弹 性 薄 板

(第二版)

张 福 范 著

科 学 出 版 社

1 9 8 4

法，也是他在结合了板的计算而提出的．巴泼考维奇（П. Ф. Папкович）在“船舶结构力学”这广博的著作中，不仅创造性地叙述了板的古典理论，并且杰出地发展和丰富了薄板的弯曲和稳定的计算方法，例如将栾范解推广到两相对边固定而其他两相对边任意支承等等．符拉索夫（В. З. Власов）曾企图用结构力学中的方法来解弹性薄板问题．洛克辛（А. С. Локщин）和菲利伯夫（А. П. Филиппов）得到了以一系列肋条加强的矩形板的弯曲、振动和稳定等复杂问题的解．洛克辛研究了矩形薄板为等刚度的肋条加固后的弯曲、振动与稳定．菲利伯夫研究用肋条所加固的而支承在一系列分离的支柱上的薄板．他们都是从栾范解为开始的．С. Г. 列赫尼茨基推广了 А. С. 洛克辛的解法，来研究用肋条加固的正交各向异性矩形板的弯曲．为一系列的柱所支承的板的弯曲，是属于盖锡高林（С. А. Гершгорин）、勃洛赫（В. И. Блох）、尼柯拉也伐（М. В. Николаева）等人的工作．这类问题的研究也是以栾范解为基础来进行的．关于在弹性地基上的板的弯曲问题的研究，一类是以温克耳（Winkler）、齐姆门（Zimmerman）假设为出发点，另一类是按照板位于半无限弹性体上来处理的．属于前一类的有价值的研究，是由盖适瓦诺夫（Н. М. Герсеванов）应用泛函断子所作的．关于这类工作，后来为夏比罗（Г. С. Щапиро），马里也夫（А. С. Малиев）等人所继续．舍弃了温克耳的假设，将导致在数学上十分困难的方程组．哥尔布夫-巴沙道夫（Горбунов-Посадов）以近似的解法计算薄板在半无限体上的问题．热莫启金（Б. Н. Жемочки）以点的接触来代替板与基础之间的连续接触，然后运用结构力学中解超静定问题的方法，提出在弹性地基上的圆板的近似计算．此外，苏联学者们还运用了一系列新的方法来处理板的弯曲．例如卢尔也（А. И. Лурье）运用复变函数研究圆形板在任意载荷下的弯曲．С. Г. 列赫尼茨基将复变函数法巧妙地用于各向异性板的弯曲问题．关于这方面的工作，还有弗里德曼（М. И. Фридман）的有孔圆板的弯曲问题，哈里洛夫（Г. С. Халилов）的单联通简支薄板弯曲问题等．立博门（Ю. В. Репман）创造了一个新的方法，虚载荷法，以解在任意边界条件下、矩形板在任何载荷下的弯曲问题．这方法系设想在板的边界上作用着以发散级数表示分布的弯矩和剪力，然后按照满足已知边界条件来解板的弯曲问题．格林保格（Г. А. Гринберг）和乌弗良特（Я. С. Уфлянд）提出正交调和函数法，以解任意形状的固定边薄板的弯曲问题．这个方法的要点是用正交调和函数的级数来表示齐次调和方程的通解．考列涅夫（Г. Б. Коренев）用另一推广的区域 Ω（已知其格林函数）来代替板原有的区域 Ω_0，提出了相补载荷法以解薄板力学的边值问题．龙次（Я. Л. Лунц）运用小参数法研究抛物线形板、无限长条和椭圆形板的弯曲问题．

以上所述的，只能作为一个极其简单而不周到的介绍．但由此已经可以认识到苏联学者们继承了前辈的工作，对薄板问题所作的丰富的贡献．

参　考　文　献

[1] S. Timoshenko, History of Strength of Materials, McGraw-Hill Book Company, INC. 1940.

[2] Г. Ю. Джанелидзе, Обзор работ по теории изгиба толстых и тонких плит, Прикладная Математика и Механика, 1948.

[3] 胡海昌，苏联在薄板力学方面的贡献，“弹性薄板的小挠度平衡问题”，中国科学院.

内 容 简 介

本书讨论了板在各种支承形式和荷重作用下的问题，例如复杂情况下的简支边矩形板、固定边矩形板、连续矩形板、悬臂矩形板等，所用的解法均有一定的创造性，并且是同类书籍中未曾见过的。实践证明，所用的解法是很有效的，这次第二版内容增加最多的第七章悬臂矩形板这个著名的难题，以及新增加的第八章弹性地基上的自由矩形板，所提供的精确解也是前所未有的。

本书可供高等院校的力学、建筑等专业师生和有关的科研、技术人员参考。

弹 性 薄 板

（第二版）

张 福 范 著

责任编辑　魏茂乐

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1963 年 5 月第 一 版　开本：787×1092 1/16

