

# 高等数学

(上册)

华中理工大学数学系 编



高等教育出版社

# 高等数学

(上册)

华中理工大学数学系 编



高等教育出版社

(京)112号

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学 上册/胡适耕编. —北京:高等教育出版社,  
1997.8  
ISBN 7-04-006328-X

I. 高… II. 胡… III. 高等数学-高等学校-教材 IV  
.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 15381 号

\*

高等教育出版社出版  
北京沙滩后街 55 号  
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588  
高等教育出版社发行  
文字 603 印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 240 000  
1997 年 8 月第 1 版 1997 年 8 月第 1 次印刷  
印数 0 001—30 064

定价 9.30 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等  
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。

**版权所有,不得翻印**

## 前 言

本书是为即将跨入 21 世纪的年轻读者写的。

新的世纪已经近在眼前,世界的前景将会如何?各界人士都在预测与展望,众说纷纭,莫衷一是.但有一点是众所公认的,即 21 世纪必然是高科技的世纪.人们毫不怀疑,科学技术将以前所未有的速度发展;新观念、新理论与新技术将层出不穷;覆盖全球的信息网将进入每个家庭,运用高技术将成为人类日常生活的一部分.未来的大学生将愈来愈早地接触高科技,他们将不可避免地置身于知识产品的滚滚洪流之中!

这一切已不再是朦胧的幻影,而是轮廓已清晰可见的升起于天际的一轮红日.为这种前景所鼓舞的大学生,在他们立志投身于科学之际,将学到怎样的数学?教育界正在为此而苦苦思索,本书作者们亦已为此探索多年,而本书则正是这一探索的初步成果.

世界各国的大学都在倡言改革,数学教育改革的呼声震天动地,提出的方案与模式成百上千,但真正瓜熟蒂落的成果却寥若晨星,以至于今日大学生所学到的高等数学,与 40 年前相比并无重大差别.一门数学课程能如此经久不变,数学界似乎应为它的强大生命力而额手称庆.然而,这实在是危机的先兆.

如同所有科学部门一样,数学本身亦在不断更新,新理论与新方法不断涌现.经典微积分在经历了 300 年的辉煌发展之后,已经高度成熟.今天,它的应用依然遍及几乎所有科学领域.然而,它所占的地盘正在无可挽回地缩小.近十年之内,高等数学课程的总学时缩短了近四分之一,这只不过是人们对一种不可阻挡的历史趋势的不情愿的反应而已.任何经典学科都无法逃避被精简浓缩的命运,经典微积分学亦不例外.无论如何,不应让今天的大学生去重复历史的发展,通晓从极限到微积分运算的每一细节,他们应当

将有限的时间与精力花费在最必需的那部分内容上. 况且, 微积分早已不是大学生所应掌握的唯一数学工具. 为了跟上高科技时代, 今日大学生除了学习微积分学及已相当标准化的“工程数学”课程之外, 还必须学习某些与算法理论密切相关的离散数学知识; 学习在科学、工程与社会生活中有广泛应用的“优化数学”知识, 等等. 这种对新的数学知识的紧迫需要, 正在促使高等数学让出愈来愈多的地盘, 人们几乎别无选择.

正是基于这一认识, 我们呈献给读者的这本书, 作了目前条件下我们所能做到的最坚决的改进, 使读者有可能在比过去少得多的时间内学到经典微积分学的主要内容, 而又不降低基本的数学思维训练. 我们深信已在一定程度上达到这一目的.

本书上下两册合计不过 50 余万字, 约相当于目前同类教材的  $\frac{3}{4}$ , 而其中包括了国家教委审定的高等数学课程教学基本要求的所有内容. 做到这一点当然不容易, 这是采取一系列坚决改进措施的结果, 其主要者如下:

1. 精简. 删去后文不引用的中间结果(如 Abel 引理); 排除那些数学的发展证明已失去价值的内容(如关于可积性的讨论); 略去后文或后续课程中处理得更好的问题(如定积分的某些应用).

2. 集中. 如性质集中(极限性质、积分性质、级数性质等), 规则集中(如微分规则、矢量运算规则等), 公式集中等等. 这样大大提高了表达效率, 且便于理解、记忆与复习.

3. 类比. 可互相对照的内容, 最大限度地平行处理, 互相参照, 这样既有利于启发学生思维, 同时又避免了许多简单重复, 从而节省了篇幅.

4. 偏重. 处处注意将主要篇幅用于较简单的典型情况, 因而降低了难度而又无损于基本内容. 例如, 明确突出 Maclaurin 级数, 而一般的 Taylor 级数仅需简单的交代就足够了.

