微分方程

原理及題解

方世榮 譯

曉園出版社

世界圖書出版公司

微分方程

原理及題解

方 世 榮 譯

曉 園 出 版 社
世界图书出版公司
北京・广州・上海・西安

内 容 简 介

本书是美国《肖姆氏概论》丛书之一，本书涵盖了几乎所有与微分方程有关的课题，从微分方程的起源到较高深的偏微分方程及其应用，内容非常丰富。

微分方程原理及题解（繁体字）
（美）艾尔斯 著
方世荣 译
*
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司 重印
北京朝阳门内大街137号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1993年6月第一版　开本：787×1245　1/20
1993年6月第一次印刷　印张：19
印数：0001－1300　字数：30.7万字
ISBN: 7－5062－1606－X/O·70
定价：11.80元 (W,9303/8)

序　言

本書為美國Schaum's outhine series科技精簡叢書之一，該叢書是將美國各大學所用各類教科書綜合後，摘其精要編寫而成。舉凡工程學，自然科學，社會科書以及數學等各種領域的學科皆羅列入該叢書的範圍內。

微分方程在數學，自然科書甚至社會科學方面，均佔極重要的地位，而為從事科學研究者所必備之基礎學識。本書作者的編寫卽針對此目的，由淺入深，所包括的內容極其豐富，幾乎所有與微分方程有關的課題皆列入本書中。從微分方程的起源直至較高深的偏微分方程以及更深入的應用，本書提出了一系列探討各類微分方程的求解方法與求解模式，可供讀者體會與熟悉微分方程的奧妙，進而得心應手地加以應用。

此外，本書亦針對補充正式課程所使用的教科書之不足而設計的。無論讀者的專業領域為何，均可由本書中獲得微分方程的基本觀念及應用。本書的編排除了第三章完全是一階一次微分方程的說明外，其餘各章開始對其重要的觀念與定理，定義都有精要且明晰的敍述，其中並附有許多的實例加以解說。隨後為進階性的解答題與精選的補充題。解答題是用來說明與擴大理論的應用，而補充題則是對基本原理的重覆練習。以提高學習效率。

由於本書所提供的教材比一般初等教材包含更多的內容，因此使教師們對課題的選擇更具彈性，亦可激發學生們對此學科產生興趣。書中所列的練習極其豐富，讀者不妨多花一點時間仔細地作過每一個練習，則對於微分方程之課程將可奠下更深厚的基礎。

譯者　方世榮

於1986.9

目　錄

第一章

微分方程式的來源

1·1 微分方程式

微分方程式是包含**導數**(derivative)的方程式，例如，

1) $\dfrac{dy}{dx} = x + 5$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

3) $xy' + y = 3$

4) $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$

5) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z + x\dfrac{\partial z}{\partial y}$

7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y.$

如果僅含一個自變數(independent variable)，如像在1)至5)中，則導數是**常導數**(ordinary derivative)而此方程式稱爲**常微分方程式**(ordinary differential equation)。

如果含有二個或以上的自變數，如像在6)至7)中，則導數是**偏導數**(partial derivative)，而此方程式稱爲**偏微分方程式**(partial differential equation)。

微分方程式的階(order)是最高導數的階數。方程式1)，3)與6)皆爲一階；方程式2)，5)與7)爲二階；而方程式4)爲三階。

微分方程式式中最高階導數的多項式之次數稱爲微分方程式的次(degree)。上面的例子中除了方程式5)爲二次外，其餘的皆爲一次微分方程式。

偏微分方程式將在第28章再討論，目前我們僅討論含有單一自變數的常微分方程式。

1·2 微分方程式的來源

a) 幾何問題．參見下面的問題1與2。

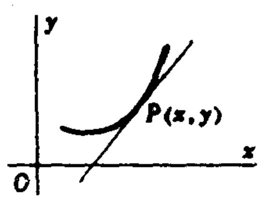
b) 物理問題．參見下面的問題3與4。

c) 原始式．變數間包含 n 個基本的任意常數的關係式，如 $y = x^4 + Cx$ 或 $y = Ax^2 + Bx$，稱爲**原始式**(primitive)。此 n 個常數通常以英文大寫字母表示，如果它們