1984 年 11 月第 二 版　印张：17 1/4

1984 年 11 月第四次印刷

印数：精 0001—3,400　插页：精 2

平 5,201—9,450　字数：388,000

统一书号：13031・2703

本社书号：3721・13—2

定价：布脊精装 5.10 元

平 装 4.05 元

序　　言

作者以前曾经断断续续地作过一些有关弹性薄板的计算，其中大部分都曾发表过．现将它们整理成一册，供作弹性薄板计算的一个补充材料．

关于弹性薄板的发展史，主要节录了铁摩辛柯教授所著的“材料力学发展史”中有关的内容．关于苏联的学者们在弹性薄板方面的贡献，主要参照了詹涅里杰和胡海昌的著作．

第一章极其概括地叙述了弹性薄板的基本方程，并对有关迦辽金法等作了详细的说明．

第二章讨论了以能量法解长矩形板弯曲成柱面问题．最终的结果与布勃诺夫的解法所得的结果应当是相同的．

第三章主要讨论了那维埃的双重三角级数解与栾范解之间的联系，然后处理了一系列较复杂的简支边矩形板的弯曲，例如在板的平面内有张力或压力与垂直于板面的荷重共同作用的简支边矩形板等；其中包括均布荷重，有一集中力作用在板的中点，以及在板的周界上有分布弯矩作用等情形．

第四章是将那维埃解和结构力学中的方法混合使用，以解四边固定的矩形板，其中包括正交各向异性的固定边矩形板及在弹性地基上的固定边矩形板等．并且，当弹性地基的模量趋近于零时，就得到了铁摩辛柯教授对于固定边矩形板所得的方程．

第五章是以双重三角级数解两相邻边简支两相邻边固定的矩形板，其中也包括正交各向异性板等．

第六章讨论了一类较复杂的连续矩形板，例如在板平面内有张力或压力与垂直于板面的荷重共同作用的连续矩形板，及正交各向异性连续矩形板．除了平衡外，并讨论了连续矩形板的稳定与振动．

第七章以栾范解为基础，讨论了角点被支承的矩形板．其中包括板的四个角顶被支承，两相邻边简支一个角顶被支承，以及板的一边为简支而两角点被支承等问题．只要板的四个角顶无位移，而非悬空的边，不论是简支的或固定的，本章的解法是一般性的．这解法也可以用于当板的四个角点不动而悬空的边界系被支承在梁上．本书承王俊奎教授提出许多宝贵的建议，作者谨表谢意．书中的插图系由理论力学教研组李方泽和王正两位同志协助描绘的，在此一并致谢．

张　福　范

北京，清华大学，1961 年 10 月

第二版序言

继第一版之后，在第二版中增添了以下这些内容．

在第一章中，增加了弹性薄板的广义变分原理．

在第六章中，增添了关于连续铰接矩形板．

第七章全部重写，并改名为悬臂矩形板，成为本书篇幅最大的一章．这章的内容，主要完成于十年浩劫的初期．但当时由于没有计算机，虽列出了解题方程，也不可能作进一步的探索．为了增进对解这类问题的信心，当时曾只依靠计算尺和对数表，花十多天的时间，解了包括 16 个未知量的 §53 的第一个问题[1]．随后，中断了约十年，然后，在教研组内的谢志成与黄晓梅两位同志的热心帮助下，对以前问题所得的方程逐个作出数字计算．作者对他们深表感谢．并且，由于所得的结果很好，作者又进一步解了几个新问题．例如以克希霍夫（Kirchhoff）薄板理论解圣维南（Saint-venant）的狭长矩形截面杆的扭转问题，并包括约束扭转的问题．

张　福　范

北京，清华大学，1981 年 5 月

第八章“弹性地基上的自由矩形板”是在前七章印出校样后才增加进去的．我很感谢编辑魏茂乐同志的热情帮助。

1984 年 3 月　作者补记

1）这内容后来发表在清华大学学报 19 卷 2 期 1979．

薄板理论发展史

欧拉（L. Euler, 1707—1783）最先探索弹性平板的挠曲问题．在描述一理想薄膜的振动时，他把它当作由两组互相垂直且拉紧的线所组成的．他得到有关的微分方程[1]为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{a}$$

其中 w 表示挠度；A 与 B 为常量．欧拉并将这想法用于钟振动的研究．

杰克·贝努里（Jacques Bernoulli 1759—1789）[2] 将这同样的概念用之于板的分析，于是得到微分方程[3]

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q, \tag{b}$$

式中 D 为板的抗弯刚度；q 为横向荷重的强度．贝努里很清楚地表示：他的方程只是个近似而已；并且如果取两组并不是直交的梁，则获得的结果将稍有不同；他之所以发表这工作，只是作为解板的弯曲问题的第一个尝试而已．

启拉第（E. F. F. Chladni）对于声学的研究[4]，尤其是他对板的振动试验，引起了对于板理论极大的兴趣．在板面上铺上一层细砂，启拉第就能证实板的各种振动形式的节线的存在，并从而决定其相应的频率．1809 年法国科学院邀请启拉第作这实验的表演时，拿破仑亲自光临，并深为这实验所感服．就在拿破仑的建议之下，法国科学院提出了这样一个悬赏的题目：探求板振动的数学理论，并用实验进行校核．1811 年 10 月为应征的截止期，但到时只有一个人应征，她就是莎菲·渊门（Sophie Germain, 1776—1831）[5]．

