………… (456)

第一章　随机事件和概率

§1.1　随机现象和随机试验

一、随机现象、概率论研究的对象

人们通常把自然界或社会中出现的现象分成二类，一类是必然的（或决定性的），一类是偶然的（或随机性的）。例如，在标准大气压下，水加热到100°C时必定沸腾；气体在一定条件下满足状态方程式$PV=nRT$；等等。这些都是必然的。进行产品质量检验，抽取一件产品是次品；掷一次硬币出现正面（如把国徽向上叫正面）；等等。这些都是偶然的。还可以举出许多例子说明，有些事情的出现是必然的，有些事情的出现则是偶然的。但是偶然性和必然性并不是永远互相排斥的两个范畴。恩格斯在《自然辩证法》一书中说："这两者是同一的，偶然的东西是必然的，而必然的东西又是偶然的"。以水的沸腾为例，所谓水沸腾，由分子物理学看来就是有大量水分子克服大气压力，逸出水面飞到空气中去了。本来，即使水温不到100°C，水分子也有逸出水面飞到空气中去的现象，从微观世界（分子世界）来看，每个水分子逸出水面飞到空气中去，或从空气中进入水里去，完全是偶然的，只不过是在水温升高的情况下，水分子的运动速度加大，这些偶然飞出去和偶然进入水里的水分子中，飞出来的水分子加多了。等到水温升到100°C时，水分子的运动速度加大到这种程度，可以克服大气对它的压力，于是就有很多水分子飞到空气中去，这就出现了沸腾现象。所以在标准大气压下，水在100°C沸腾这个必然性，就是大量作偶然运动的

水分子的集体现象的规律性表现。又如，掷硬币，每次抛掷出现正面或反面纯粹是偶然的，但是这种偶然性里也有必然性，掷过许多次以后，可以发现，将近一半次数出现正面，另一半出现反面。所以恩格斯说：偶然性和必然性的对立“仅有相对的意义”，“那种断定为必然的东西，是由种种纯粹的偶然所构成的，而被认为是偶然的东西，则是一种有必然性隐藏在里面的形式”。（《费尔巴哈与德国古典哲学的终结》第34页）

概率论是研究大量偶然现象中所出现的必然规律的一门数学学科，它揭示了偶然性和必然性之间的联系，指明在什么条件下，偶然性向必然性转化。概率论的理论和方法（包括数理统计等）发展到今天，在各门科学技术，在工业、农业、林业各部门，在社会经济管理中都有广泛的应用。

二、随机试验

每门学科总要先规定一些术语．在概率论中首先遇到的是随机试验这个概念，这里所说的试验既包括做一个实验，也包括进行一次测量，或做一次抽样观察，就是说我们以后都把它们统称为试验。

所谓随机试验是指具有下列三个特性的试验：

（1）可以在相同条件下多次重复进行的试验；

（2）每次试验的可能结果有多个，并且事先知道会有那些可能的结果；

（3）在进行一次试验之前，不能事先断定那个结果会发生。

随机试验以后也简称为试验，常用E表示．随机试验可能出现的每一种结果叫做基本事件，用ω或ω_1，ω_2，…表示，全体基本事件所组成的集合叫做基本事件空间或样本空间，用记号Ω表示．基本事件也叫做样本点。

例1　E：抽样检查产品的质量，可能得正品、副品、次品，$\Omega=\{$正品、副品、次品$\}$。

例 2　E：掷一枚硬币，观察出现正面或反面，$\Omega=\{$正，反$\}$.

例 3　E：掷一颗骰子，观察出现的点数$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

例 4　E：记录某电话交换台上午九点内接到呼唤的次数，$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$。

例 5　E：在一批显像管中任取一只，测试它的使用寿命 t，$\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$。

例 6　E：黄河某观察站观察黄河每年最高水位h，$\Omega=\{h \mid h\geqslant 0\}$.