無法用更少個數的常數來表示，則此 n 個常數稱爲基本的（essential）常數。參見問題5。

一般而言，包含 n 個基本的任意常數的原始式，可產生不含任意常數的 n 階微分方程式。這個方程式可從 $n+1$ 個方程式中消去 n 個常數而得到，而此 $n+1$ 個方程式乃由原始式與將原始式對自變數微分 n 次後所得到 n 個方程式所組成。參見6.14題。

習題與解答



1.1 一曲線的定義如下：曲線上的每一點（x，y）其斜率等於該點座標的和之兩倍，試以微分方程式表示此條件。

解 表示此條件的微分方程式是 $\dfrac{dy}{dx}=2(x+y)$.

1.2 一曲線的定義如下：曲線上之切線的 x 與 y 之截距（intercept）的和等於2，試以微分方程式來表示此條件。

解 曲線上點（x，y）的切線方程式是 $Y-y=\dfrac{dy}{dx}(X-x)$ 且 x 與 y 的截距分別是

$X=x-y\dfrac{dx}{dy}$ 與 $Y=y-x\dfrac{dy}{dx}$。表示此條件的微分方程式是

$$X+Y=x-y\frac{dx}{dy}+y-x\frac{dy}{dx}=2 \quad 或 \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x+y-2)\frac{dy}{dx}+y=0.$$

1.3 水中有100克的蔗糖正以某速率轉變爲葡萄糖，此速率乃比例於未轉變的量，求出 t 分鐘後表示此轉變速率的微分方程式。

解 設 q 表示 t 分鐘內轉變的克數，則未轉變的量爲（$100-q$）克，故此時之轉變速率爲 $\dfrac{dq}{dt}=k(100-q)$，其中 k 爲比例常數。

1.4 質量爲 m 的粒子沿着一直線（x-軸）運動，而受到兩個力的作用：其中一個力比例於其位移 x（沿着其路徑，向着固定點 O 移動），另一個力（阻力）比例於其速度。試以微分方程式來表示此合力。

解 第一個力可表示爲 $-k_1x$ 而第二個力可表示爲 $-k_2x\dfrac{dx}{dt}$，其中 k_1 與 k_2 是比例常數。

合力（質量×加速度）爲 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k_1x-k_2\dfrac{dx}{dt}$.

1.5　下列各個方程式中 a) $y=x^2+A+B$, b) $y=Ae^{x+B}$, c) $y=A+\ln Bx$，證明兩個任意常數中僅有其中的一個是基本的。

解　a）因爲 $A+B$ 可併成一個任意常數（例如 C），因此僅含一個基本的任意常數。

b）$y=Ae^{x+B}=Ae^{x}e^{B}$，而 Ae^{B} 可併成一個任意常數。

c）$y=A+\ln Bx=A+\ln B+\ln x$，而 $(A+\ln B)$ 可併成一個任意常數。

1.6　求出關於原始式 $y=Ax^2+Bx+C$. 的微分方程式。

解　因爲原始式有三個（基有的）任意常數，因此，考慮下面四個方程式

$$y=Ax^2+Bx+C,\qquad \frac{dy}{dx}=2Ax+B,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2A,\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

最後一個方程式 $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$ 沒有任意常數，且恰爲三階微分方程式，故即爲所求。

注意，上面的前三個方程式，其常數無法消去，而且原始式可對此微分方程式利用積分而求得。

1.7　求出關於原始式 $x^2y^3+x^3y^5=C$, 的微分方程式。

解　對 x 微分一次，可得 $(2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx})+(3x^2y^5+5x^3y^4\frac{dy}{dx})=0$ 或，當 $xy\ne 0$ 時，

可得 $(2y+3x\frac{dy}{dx})+xy^2(3y+5x\frac{dy}{dx})=0$，此即爲所要求的方程式。

當以微分記號寫出時，這些方程式爲

1）$(2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy)+(3x^2y^5\,dx+5x^3y^4\,dy)=0$