莎菲·渊门幼时就致力于数学，并学习拉丁文，以便攻读牛顿的《原理》．当她知道了科学院所提出的悬赏，她就决定研究板的理论．她是熟悉欧拉的弹性曲线的工作的，即由弯曲变形能的积分式以变分原理来获得挠度曲线的微分方程．她决定以同样的方法来进行，并设板的弯曲变形能的积分式为

$$A\iint\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2 ds \tag{c}$$

（式中的 ρ_1 与 ρ_2 为弯曲面的主曲率半径）．在计算积分（c）的变分时，渊门的计算有错误，因而未能获得正确的方程．但作为审查人之一的拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736—1813）[6] 发现了她的错误，并作了修改，就得到所求方程的一个满意的形式：

$$k\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{d}$$

---

1) 参阅 Novi Comm. Acad. Petrop., Vol. X, p. 243, 1767

2) 杰克为丹尼尔·贝努里（Daniel Bernoulli）的侄儿．在 1786 至 1789 年间，他是俄国科学院院士．

3) Nova Acta, Vol. V, 1789, St. Petersburg.

4) 启拉第著的 "Die Akustik" 的第一版在 1802 年于莱比锡（Leipzig）出版．法文的翻译本在 1809 年出版，其中可以见到一简短的自传．

5) 在她的书 "L'état des Sciences et des Lettres" 中，有莎菲·渊门的传记．该书是她去世后于 1833 年在巴黎出版的．

6) 参阅 Ann. Chim., Vol. 39, pp. 149, 207, 1828.

这就是通常被称作的莎菲·渊门-拉格朗日方程.

泊松 (S. D. Poisson, 1781—1840) 作了进一步的努力来改进板的理论. 为了要给算式 (d) 一个物理上的说明,泊松设想板系由分子所组成,其相互之间有分子力作用(与分子间距离的改变成比例). 从一组分子的平衡条件,他成功地得到了方程 (d). 但由于他设想所有的质点都分布在板的中间面内,因而在他的方程中的常数 k 与板厚度 h 的平方成比例,而不是理所当然地与板厚度的立方成比例. 在同一篇论文中泊松指出:方程 (d) 不仅可得自积分 (c),也可以得自积分

$$A\iint\left[\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2+m\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right]ds.$$

其实,适当地选择常数 A 与 m, 这算式就是弹性薄板的弯曲变形能的正确算式. 这就说明: 虽然量 (c) 并不是板弯曲的变形能, 而为何渊门仍能得到薄板的微分方程的正确形式.

作为一个两维的解,泊松得到在荷重作用下板的挠度方程:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q, \tag{e}$$

式中的抗弯刚度 D 的值系相当于 $\mu=\frac{1}{4}$; q 为荷重强度. 他并讨论板的边界条件. 对于简支边和固定边,泊松的条件与现在认为正确的相一致. 对于沿着边界有已知力分布的情形,他要求有三个条件(而现在我们只用两个条件). 这些条件为: 剪力、扭矩及弯矩(自边的任一微段的分子力所计算得的)必须平衡作用在边界上的相应的力. 从三个条件减少为两个是后来由克希霍夫 (G. R. Kirchhoff) 完成的,开尔文爵士 (Lord Kelvin) 对于这些条件的减少并作了物理的解释. 为了要说明他这理论的应用, 泊松研究圆形板的圆对称弯曲,即荷重的强度仅为径向距离的函数. 泊松将方程 (e) 用极坐标重行写出,并对这问题作出了一完整的解. 后来,他将这解应用于均布荷重,并得到简支边与固定边板的方程. 他并研究板的横向振动,解出圆板的圆对称振动问题.

板弯曲的第一个满意的理论,应该归诸于那维埃 (C. L. Navier, 1785—1836). 在他的论文[1](在 1820 年 8 月提交科学院,并在 1823 年发表)中,正如泊松所设想的,那维埃设想板是由质点所组成的. 但他认为质点系分布在板的厚度内,并设在弯曲时,质点的位移平行于板的中间面,且与中间面的距离成正比. 于是他得到了在任何横向荷重下正确的微分方程. 由于那维埃认为质点之间相互作用的力与它们之间距离的改变成比例而与方向无关,所以他的结果只包含一个弹性常数. 如果取泊松比等于 $\frac{1}{4}$,则那维埃的 D(板的抗弯刚度)值与现在一般认为正确的值相同. 那维埃将他的方程应用于简支边矩形板,提出了正确的边界条件, 并以双重级数的形式提出正确的解. 他解了均布荷重及在板中点作用一集中力这两种情形. 这些解是矩形板弯曲问题的正确解的创始.

那维埃并研究了沿边界有均布压力 T 所作用的板的横向屈曲, 并得到了屈曲面的正确的微分方程:

1) 参阅 Bull. Soc. Philomath., Paris, p. 92, 1823.

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0.$$

他将这方程应用于四个角顶被支承的矩形板这个复杂的问题，但并没有得到一个可取的解.

克希霍夫（G. R. Kirchhoff, 1824—1887）是牛孟（Franz Newmann, 1798—1895）的学生，所以他对弹性理论很有兴趣．在1850年他发表了薄板理论的重要论文[1]．在这论文中，我们见到一个完善的板的弯曲理论；在论文的开始，克希霍夫对这问题作了一个简短的阐述．他提到莎菲·渊门首先企图获得板弯曲面的微分方程，以及拉格朗日修正了她的错误．他并没有提到那维埃用分子力的假设来获得板的方程这工作．他讨论了泊松的工作，并指出：泊松的三个边界条件一般地是不可能同时满足的；而这位法国的弹性力学家所以能正确地解出圆形板的振动问题，只是由于他所讨论的振动，其对称形式自然地满足了三个边界条件之一.