例 7　E：观察天津市的年最低气温x，$x>t$，最高气温y，$y<T$以(x, y)表示一次观察数据，t、T是两个常数，显然有$t<x<y<T$，

$$\Omega=\{(x, y) \mid t<x<y<T\},$$

Ω是图 1-1 中所示阴影部分点的集合（不包括边界）。

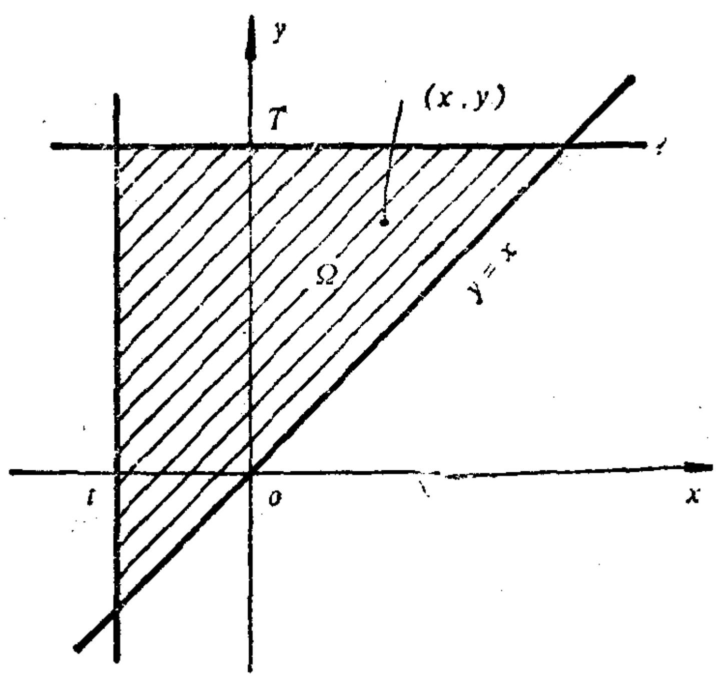


图 1-1

由上述例子看到，基本事件空间Ω所包含的基本事件的数目，可以是有限个，如例 1，2，3，也可以是可列多个（即能和自然数建立一一对应，亦即和自然数一样多），如例 4；也可以是不可

列的无穷多个，如例 5， 6， 7。

§1.2 随机事件和事件域

以后总是通过随机试验观察某一个事情发生与否（或说出现与否）。

在一定条件下，重复多次进行试验，每次都一定会发生的事情叫做必然事件，必然事件和基本事件空间一样也用Ω表示（后面将说明其理由）。

在一定条件下，重复多次进行试验，每次可能发生，也可能不发生的事情叫做随机事件，用A，B，C…或A_1，A_2，…；B_1，B_2，…表示。

在一定条件下，重复多次进行试验，每次都一定不发生的事情叫做不可能事件，用ϕ表示。

例如：抽样检查产品的质量得次品是随机事件，设用A表示。接到电话呼唤的次数小于10是随机事件，设用B表示。显像管的使用寿命在10000小时到11000小时之间是随机事件，设用C表示。掷一颗骰子所得点数大于6，是不可能事件ϕ；所得点数小于或等于6是必然事件Ω。

可以看出随机事件是一些基本事件的集合，即基本事件空间Ω的子集，例如上面所说的随机事件中，$A=\{$次品$\}$，$B=\{0，1，2，\cdots，9\}$，$C=\{t \mid 10000\leqslant t\leqslant 11000\}$。

特别，基本事件也是随机事件，它是只含一个基本事件的集合。

为方便起见，以后把必然事件Ω和不可能事件ϕ也算作随机事件，它们是随机事件的两个极端情形。在掷骰子的例子中，$\phi=\{\ \}$（注意：ϕ表示不含任何基本事件的空集）$\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$。随机事件以后常简称为事件。

注意到基本事件在一次试验中只能出现其中之一，也必然会出

现其中之一。由上可以看出：事件A出现当且仅当A中所含的基本事件之一出现（这里的A表示任何一个随机事件）。ϕ表示不含任何基本事件的空集，所以恰好用它来表示不可能事件，Ω表示全体基本事件的集合，恰好用它来表示必然事件，这就是把基本事件空间和必然事件用同一个记号Ω表示的原因。