與　2）$(2y\,dx+3x\,dy)+xy^2(3y\,dx+5x\,dy)=0$

注意，此時原始式可對 1）而非對 2）採用積分而求得。因此，當 2）爲已知而要求原始式時，必須找出已從 1）消去的因子 xy^2。

1.8　求出關於原始式 $y=A\cos ax+B\sin ax$ 的微分方程式，其中 A 與 B 是任意常數，而 a 爲一固定常數。

解　此處 $\dfrac{dy}{dx}=-Aa\sin ax+Ba\cos ax$

且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-Aa^2\cos ax-Ba^2\sin ax=-a^2(A\cos ax+B\sin ax)=-a^2y.$

我們所要求的微分方程式即爲 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0.$

1.9 求出關於原始式 $y=Ae^{2x}+Be^{x}+C$. 的微分方程式。

解 此處 $\frac{dy}{dx}=2Ae^{2x}+Be^{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=4Ae^{2x}+Be^{x}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=8Ae^{2x}+Be^{x}$.

於是 $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}=4Ae^{2x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2Ae^{2x}$, $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}=2(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx})$.

我們所要求的方程式爲 $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0$.

1.10 求出關於原始式 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+C_3e^{x}$. 的微分方程式。

解 此處 $\frac{dy}{dx}=3C_1e^{3x}+2C_2e^{2x}+C_3e^{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=9C_1e^{3x}+4C_2e^{2x}+C_3e^{x}$,

且 $\frac{d^3y}{dx^3}=27C_1e^{3x}+8C_2e^{2x}+C_3e^{x}$.

利用基本的方法將這些常數消去是頗煩雜的。若對此三個方程式利用行列式求解 C_1, C_2, C_3 而後代入第四個方程式，最後結果可寫成如下形式(稱爲消去式(eliminant))：

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{2x} & e^{x} & y \\ 3e^{3x} & 2e^{2x} & e^{x} & y' \\ 9e^{3x} & 4e^{2x} & e^{x} & y'' \\ 27e^{3x} & 8e^{2x} & e^{x} & y''' \end{vmatrix} = e^{6x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 3 & 2 & 1 & y' \\ 9 & 4 & 1 & y'' \\ 27 & 8 & 1 & y''' \end{vmatrix} = e^{6x}(-2y'''+12y''-22y'+12y)=0.$$

於是，我們所要求的微分方程式爲 $\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=0$.

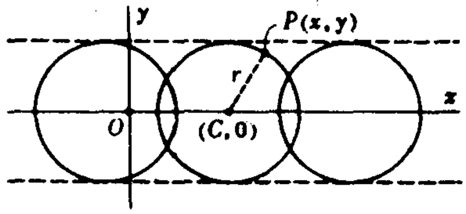
1.11 求出關於原始式 $y=Cx^2+C^2$. 的微分方程式。

解 因爲 $\frac{dy}{dx}=2Cx$, $C=\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}$ 且 $y=Cx^2+C^2=\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}x^2+\frac{1}{4x^2}(\frac{dy}{dx})^2$.

因此，所要求的微分方程式爲 $(\frac{dy}{dx})^2+2x^3\frac{dy}{dx}-4x^2y=0$.

注意，此原始式包含一個二次的任意常數，且所求得的微分方程式是二次一階的。

1.12 求出半徑爲 r 而圓心位於 x 軸上的圓族的微分方程式。

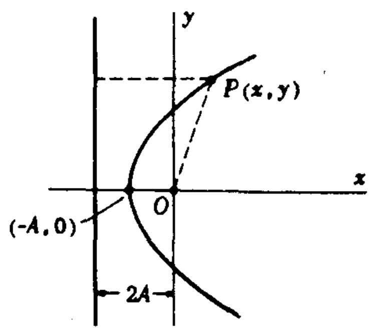


解 此圓族的方程式是 $(x-C)^2+y^2=r^2$，C 爲任意的常數。

於是 $(x-C)+y\dfrac{dy}{dx}=0$, $x-C=-y\dfrac{dy}{dx}$ 故此微分方程式為 $y^2(\dfrac{dy}{dx})^2+y^2=r^2$.