克希霍夫的板的理论，是建立在目前所公认的两个假设上的：(1)原来垂直于板的中间面的线段，当板弯曲时仍旧保持直线且垂直于弯曲了的板的中间面；(2)在横向荷重作用下板发生小挠曲时，板的中间面并不受到拉伸．这两个假设接近于杆弯曲的初等理论中截面保持平面的假设．运用了他的两个假设，克希霍夫立出板弯曲的变形能的正确算式：

$$V=\frac{1}{2}D\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy. \tag{f}$$

克希霍夫并运用虚功原理以获得板弯曲面的微分方程．对于任何虚位移，分布在板面上的荷重 q 所作的功必等于板的变形能的增加，即

$$\iint q\delta w dxdy=\delta V.$$

将(f)式代入并进行变分计算，克希霍夫就得到了为大家所熟悉的板的弯曲方程．他并且指出：只存在两个边界条件而不是象泊松所设想的应该有三个条件.

克希霍夫将他的方程用于自由边界的圆形板的振动理论．他不仅研究对称形式（其节线为同心圆），并且研究以圆的直径为节线的形式；对于这种情形，泊松的边界条件是不能用的．既得了一般的解，他作了很多的数字计算，并对于各种振动形式计算出频率的表．他用这些数字结果来分析启拉第所获得的板的振动试验结果．他首先须从这些结果中得到泊松比 μ 的正确值．但由于 μ 的大小对频率的影响不大，因而这些实验并不适宜用来精确地决定 μ.

在他的讲稿[2]中，克希霍夫将他的板的理论扩展到挠度不是很小的情形．大挠度板的理论的提出使弹性理论大大地跨进了一步．由于这理论以后在各种薄壁构造设计中得到广泛的应用，所以是十分重要的.

开尔文（Kelvin, 1824—1907）在他与戴脱（P. G. Tait）合写的“论自然哲学”一书中，在讨论到薄板的弯曲理论时，很浅显地解释了为何当挠度比板的厚度小得多时，克希

1) *J. Math.* (Crelle), Vol. 40, 1850.
2) 参阅他的“Mechanik”, 2d. ed., p. 450, 1877.

霍夫的初等理论是足够精确的．对于边界条件，这书给了一个富有启发的见解．克希霍夫已经证明：在边界上只须有两个边界条件，而并不是如泊松所须的三个边界条件．对于边界条件的减少，开尔文作出了物理上的说明．运用关于静力相当的圣维南（St. Venant, 1797—1866）原理，他指出：沿着板一边上的分布扭矩，可以用一静力相当的分布剪力来代替．因而在边上只须有关剪力与弯矩这两个边界条件．对于沿矩形板的周界上作用着均布扭矩并使板产生马鞍形的曲率这特殊情形，如将剪力代替扭矩就形成了在矩形板的一对角线的两端各作用一垂直力 P，而在另一对角线的两端各作用一垂直力 $-P$ 这有趣味的系统．这一系统的力是很容易加在板上的；在这种方式下所产生的挠度可用来由实验测定板的抗弯刚度．

在近代结构中，薄板的被广泛运用促进了薄板理论的发展．虽然有关的方程是由克希霍夫所得并曾用之于声学；但在工程中广泛地运用板的理论是在二十世纪才开始的．栾范（M. Levy, 1838—1910）研究了两对边简支而另两边为任意边界条件的矩形板．这是具有很大的实用价值的；工程师们研究了多种特殊的荷重情况，并累积了最大挠度和最大弯矩的表．别的形状的板，如椭圆形，三角形，扇形等也都被研究，并且出现了主要是讨论薄板弯曲的专著[1]．当得不到问题的精确解时，或者由级数所表示的解不适宜于实际应用时，工程师们就依赖于近似的分析．在板的理论中广泛地运用了吕滋（W. Ritz）法，并得到很多重要的结果．在某些复杂的情况下，采用差分方程，并用数字计算[2]来获得所需的资料．

在许多工程问题中，常常遇到四边固定的矩形板；但是这问题在数学上是有困难的．柯阿洛维契（B. M. Куалович）[3] 对这问题作出第一个可以作数字计算的解．布勃诺夫（И. Г. Бубнов）[4] 将这解简化，并对各种大小的板作出最大挠度和最大弯矩的表．爱文斯（T. H. Evans）[5] 以铁摩辛柯[6]的解为基础，制出更为详尽的表．

作用在板上的一集中力，导致在荷重作用点的局部应力的研究．这不能由板的近似理论来处理．那达依（A. Nadai）[7] 和华诺斯基（S. Woinowsky-Krieger）[8] 曾讨论过这问题．好几位作者[9]曾研究过在一集中力作用下的简支边矩形板．在第五次国际力学会议所提出的论文中，铁摩辛柯和杨（D. Young）[10] 曾讨论在集中力作用下的固定边矩形板．

为一系列等距离的柱所支承的板，在钢筋混凝土设计中具有很大的实用意义．葛拉叔夫(F. Grashof)[11] 提出这问题的第一个近似解，而进一步的工作是由莱威（V. Lewe）[12]