5. 简化. 所有关键性结论的推证都经过精心设计, 以达到最大限度的简洁. 过程繁琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明,

则坚决予以省略。

始终萦绕本书作者们脑际的一个基本想法是：除了真正必需的内容之外，其他都是多余的。而一旦清除了不必要的内容，就为补充新的内容铺平了道路，这正是致力于改革的数学界同仁们所期待的。

至于本书的风格，需作的说明不多。数学教材很难赢得生动有趣的赞誉。在冷峻古板与轻浮媚俗这两付面孔之间，我们选择了某种折衷姿态。数学教材无疑负有对学生进行逻辑训练的使命，因而永远需要一定的严谨性，本书也不例外。除此之外，我们尽了最大努力来提高本书的可读性。我们的目标是：各种类型学校的大学生都能利用本书顺利完成高等数学的学习。本书作者们在提笔之初，即明确提出“通用、简明、便利”的标准作为自我规范。本书在多大程度上合乎这一预定标准，相信读者自有评判。

关于本书产生的过程需要略加说明。华中理工大学数学系近二十年来一直致力于高等数学的教材改革。70年代末，在陆传务教授主持下，翻译了一百余万字的外文教材，并对引进教材进行了细致的消化、整理工作。在此基础上，自编了《微积分与场论初步》英文版教材，在1983—1987年间用过该教材的学生在8000人以上，在国内一时颇受注目。由于种种原因，后来该书改为中文版使用，内容与表述也作了相应的改进。与此同时，为了鼓励不同风格之间的竞争，由余国钧教授主持，组织编写了另一套高等数学教材。因此，从1987年起，在华中理工大学就有两套高等数学教材平行地使用。近十年来，这两套教材的作者及许多其他教师通过反复讨论，终于达成共识，认为有必要编写一部统一的教材，新教材既要继承原来两部教材的优点，同时又要依据时代的要求，有所创新，使之能担负跨世纪的使命。而且，身为华中理工大学这种规模的重点大学的数学教师，本书作者们意识到有责任为推进国内数学教育的改革作出贡献。因此，编写新教材应当以服务于国内广大读者为宗旨，而不为一校的特殊要求所局限。基于以上考虑，1993

年我系决定在综合现有两套教材的基础上,编写一套更适应当前教学改革要求的新教材.在系主持下,高等数学课程组具体组织了新教材的编写工作.本书作者们自提笔至今,历经数年,三易其稿,终于撰成全书,呈献于读者,几代人为之奋斗数十年的高等数学教材改革,算是有了一个明确的结果.

本书初稿由毕志伟、林益、王汉蓉、陈爱兰、何瑞、魏宏、杨祖禧、李静瑶、刘国钧、樊孝述、曹诗珍、周怀治、汤燕斌、魏尧生、谢鹏执笔;书中插图均由谢鹏绘制.书稿上、下册分别由毕志伟与谢鹏统稿,最后由本人修改定稿.陆传务、陈祖诰、杨林锡、王德荣、王新华仔细审阅了书稿,许多章节在内容与形式上的改进都大大得益于他们的意见.无疑,书中仍然不免有疏漏与不妥之处,切望广大读者指出,以便订正.

胡适耕

1997年5月于华中理工大学数学系

## 记号与约定

$B(\alpha, \beta) (\alpha, \beta > 0)$ : B 函数.

$C_n^k = n! / [k!(n-k)!]$ .

$\csc x = 1/\sin x$  (余割).

$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x); df(x) = f'(x)dx$ .

$d^n y/dx^n = y^{(n)}(x)$ .

$\exp x = e^x$ .

$F|_a^b = F(b) - F(a)$ .

$f: X \rightarrow Y$  表示  $f$  是定义于集  $X$  上而取值于集  $Y$  中的函数 (或映射).

$f^{-1}$ : 函数  $f$  的反函数.

$f(a^\pm) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$ .

$f_+(x)$ : 右导数;  $f_-(x)$ : 左导数.

$\Gamma(\alpha) (\alpha > 0)$ :  $\Gamma$  函数.

$\inf A$ : 实数集  $A$  的下确界.

$\ln x (x > 0)$ :  $x$  的自然对数.

$N(a, r) = (a-r, a+r); N^0(a, r) = (a-r, a) \cup (a, a+r)$ .

$n!$ :  $n$  的阶乘;  $0! = 1$ .

$(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2$ ;

$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1$ .

$P \Rightarrow Q$ : 命题  $P$  推出命题  $Q$ ;  $P \Leftrightarrow Q$ : 命题  $P$  等价于命题  $Q$ .

$\mathbf{R}$ : 实数之全体;  $\mathbf{R}^n$ :  $n$  维空间.

$\sec x = 1/\cos x$  (正割).

$\operatorname{sgn} x$ : 符号函数.

$\sup A$ : 实数集  $A$  的上确界.