如在掷骰子的随机试验中，事件A表示出现偶数点，显然$A=\{2,4,6\}$，是由三个基本事件构成，事件A发生必是2点、4点、6点三个基本事件中有一个发生，也只能是一个发生（一次试验的结果不会同时出现二个，例如同时出现2点和4点），反之，只要2点、4点、6点三个基本事件中有一个发生，就表示事件A发生，即掷骰子出现偶数点。

必然事件和不可能事件正好相反，但又是相通的，如必然事件，可看成是不可能不发生的事件，不可能事件又可看成是必然不发生的事件。

对于一般的两个事件，有可能在一次试验中同时发生。如某袋中有4个白球2个黑球，白球编号为1，2，3，4，黑球编号为5，6。随机试验E为依次从袋中不放回地摸出两个球。用(i, j)表示第一次摸得i号球，第二次摸得j号球。这一基本事件，$i, j=1, 2, \cdots, 6$，$i \neq j$。基本事件的全体如下：

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5)
\end{array}
$$

这个例子中Ω含30个基本事件。

设A表示事件“第一次摸得黑球”，A共含10个基本事件；B表示事件“第二次摸得黑球”，B共含10个基本事件；$C=\{(5,6),(6,5)\}$表示事件第一、二次均摸得黑球”。在这个随机试验中，

当基本事件（5，6）发生时，事件A和事件B同时发生，事件C发生时，事件A和B也同时发生。

因为随机事件是一种集合（它是一种特别的集合，是基本事件的集合），所以集合的逻辑关系和运算，也是事件的逻辑关系和运算，因此可以利用集合论中的一切记号和性质。

（1）$\omega\in A$表示基本事件ω属于事件A，称ω是A的一个元素（或简称为元），反之$\omega\overline{\in}A$表示ω不属于A，即ω不是A中的元。

（2）$A\subset B$或$B\supset A$，称为A含于B或称为B包含A，或称A是B的一个子集，它的含义是：如果$\omega\in A$，必也有$\omega\in B$。显然$A\subset A$.

如果$A\subset B$，且存在$\omega\in B$但$\omega\overline{\in}A$，则称A是B的一个真子集。

在概率论中$A\subset B$的含义是：事件A是事件B的特款，又表示若事件A发生，则事件B也必发生；显然，$\phi\subset B\subset\Omega$，其中$B$是任一事件。

若$A\subset B$同时又有$B\subset A$，则称$A=B$。$A=B$，表示两事件相等，即它们所包含的基本事件是一样的。

（3）$A\cup B$叫做事件A、B的并，它是由属于A或者属于B的元素的全体构成的集合。

在概率论中$A\cup B$的含义是：事件$A\cup B$出现$\Longleftrightarrow$$A$、$B$二事件至少出现其中之一$\Longleftrightarrow$事件$A$出现或事件$B$出现。

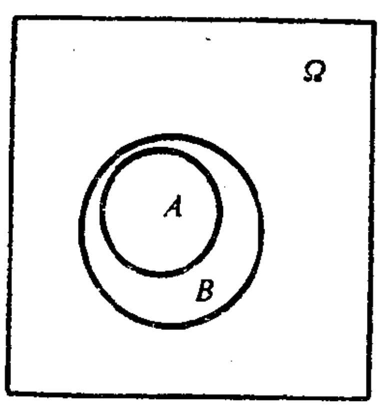


图 1-2　$A\subset B$

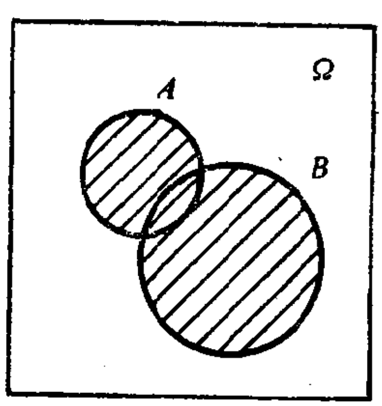


图 1-3　$A\cup B$

注：记号“$A \Longleftrightarrow B$”表示命题A和命题B等价，即由右边命题B成立可推得左边命题A成立，反之由左边命题A成立也可推得右边命题B成立。“$A \Longleftrightarrow B$”也可解释为命题A和命题B互为充分必要条件。