1) S. Timoshenko, Курс теории упругости, ч. II.
A. Nadai, Elastische Platten, Berlin, 1925; Б. Г. Галёркин, Упругие тонкие плиты, 1933.
2) 参阅 H. Marcus 所著的书 "Die Theorie elastischer Gewebe", 2d ed, Berlin, 1932. 并参阅 D. L. Holl 的论文，J. Applied Mechanics, Vol. 3, p. 81, 1936.
3) 参阅他的博士论文，St. Petersburg, 1902.
4) 参阅 И. Г. Бубнов 的书 "Строительная механика корабля", ч. II, 1914.
5) J. Applied Mechanics, Vol. 6, p. A—7, 1939.
6) 参阅 Proc. 5th. Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938.
7) 参阅他的 "Elastische Platten" p. 308.
8) Ing-Arch., Vol. 4, p. 305, 1933.
9) 参阅 A. Nadai, Bauing., 1921, p. 11; S. Timoshenko, Bauing, p. 51, 1922. 并参阅 Гарелкин 的论文，发表于 Messenger Math., Vol. 55, p. 26, 1925.
10) J. Applied Mechanics, Vol. 6, p. A—114, 1939.
11) 参阅他的书 "Theorie d. Elasticität u. Festigkeit", 2d ed., p. 358, 1878.
12) 参阅他的书 "Pilzdecken", 2d ed., Berlin, 1926. 这书中有着对这问题一完整的文献．

所作．在以前所提及的那达依和迦辽金的书中也讨论过这问题．在华诺斯基[1]的论文中，对这同一问题提出一新的探讨．

公路路面板内的应力分析，引起了对于弹性地基上的板的注意．这尤其明显地反映在韦司脱高德 (H. W. Westergaard)[2] 的工作中． 文脱 (J. Vint)，爱耳哥德 (W. N. Elgood)[3] 和茂番 (G. Murphy)[4] 都曾做过这种板的试验．

木料板及钢筋混凝土板的许多应用，引导到各向异性板的弯曲理论．虽然这一类的工作最早是由甘林 (Gehring)[5] 所创，但对实际有用的解主要是由许伯 (M. T. Huber) 所提供的．他对于这问题的著作都搜集在 "Probleme der Statik technish Wichtiger orthotroper Platten" (华沙，1929) 一书中． 在他最近出版的弹性理论[6]一书内也可以得到这些资料．这领域内进一步的工作主要是属于苏联工程师们的；所获得的成果都收集在列赫尼茨基 (С. Г. Лехницкии) 的"各向异性板"(Анизотропные пластинки) 一书中．

在板的近似理论中，曾设挠度要比板的厚度小得多．对于较大的挠度，必须考虑及板中间面的被拉伸．这类方程为克希霍夫[7]和克莱勃许 (A. Clebsch, 1833—1872) 所得．方程是属于非线性并且是难以处理的． 克希霍夫只将它们用于最简单的情形，即中间面被均匀地拉伸．这一领域的进展，主要是由工程师们在处理船壳的应力分析中所完成的．在处理一长矩形板在均布荷重下的弯曲，布勃诺夫[8]将这问题归结到一狭条的弯曲问题，并对在船舶构造中所遇到的几种边界条件作出解答． 他并且作出图表，使应力分析大大地简化；这些图表目前仍被广泛地运用于造船工程．铁摩辛柯[9]讨论了沿边界为均布力偶所作用的圆形板的大挠度，并研究了初等线性理论的准确范围． S. 韦 (Way)[10] 从理论和实验研究固定边的圆形板在均布荷重下的弯曲．他并且分析[11]了在均布荷重下的矩形板，并证实当边长 a/b 之比大于 2 时，最大应力与布勃诺夫对于无限长板所得的结果相差无几．福泼尔 (A. Föppl) 运用作用在板[12]中间面内的应力的应力函数，将很薄的板的大挠度的一般方程加以简化．卡门 (Von Kármán)[13] 将板"很薄"的要求舍弃，他的方程为那达依在他的所著的书中所采用，并被沙谋・栾范 (Samuel Levy)[14] 用于矩形板的大挠度的研究．钱伟长等以摄动法研究了圆薄板的大挠度[15]．

在获得板的近似理论的方程时，我们设每一平行于中间面 xy 的薄层系处于平面应

1) ZAMM, Vol. 14, p. 13, 1934.
2) 参阅 Ingeni ren, Vol. 32, p. 513, 1923；并参阅他的论文，发表在 J. Public Roads, 1926, 1929, 1933.
3) Phil. Mag., 7th series, Vol. 19, p. 1, 1935.
4) Iowa Eng. Exp. Sta. Bull., Vol. 135, 1937.
5) 参阅他的博士论文，Berlin, 1860.
6) Théorie de L'élasticité (Polish), Cracow, Vol. 1, 1948; Vol. 2, 1950.
7) 参阅他的 "Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik", 2d ed., 1877；并参阅 F. Gehring 的论文，其中采用了克希霍夫在 Crelle's J., Vol. 56 中所作的建议．
8) 这论文的英文翻译发表在 Trans. Int. Naval. Architects., Vol. 44 p. 15.
9) Mem. Inst. Engrs. Ways of Communication, Vol. 89, 1915.
10) Trans. A. S. M. E., Vol. 56, p. 627, 1934. 并参阅 K. Federhofer, Luftfahrt-Forsch., Vol. 21, p. 1. 1944, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Math-naturw. Klasse, Abt. IIa, Vol. 155, p. 15, 1946.
11) 参阅论文，发表于 Proc. 5th. Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge Mass., 1938.
12) 参阅他的 "Technische Mechanik", Vol. 5, p. 132, 1907.
13) 参阅他的文章 "Festigkeit im Maschinenbau", Encykl. Math. Wiss., Vol. IV$_4$, p. 311, 1910.
14) 参阅 Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, 846, 847, 853.
15) 弹性圆薄板大挠度问题．中国科学院出版，1954，北京．