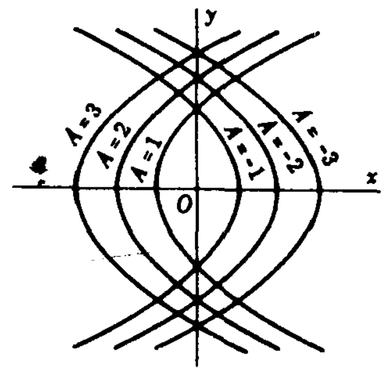
1.13 求出軸為沿着 x - 軸且焦點在原點的拋物線族的微分方程式。

解



$x^2+y^2=(2A+x)^2$

$y^2=4A(A+x)$



$y^2=4A(A+x)$

此拋物線族的方程式為 $y^2=4A(A+x)$.

於是 $yy'=2A$, $A=\frac{1}{2}yy'$ 且 $y^2=2yy'(\frac{1}{2}yy'+x)$.

故所要求的微分方程式為 $y(\dfrac{dy}{dx})^2+2x\dfrac{dy}{dx}-y=0$.

1.14 寫出代表拋物線 $y^2=2x$ 的所有切線的微分方程式。

解 設拋物線上的任意點(A,B),則此切線方程式為 $y-B=(x-A)/B$,又因為 $A=\frac{1}{2}B^2$ 故 $By=x+\frac{1}{2}B^2$。將此式對 x 微分,可得 $By'=1$。由方程式 $By=x+\frac{1}{2}B^2$ 與 $By'=1$,可將 B 消去,最後可得我們要求的微分方程式 $2x(y')-2yy'+1=0$。

補充題

1.15 將下列各個方程式依階數與次數來分類。

a) $dy+(xy-\cos x)dx=0$ 答 一階一次

b) $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q}{C}=0$ 答 二階一次

c) $y'''+xy''+2y(y')^2+xy=0$ 答 三階一次

d) $\dfrac{d^2v}{dx^2}\dfrac{dv}{dx}+x(\dfrac{dv}{dx})^2+v=0$ 答 二階一次

e) $(\dfrac{d^3w}{dv^3})^2-(\dfrac{d^2w}{dv^2})^4+vw=0$ 答 三階二次

f) $e^{y'''} - xy'' + y = 0$　　答 三階，次數不通用

g) $\sqrt{\rho'+\rho} = \sin\theta$　　答 一階一次

h) $y' + x = (y - xy')^{-3}$　　答 一階四次

i) $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + (\dfrac{d\rho}{d\theta})^2}$　　答 二階四次

1.16 對下面由已知條件所決定的各個曲線以微分方程式表示。

a) 曲線上每點（ x ，y ）的切線斜率等於點的横座標之平方 。

答 $y' = x^2$

b) 曲線上每點（ x ，y ）的次切線長度等於該點座標的和 。

答 $y/y' = x + y$ or $(x+y)y' = y$

c) 連接P（ x ，y ）與P點的法線和x軸相交的點的線段被y軸所平方。

答 $y + x\dfrac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y$ or $yy' + 2x = 0$

d) 曲線上每點（ ρ ，θ ）之向徑（radius vector）與切線間之夾角的正切等於⅓乘以向量角（vectorial angle）的正切 。

答 $\rho\dfrac{d\theta}{d\rho} = \dfrac{1}{3}\tan\theta$

e) 由曲線的弧，x 軸與二個横座標（一爲固定，一爲變動）所界定的正域面積等於此座標間弧長的兩倍 。

提示：$\int_a^x y\,dx = 2\int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. 答 $y = 2\sqrt{1+(y')^2}$

1.17 將下列各個物理敍述以微分方程式形式表示。

a) 鐳的分解速率比例於現存量Q 。

答 $dQ/dt = -kQ$

b) 城市人口P的增加率比例於人口且亦比例於 200,000 與人口的差額。

答 $dP/dt = kP(200{,}000 - P)$

c) 某種物質的氣壓（ P ）對溫度（ T ）的變化率比例於氣壓且反比例於溫度的平方

答 $dP/dT = kP/T^2$

d) 電感L横跨一元件的電位差E等於L與電感中電流 i 的時間變化率之乘積 。

答 $E = L\dfrac{di}{dt}$

e) 質量×加速度＝淨力

答 $m\dfrac{dv}{dt} = F$ 或 $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = F$