$u = o(v); \lim(u/v) = 0; u = O(v); \lim(u/v) = l, 0 < |l| < \infty.$

$u \sim v; \lim(u/v) = 1.$

$[x]$ : 不超过  $x$  的最大整数.

$y'_x = dy/dx; y''_x = d^2y/dx^2; y'|_{x=x_0} = y'(x_0);$

$\forall x \in A$ : 对  $A$  中任何  $x$ ;  $\forall x > 0$ : 对任何正数  $x$ , 如此等等.

$\exists x \in A$ :  $A$  中存在一个  $x$ ;  $\exists x > 0$ : 存在一个正数  $x$ , 如此等等.

“ $\exists x \in A$ :  $x$  满足条件  $C$ ”意味着,  $A$  中存在一个  $x$ , 使得  $x$  满足条件  $C$ , “ $\exists x \in A$ ”之后的冒号“:”意为“使得”或“有”.

$\pm \infty$ : 正负无穷大; 不致误解时,  $+\infty$  简写为  $\infty$ .

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots; \text{不致误解时,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 简写为 } \sum a_n.$$

§ 1.2(3) 表示 § 1.2 中的式(3).

□ 表示定理证毕.

责任编辑 徐 可  
封面设计 李卫青  
责任印制 宋克学

# 目 录

记号与约定 .....	XI
<b>第一章 函数</b>	
§ 1.1 变量与函数 .....	1
1.1.1 集合与实数 .....	1
1.1.2 常量与变量 .....	4
1.1.3 函数 .....	5
1.1.4 函数的初等性质 .....	7
1.1.5 函数的一般概念 .....	10
§ 1.2 函数的运算·初等函数 .....	12
1.2.1 函数的四则运算 .....	12
1.2.2 复合函数与反函数 .....	13
1.2.3 初等函数 .....	16
<b>第二章 极限与连续性</b> .....	21
§ 2.1 数列的极限 .....	21
2.1.1 引例 .....	21
2.1.2 数列概念 .....	23
2.1.3 数列极限的定义 .....	24
2.1.4 数列极限的性质 .....	27
2.1.5 收敛判别法 .....	30
2.1.6 子列·上(下)确界 .....	33
§ 2.2 函数的极限 .....	36
2.2.1 函数极限的定义 .....	36
2.2.2 函数极限的性质 .....	40
2.2.3 两个重要极限 .....	43
§ 2.3 无穷小量与无穷大量 .....	47
2.3.1 无穷小量及其运算 .....	47

2.3.2	无穷小量的比较 .....	49
2.3.3	无穷大量 .....	53
§ 2.4	函数的连续性 .....	56
2.4.1	连续与间断 .....	56
2.4.2	连续函数的运算·初等函数的连续性 .....	59
2.4.3	闭区间上连续函数的性质 .....	62
2.4.4	一致连续性 .....	64
<b>第三章</b>	<b>导数与微分</b> .....	<b>68</b>
§ 3.1	导数概念 .....	68
3.1.1	切线问题与速度问题 .....	68
3.1.2	导数的定义 .....	69
3.1.3	单侧导数 .....	73
§ 3.2	导数的计算 .....	75
3.2.1	基本求导规则 .....	76
3.2.2	反函数的导数·导数表 .....	79
3.2.3	相关变化率 .....	81
§ 3.3	微分 .....	84
3.3.1	微分概念 .....	84
3.3.2	微分的计算 .....	86
3.3.3	微分的应用 .....	88
§ 3.4	隐函数及用参数表示的函数的微分法 .....	90
3.4.1	隐函数的微分法 .....	90
3.4.2	用参数表示的函数的微分法 .....	93
§ 3.5	高阶导数 .....	96
3.5.1	高阶导数概念 .....	95
3.5.2	高阶导数的计算 .....	96
<b>第四章</b>	<b>微分中值定理·应用</b> .....	<b>103</b>
§ 4.1	微分中值定理 .....	103
4.1.1	Rolle 定理 .....	103
4.1.2	Lagrange 中值定理 .....	106
4.1.3	Cauchy 中值定理 .....	108

---

§ 4.2	L'Hospital 法则	110
4.2.1	未定型 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$	111
4.2.2	其他未定型	114
§ 4.3	Taylor 公式	118
4.3.1	Taylor 定理	118
4.3.2	求 Taylor 公式的例子	121
4.3.3	某些应用	125
§ 4.4	函数的单调性与凸性	129
4.4.1	单调性	129
4.4.2	凸性	131
4.4.3	函数作图	134
4.4.4	曲率	137
§ 4.5	极值问题	141
4.5.1	极值条件	141
4.5.2	最大值与最小值	143
4.5.3	应用问题	145
<b>第五章</b>	<b>不定积分</b>	<b>148</b>
§ 5.1	不定积分概念	148
§ 5.2	基本积分法	151
5.2.1	分项积分法	151
5.2.2	凑微分法	153
5.2.3	换元法	156
5.2.4	分部积分法	160
§ 5.3	几类初等函数的积分	164
5.3.1	有理函数的积分	164
5.3.2	三角函数的积分	167
5.3.3	某些含根式的函数的积分	170
<b>第六章</b>	<b>定积分</b>	<b>175</b>
§ 6.1	定积分的定义与性质	175
6.1.1	面积问题与路程问题	176
6.1.2	定积分的定义	176