力状态，其中只有应力分量 σ_x，σ_y 及 τ_{xy} 不等于零．对于较厚的板，关于这问题的一个完善的解，应考虑及六个应力分量．在圣维南所翻译的克莱勃许的书[1]中，给了这类问题几个解．对于圆形板几个严格的解曾为科洛波夫（A. Korobov）[2] 所得．密歇耳（J. H. Michell）[3] 提出板的严格理论的一般性的探讨，并且由勤务（A. E. H. Love）在他的弹性力学书[4]中作了进一步的发展．近来，板的严格理论已经引起工程师们的注意，并且有几个问题已经完全解出．华诺斯基[5]和迦辽金的论文尤其是应该特别地提出的．

薄板弯曲理论的直法线假设，等同于 G. 克希霍夫用最小位能原理，推导微分方程与边界条件时不计入横向剪力所产生的变形能．这两者均忽略横向剪力的剪切变形对薄板弯曲的影响．克希霍夫的薄板理论，用于大多数技术问题时，给出了足够精确的结果．但由于忽略横向剪切变形，得到的微分方程为四阶．因而对于每一边有两个边界条件．近似性质的边界条件，使板的边缘区(其尺寸等于板的厚度)的内力发生误差．

更精确的薄板理论，计入了横向剪切变形效应．一般地，将导致一个六阶的微分方程．因而对于每一边界，有三个独立的边界条件．例如对于自由边，则弯矩，横向剪力，扭矩各为零．对于较厚的板，以纤维加强的叠层复合材料板及带有裂纹的板，须用计入横向剪切变形的薄板理论．这理论主要是由 E. 赖斯纳[6]（Ressiner）开始发展起来的．现已有这方面的专著，例如V. 丕恩（panc）所著的弹性薄板理论．

从六十年代开始，由于计算机的应用，对于难以用一个或多个函数求解的薄板问题，可用有限元法得到由节点函数所表示的离散解．将板分为若干个三角形或四边形．节点函数可以是挠度或内力矩．由节点所联成的三角形或四边形内各点的函数值，可由插入函数来表示．然后根据最小位能原理，或最小余能原理，或广义变分原理，列出节点函数应满足的联立方程．弹性薄板的有限元法是多样化的，各有其优点与不足之处．这方面的探讨已成为一个从事研究的园地[7]．

*　　*　　*

苏联的学者们对于薄板力学作出了十分丰富的贡献．因此，在这里另作一概括的叙述[8]．

继承了那维埃、栾范等人以富里埃法求非齐次双调和方程的解的工作，Б. Г. 迦辽金作出了许多杰出的贡献；并将计算的结果制成大量的图表，以供工程设计所需．他将自己的研究成果总结在“弹性薄板”一书中．正如詹涅里杰在他的文章中所写的：“毫不夸张地可以说，在迦辽金的著作问世之前，板的古典理论只是少数数学家们的园地．但自从他的书出现以后，板的古典理论就成为工程师们真正的工具．”并且，为大家所熟悉的迦辽金

---

1) 参阅 “Théorie de L'elasticité des Corps Solides”（圣维南译），337 页．
2) 参阅 S. Timoshenko, Theory of Elasticity, p. 315, 1934.
3) Proc. London. Math. Soc., Vol. 31, p. 100, 1900.
4) 参阅 A. E. H. Love, Theory of Elasticity, 4th ed, p. 473, 1927.
5) Ing. -Arch., Vol. 4, pp. 203, 205, 1933.
6) 参阅J. Math. and Phys., Vol. 23, p, 184, 1944; J. Appl. Mechanics ,Vol. 12, p. A-68, 1945; Quart. Appl. Math., Vol. 5, p. 55, 1947.
7) 参阅 O. C. Zienkiewicz 所著 The Finite Element Method in Engineering Science 的第十章 Bending of plates 所列的文献．
8) 详尽的叙述，可参阅 Г. Ю. 詹涅里杰所写关于苏联学者们在板弯曲理论方面的研究的一篇专著［发表在 Прикл. Матем. и Механ., T. VII, 1948］；或参阅胡海昌所作的“苏联在薄板力学方面的贡献”(发表在“弹性薄板的小挠度平衡问题”一书)．有关的文献亦可参阅以上两篇文章．

目　　录

第 一 章

弹 性 薄 板 理 论

1. 弹性薄板的近似理论

在弹性薄板理论中所讨论的板，其厚度 h 系远小于其他两尺寸．并且，不同于弹性力学中的平面问题，作用于板的荷重并非位于平分板厚度的中间面内，而系垂直于板的平面，使板的中间面发生弯曲变形．