1.18 求出關於各已知原始式的微分方程式，其中A與B是任意的常數。

a) $y = Ax$　　答 $y' = y/x$

b) $y = Ax + B$　　答 $y'' = 0$

c) $y = e^{x+A} = Be^x$　　答 $y' = y$

d) $y = A \sin x$　　答 $y' = y \cot x$

e) $y = \sin(x + A)$　　答 $(y')^2 = 1 - y^2$

f) $y = Ae^x + B$　　答 $y'' = y'$

g) $x = A \sin(y + B)$　　答 $y'' = x(y')^3$

h) $\ln y = Ax^2 + B$　　答 $xyy'' - yy' - x(y')^2 = 0$

1.19 求出半徑爲可變的且圓心在x軸上的圓族的微分方程式（與問題12比較）。

提示：$(x-A)^2 + y^2 = r^2$，其中A與r爲任意常數。

答 $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$

1.20 求出心臟族（family of cardiods）$\rho = a(1 - \cos\theta)$的微分方程式。

答 $(1 - \cos\theta)d\rho = \rho \sin\theta \, d\theta$

1.21 求出距原點單位距離的所有直線之微分方程式。

答 $(xy' - y)^2 = 1 + (y')^2$

1.22 求出平面上所有圓的微分方程式。

提示：Use $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$.

答 $[1 + (y')^2]y''' - 3y'(y'')^2 = 0$

第 二 章

微分方程式的解

初等微分方程式

初等微分方程式所探討的問題，基本上是要把產生此微分方程式的原始式復原。換句話說，求解 n 階微分方程式的問題，基本上就是要求變數間包含 n 個獨立任意常數與由此求得的導數間的關係式，而滿足此微分方程式。例如：

	微分方程式	原始式	
1)	$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$	$y = Ax^2 + Bx + C$	（第一章問題6）
2)	$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$	$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^x$	（第一章問題10）
3)	$y^2(\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = r^2$	$(x-C)^2 + y^2 = r^2$	（第一章問題12）

微分方程式有解的條件可從**存在定理**（Existence Theorem）得出。

例如，$y = g(x, y)$ 的微分方程式，且

a）$g(x, y)$ 在區域 R 內的所有點 (x, y) 是連續的且為單一值的；

b）$\frac{\partial g}{\partial y}$ 在 R 內的所有點都是存在的且連續的，

則此微分方程式含有無限多解 $f(x, y, C) = 0$（C 是任意常數），使得 R 中的每一點恰有一曲線族 $f(x, y, C) = 0$ 通過該點。參見問題5。

微分方程式的**特解**（particular solution）是對原始式中的任意常數指定一特定的值而得到的。例如，上面的1）中的原始式 $y = 0$ $(A = B = C = 0)$，$y = 2x + 5$ $(A = 0, B = 2, C = 5)$ 與 $y = x^2 + 2x + 3$ $(A = 1, B = 2, C = 3)$ 皆是特解。

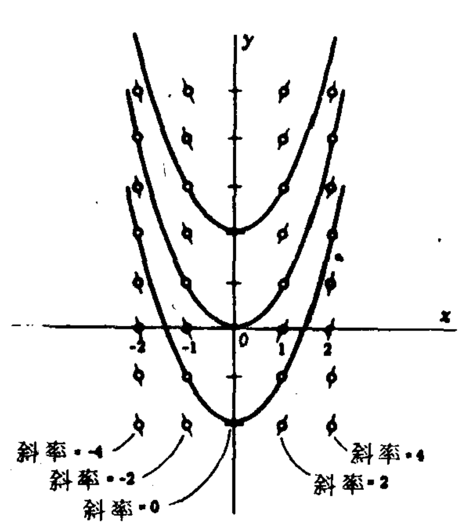
以幾何的觀點來看，原始式是曲線族的方程式而特解乃是這些曲線中的一曲線方程式。這些曲線稱為微分方程式的**積分曲線**（integral curves）。

正如即將在問題 6 可看到的，一已知形式的原始式可能不包含所有的特解。此外，從問題 7 中將可知道，微分方程式也可能具有某些解不能從原始式中處理任意常數而得到。此種解稱爲**奇異解**（singular solution），我們將在第 10 章討論。