6.1.3	定积分的性质	179
§ 6.2	定积分的计算	183
6.2.1	变上限积分	183
6.2.2	Newton-Leibniz 公式	185
6.2.3	换元积分法	188
6.2.4	分部积分法	191
§ 6.3	广义积分	195
6.3.1	定义与性质	195
6.3.2	收敛判别法	199
6.3.3	Euler 积分	201
§ 6.4	定积分的应用	205
6.4.1	微元法	205
6.4.2	几何应用	206
6.4.3	物理应用	211
§ 6.5	定积分的近似计算	216
6.5.1	梯形法	215
6.5.2	抛物线法	217
<b>第七章</b>	<b>无穷级数</b>	<b>220</b>
§ 7.1	数项级数	220
7.1.1	级数的概念与性质	220
7.1.2	正项级数	223
7.1.3	变号级数	229
§ 7.2	函数项级数	235
7.2.1	一致收敛性	235
7.2.2	和函数的分析性质	238
§ 7.3	幂级数	241
7.3.1	收敛区间与收敛半径	241
7.3.2	展开函数为幂级数	245
7.3.3	级数求和	250
§ 7.4	Fourier 级数	255
7.4.1	Fourier 级数及其收敛性	256

7.4.2 展开函数为 Fourier 级数 .....	258
7.4.3 Fourier 级数的其他形式 .....	262
<b>习题答案</b> .....	270
<b>人名索引</b> .....	281
<b>名词索引</b> .....	282

## 下 册 简 目

### 第八章 向量代数与空间解析几何

- § 8.1 空间直角坐标系
- § 8.2 向量及其线性运算
- § 8.3 向量间的乘法
- § 8.4 平面与直线
- § 8.5 曲面与曲线

### 第九章 多元函数微分学

- § 9.1 多元函数
- § 9.2 偏导数
- § 9.3 全微分与 Taylor 公式
- § 9.4 方向导数与梯度
- § 9.5 极值
- § 9.6 微分学的几何应用

### 第十章 重积分

- § 10.1 二重积分的定义与性质
- § 10.2 二重积分的计算
- § 10.3 三重积分
- § 10.4 重积分的应用

### 第十一章 曲线积分与曲面积分

- § 11.1 第一型曲线积分
- § 11.2 第二型曲线积分
- § 11.3 第一型曲面积分
- § 11.4 第二型曲面积分

§ 11.5 Stokes 公式与 Gauss 公式

## 第十二章 常微分方程

§ 12.1 基本概念

§ 12.2 初等积分法

§ 12.3 线性微分方程

§ 12.4 常系数线性微分方程

§ 12.5 微分方程组



# 第一章 函数

读者在中学所学到的初等数学主要涉及不变的量. 与此相反, 高等数学主要以变量为研究对象; 基本的研究方法是通过不同变量之间的依赖关系来揭示变量的变化规律, 而函数就是变量之间的一种依赖关系. 因此, 函数是高等数学的基本研究对象. 自然, 函数概念将贯穿于本书各章节. 本章介绍变量与函数的概念、函数的初等性质以及函数的运算等, 这些内容构成学习微积分学最必需的预备知识.

## § 1.1 变量与函数

### 1.1.1 集合与实数

集合是现代数学中最基本的概念. 研究任何对象都不可避免地要用到集合. 例如, 所有自然数的集合; 一个方程的根的集合; 某三角形内所有点的集合, 等等. 一般地, 具有某种特定性质的对象的总体称为集合或集, 其中的对象称为集合的元素. 通常以大写字母  $A, B, M$  等表示集合, 而以小写字母  $a, b, x$  等表示集合的元素. 若  $a$  是集合  $A$  的元素, 则记作  $a \in A$  (读作  $a$  属于  $A$ ); 否则记作  $a \notin A$  (读作  $a$  不属于  $A$ ).

表示集合的方式通常有两种. 一种是列举式, 例如, 方程  $x^2 - 1 = 0$  的根的集合表为  $\{1, -1\}$ . 另一种是命题式, 例如, 整数集  $= \{x | \sin \pi x = 0\}$ . 一般地,

$$A = \{x | x \text{ 满足 } P\}, \quad (1)$$

其中  $P$  是关于  $x$  的某个命题. 式(1)的意义是:  $x \in A$  的充要条件