弹性薄板理论之所以称为近似理论，由于它是以几个假设为基础的．当然，这些假设必须反映事物本质的主要方面，而舍弃了次要的；并且，从这些假设所导致的结论，必须很好地为实践所证实．因此，一方面我们应了解到薄板理论的近似性，其中必然存在着一些并不很重要的自相矛盾之处(例如略去剪力对板弯曲的影响等)；在另一方面也必须认识到这理论表达了事物的主要特征．如果不从这些假设出发，而企图获得满足弹性力学的所有的微分方程的精确解，则将引导到目前认为是最困难的数学问题之一．因而到现在为止，只是对于极个别的简单情形，才获得了一些解．从而就可以了解到薄板近似理论在工程实际中的重要性．

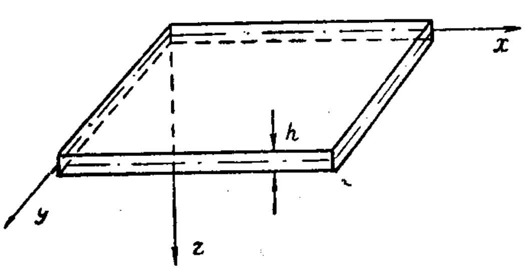

图 1

以发生弯曲变形前板的中间面作为 xy 坐标面，z 轴垂直向下(如图 1)．当板弯曲时，中间面内各点在 z 方向将有一位移 $w(x, y)$，称为板各点的挠度．我们限 w 与 h 相比要小得多，这样就可以忽略板在弯曲时中间面内各点的应变．这就是属于板弯曲的小挠度范畴的问题．弹性薄板弯曲的理论，是建立在以下两个假设上的：

(1) 在板变形前，原来垂直于板中间面的线段(即设想板是由无数长为 h 的垂直于中间面的线段材料密集而成的)，在板变形以后，仍垂直于微弯了的中间面．这就是在板与壳理论中的“法线假设”．

(2) 作用于与中间面相平行的诸截面内的正应力 σ_z，与横截面内的应力 σ_x，σ_y，τ_{xy} 等相比为很小，故可以忽略不计．

由于我们所讨论的，只限于 $w(x, y)$ 较板的厚度要小得多的问题 $\left(\text{小于板厚度的 } \frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)$，故认为中间面内各点在 x 与 y 方向的位移 u 与 v 是不存在的．但由第一个假设，在离中间面为 z 的点，其位移 u 与 v 各等于

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad v=-z\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1}$$

于是应变分量各为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

由第二个假设,从胡克定律得到:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],\\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],\\ \tau_{xy} &= -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

应力分量 τ_{zx} 与 τ_{zy} 可由以下两个平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

来决定. 将(3)式代入以上两式,并用 $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$, 同时注意到在板的上下两面上 $z = \pm\dfrac{h}{2}$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. 于是得到:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left[\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2G\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right],\\ \tau_{zy} &= \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left[\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2G\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right].\end{aligned}\tag{4}$$

这样,我们共得到五个应力分量(3)与(4)式. 平行于板中间面(xy 座标面)的 σ_x, σ_y, τ_{xy}, 在板厚度 h 内成线性分布. 正应力的分布与梁的相同. 剪应力 τ_{zx} 与 τ_{zy} 沿板厚度 h 成抛物线分布,亦与梁的剪应力分布相同. 在图 2 中,按照通常表示正应力与剪应力正负的习惯,给出它们沿板厚度的分布. 在以后计算板的弯矩, 扭矩与剪力时, 都按照这图中所示的分布为依据.

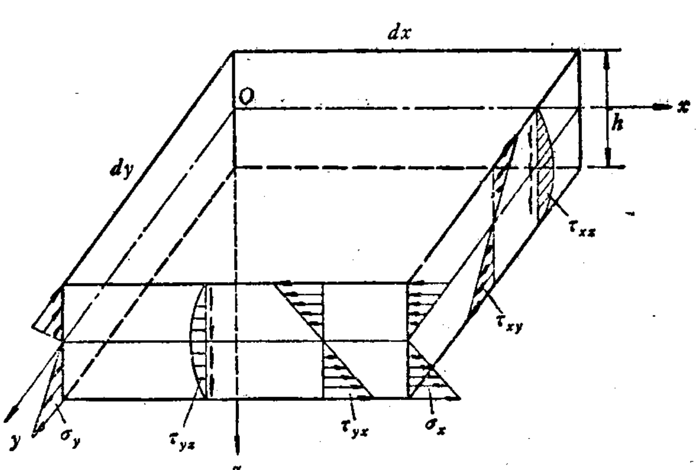

图 2

对材料力学中梁的理论作一回顾,对理解薄板理论是有益的. 梁的正应力是根据横截面的平面假设而得到的. 设想梁是由纵向线条材料集合而成;而原来垂直于纵向线条材料的横截面,当梁弯曲以后横截面保持平面仍垂直于各纵向线条材料. 这相当于忽略梁弯曲时较小的剪