推广：$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots$或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它们的含义读者不难自己叙述。

（4）$A \cap B$（或用AB表示）叫做事件A、B的交，它是由属于A同时也属于B的元素的全体构成的集合。

在概率论中$A \cap B$的含义是：$A \cap B$发生$\Longleftrightarrow A$、B两事件同时发生。

推广：$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$或$A_1 A_2 \cdots A_n$，$A_1 \cap A_2 \cap \cdots$或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，其含义请读者自己叙述。

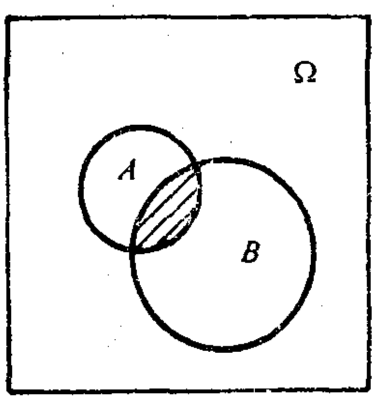


图 1-4　$A \cap B$

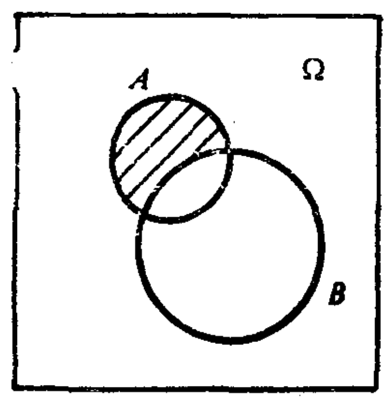


图 1-5　$A-B$

（5）$A-B$叫做事件A与B的差，它是由属于A但不属于B的元素的全体构成的集合。

在概率论中，$A-B$的含义是：事件$A-B$发生$\Longleftrightarrow$事件A发生，但事件B不发生。

（6）$\overline{A}$叫做A的补集，即$\overline{A}=\Omega-A$。$\overline{A}$的含义是：$\overline{A}$是A的对立事件，$\overline{A}$表示非A。

显然有：　$\overline{\Omega}=\phi$，$\overline{\phi}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$，

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\overline{A}=\phi,\ A-B=A\overline{B}=A-AB.$$