微分方程式的原始式通常稱爲方程式的**通解**（general solution）。

微分方程式 $\frac{dy}{dx}=g(x,y)$ 中，在上面的存在定理的區域 R 內的每一點（x_0，y_0）的方向爲 $m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}=g(x_0,y_0)$. 每一點的方向也就是曲線族 $f(x,y,C)=0$（亦即，原始式）通過該點的**正切**（tangent）（或說成該點切線的方向）。

含各點方向的區域 R 稱爲**方向場**（direction field）。如右圖中，各點的方向以微分方程式 $dy/dx=2x$ 表示。此微分方程式的積分曲線，即爲各點具有微分方程式所表示的方向的那些曲線。在本例中，此積分曲線即爲拋物線。



雖然此類的圖形在說明微分方程式與原始式間的關係很有幫助，但因爲積分曲線通常都是很複雜的，因此，此類的圖形在求出曲線的方程式上並無多大的幫助。

習題與解答

2.1　將原始式直接代入微分方程式，然後檢查任意常數，以證明原始式可產生對應的微分方程式。

a)　$y=C_1\sin x+C_2x$　　　$(1-x\cot x)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$

b)　$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}+2x^2e^x$　　　$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=8e^x$

解　*a*）將 $y=C_1\sin x+C_2x$, $\frac{dy}{dx}=C_1\cos x+C_2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-C_1$ 代入微分方程式，可得

$$(1 - x\cot x)(-C_1\sin x) - x(C_1\cos x + C_2) + (C_1\sin x + C_2 x) =$$
$$-C_1\sin x + C_1 x\cos x - C_1 x\cos x - C_2 x + C_1\sin x + C_2 x = 0.$$

微分方程式的階數(2)與任意常數個數(2)一致。

b)
$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + 2x^2e^x,$$
$$y' = (C_1 + C_2)e^x + C_2xe^x - C_3e^{-x} + 2x^2e^x + 4xe^x,$$
$$y'' = (C_1 + 2C_2)e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + 2x^2e^x + 8xe^x + 4e^x,$$
$$y''' = (C_1 + 3C_2)e^x + C_2xe^x - C_3e^{-x} + 2x^2e^x + 12xe^x + 12e^x,$$

因此 $y''' - y'' - y' + y = 8e^x$ 微分方程式的階數與任意常數的個數一致。

2.2　證明 $y = 2x + Ce^x$ 是微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - y = 2(1-x)$ 的原始式，並求出 $x = 0$，$y = 3$ 所滿足的特解，即積分曲線通過（0，3）的方程式。

解　將 $y = 2x + Ce^x$ 與 $\dfrac{dy}{dx} = 2 + Ce^x$ 代入微分方程式，可得 $2 + Ce^x - (2x + Ce^x) = 2 - 2x$.。當 $x = 0$，$y = 3$ 時，$3 = 2\cdot 0 + Ce^0$，故 $C = 3$。於是，特解爲 $y = 2x + 3e^x$。

2.3　證明 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x$ 是微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 2x - 3$ 的原始式，並求出通過點（0，0）與（1，0）的積分曲線的方程式。

解　將 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x$, $\dfrac{dy}{dx} = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 1$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = C_1e^x + 4C_2e^{2x}$ 代入微分方程式，可得 $C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 1) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x} + x) = 2x - 3.$

當 $x = 0,\ y = 0$: $C_1 + C_2 = 0$.當 $x = 1,\ y = 0$: $C_1e + C_2e^2 = -1$.

於是 $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{e^2 - e}$ 故所要求的方程式是 $y = x + \dfrac{e^x - e^{2x}}{e^2 - e}$

2.4　證明 $(y - C)^2 = Cx$ 是微分方程 $4x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ 的原始式，並求出通過點（1，2）的積分曲線的方程式。

解　$2(y-C)\dfrac{dy}{dx} = C$　與　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C}{2(y-C)}$.

於是 $4x\dfrac{C^2}{4(y-C)^2} + 2x\dfrac{C}{2(y-C)} - y = \dfrac{C^2x + Cx(y-C) - y(y-C)^2}{(y-C)^2} = \dfrac{y[Cx - (y-C)^2]}{(y-C)^2} = 0.$

當 $x = 1,\ y = 2$:　$(2 - C)^2 = C$　故　$C = 1, 4.$