切变形．在由此而得到梁的正应力以后，再由平衡条件进而计算梁的剪应力．剪应力当产生剪切变形．因而在理解上前后不相一致．这对于薄板理论情况是相同的．直法线假设亦相当于忽略较小的剪切变形 γ_{zx}，γ_{zy}．在已得的应力 σ_x，σ_y，τ_{xy} 的基础上，再根据平衡方程计算剪应力 τ_{zx}，τ_{zy}．这两剪应力当产生相应的剪应变．这样，薄板理论与梁的理论一样，在推演和理解上完全是一样的．

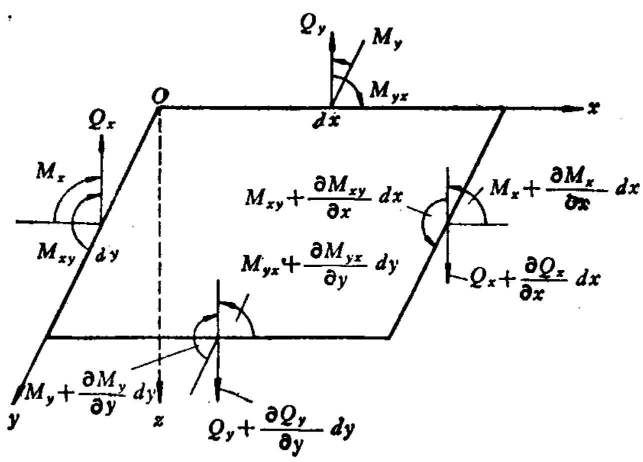

图 3

自板截出底边为 dx 与 dy 高为 h 的一个微小的六面体．作用在它侧面上的应力分量(图 2)，将归结为弯矩 M_xdy，M_ydx，$M_{xy}dy$，$M_{yx}dx$，Q_xdy，Q_xdy，如图 3 所示．正的弯矩使板中间面以下受拉，以上受压，这与材料力学中梁的弯矩的正负相同，剪力 Q_x，Q_y 的正负亦与材料力学的相同，即两相邻截面上的剪力 Q_x 所组成的力偶，其转向为反时针的．至于扭矩 M_{xy} 与 M_{yx}，当以向量来表示时，以截面的外法线方向表示正扭矩．于是，按照图 2 所示的正的正应力与剪应力分量，将得到：

$$M_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x z dz,\quad M_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y z dz,$$

$$M_{xy}=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy} z dz,\quad M_{yx}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{yx} z dz,$$

$$Q_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xz} dz,\quad Q_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{yz} dz.$$

上式的 M_{xy} 的积分号前的负号，表示相应于正的剪应力 τ_{xy} 将得到负的扭矩．将(3)与(4)式代入上式，得到：

$$\begin{aligned}
&M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
&M_{xy}=-M_{yx}=D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\\
&Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),
\end{aligned}\tag{5}$$

式中的 $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$，称为板的抗弯刚度．相应的应力分量可由以下各式计算：

$$\sigma_x=\frac{12M_xz}{h^3},\quad \sigma_y=\frac{12M_yz}{h^3},\quad \tau_{xy}=\frac{12M_{xy}z}{h^3},$$

$$\tau_{zx}=\frac{6Q_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right),\quad \tau_{zy}=\frac{6Q_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right).\tag{6.a}$$

关于扭矩将作以下补充．按照克希霍夫的薄板理论，在列出板的 $x=a$ 边界条件时，将扭矩 $M_{xy}dx$ 转化为相距 dx 而方向相反的两个垂直力 M_{xy}．因而在板的角点 (a,b) 将

作用一集中力R等于

$$R=2(M_{xy})_{\substack{x=a\\y=b}}=2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}. \tag{6.b}$$

为了要得到板弯曲面 $w(x,\ y)$ 的微分方程，须写出这微小的正六面体的平衡方程．在分别写出作用在各侧面上的弯矩，扭矩和剪力时，应考虑到它仍是随中间面各点的座标而改变的．在图(3)中表明了各侧面上所作用的弯矩，扭矩与剪力．垂直于板面的分布荷重其集度为 $q(x,\ y)$．由作用在这六面体上的力在 z 轴方向之和为零，以及对于六面体的平行于 x 轴及 y 轴的两条边各取矩，将得到以下这三个平衡方程:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0,\\&Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y},\\&Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

将(5)式代入，即得

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q(x,\ y). \tag{8}$$

这就是板的弯曲面的微分方程.

对于正交各向异性板，其弹性性质有三个对称面，并取它们为坐标面，于是应力与应变之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=E'_x\epsilon_x+E''\epsilon_y,\\\sigma_y&=E'_y\epsilon_y+E''\epsilon_x,\\\tau_{xy}&=G\gamma_{xy},\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

共有四个弹性常数．于是代替(3)式，将得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-z\left(E'_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+E''\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\\sigma_y&=-z\left(E'_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+E''\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\\tau_{xy}&=-2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

弯矩与扭矩的算式将分别为

$$\left.\begin{aligned}M_x&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x z\,dz=-\left[D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],\\M_y&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y z\,dz=-\left[D_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],\\M_{xy}&=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy}z\,dz=2D_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y};\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

式中的

$$D_x=\frac{E'_x h^3}{12},\ D_y=\frac{E'_y h^3}{12},\ D_1=\frac{E''h^3}{12},\ D_{xy}=\frac{Gh^3}{12}.$$