若$A\subset B$,则$A\cup B=B$，$AB=A$．特别$A\subset A$，所以$A\cup A=A$，$AA=A$。

（7）如果$AB=\phi$，即A、B不交，则称A、B两事件是互不相容的。互不相容事件的并，有时特别写成$A+B$。

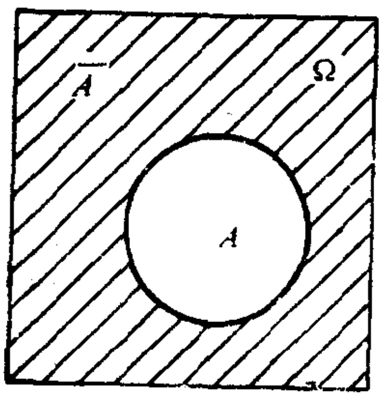


图 1-6 $\overline{A}$

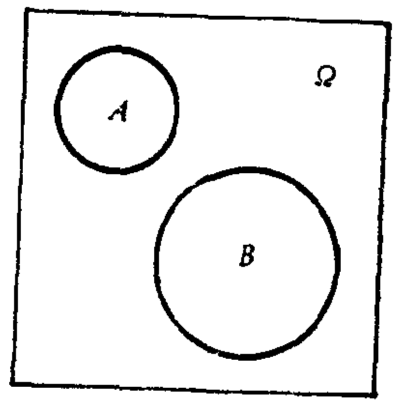


图 1-7 $AB=\phi$

$AB=\phi$的含义是事件A和B不能同时发生。

n个事件A_1、A_2、…、A_n如果两两互不相容，也就称为互不相容。

事件（集合）的运算规律：

（1）交、并运算满足交换律、结合律，即

$$AB=BA,\quad A(BC)=(AB)C=ABC,$$

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C.$$

（2）交对并有分配律，即

$$A(B\cup C)=AB\cup AC.$$

（3）并对交有分配律，即

$$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C).$$

（4）并与交有对偶关系〔德莫根(De Morgan)定理〕：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

这还可推广到有限个或可列个交与并的情形，

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k},$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}, \qquad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$

（5）任意二事件之并可表成二不相交事件之并，

$$A \cup B = A \cup (B - AB) = B \cup (A - AB).$$

在概率问题中，经常要考虑某个试验中的各种事件，这些事件都是基本事件空间Ω的子集，它们的全体构成事件的集合（实际是基本事件集合的集合），通常叫做集族，记为$\mathscr{F}$。我们总假定事件的集族$\mathscr{F}$有下列性质：

（1）$\Omega \in \mathscr{F}$；

（2）若$A \in \mathscr{F}$，则$\overline{A} \in \mathscr{F}$；

（3）若可列个$A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

$\mathscr{F}$有上述三条性质是重要的，有了这三条性质，就可以保证$\mathscr{F}$中的元（即事件）关于并、交、补、差、可列并、可列交等集合运算是自封的，即对任何有限个或可列个随机事件（即$\mathscr{F}$中的元）作并、交、补、差、可列并、可列交运算后的集合仍属于$\mathscr{F}$，即仍是随机事件。

有上述三条性质的事件的集族$\mathscr{F}$叫做事件域。以后写$A \in \mathscr{F}$，就等价于说A是事件。

例如，考虑一个掷骰子的随机试验，它有基本事件为ω_i，$i = 1, 2, \cdots, 6$，ω_i表示"掷骰子出现i点"$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$。$\Omega$的所有子集构成的集族为

$\mathscr{F} = \{\phi, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6, (\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), \cdots, (\omega_5, \omega_6), (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \cdots, (\omega_4, \omega_5, \omega_6), \cdots, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)\}$。

经检验知此集族$\mathscr{F}$满足上述条件(1)、(2)、(3)，因而它是事件域。它共含2^6个不同的事件，事实上，$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} +$

$\cdots+\binom{6}{6}=(1+1)^6=2^6$。

一般地，若Ω有n个 基本事件，则可取Ω的所有子集构成集族$\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$含2^n个不同的事件。

如果Ω有可列个基本事件，那么Ω的所有子集构成的集族$\mathscr{F}$也是事件域。

§1.3 概率的公理化定义

某事件在一次试验中可能出现，也可能不出现，呈现偶然性，但在大量重复试验中，却有明显的规律性，它表现为事件出现频率的稳定性。

设事件A在N次重复试验中共出现ν次，$0\leqslant\nu\leqslant N$，定义$f_N(A)=\frac{\nu}{N}$，叫做事件A在N次重复试验中出现的频率。

如对一大批产品进行抽样检查，得结果如下：

抽取件数N	10	20	50	100	500	800	1200	1600
其中合格的件数ν	10	16	43	89	454	714	1069	1427
合格品率$\frac{\nu}{N}$	1	0.8	0.86	0.89	0.908	0.893	0.891	0.892

以事件A表示“抽样检查得合格品”，每次抽取得合格品是偶然的．但从大量抽取结果可看到，合格品率（即A的频率）在0.89左右摆动，随N增大，这个频率趋于稳定。只要抽样方法在同一条件下进行（这里所说的同一条件是指被检查的对象不变或近似不变，检查方法不变）谁去作抽查都一样，合格品率都稳定在0.89左右。

人们的实践活动表明，每个随机事件A总对应一个客观上存在的数，它是事件A在大量重复试验中出现频率的稳定性的表现，也