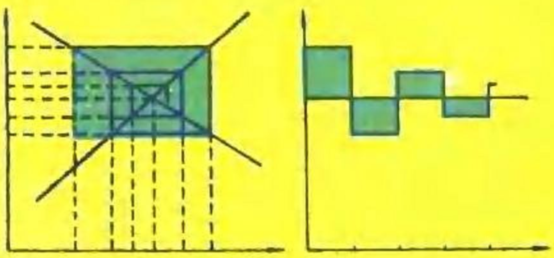
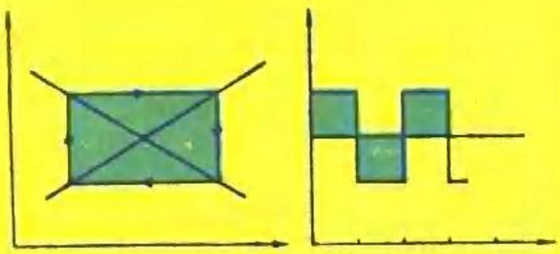
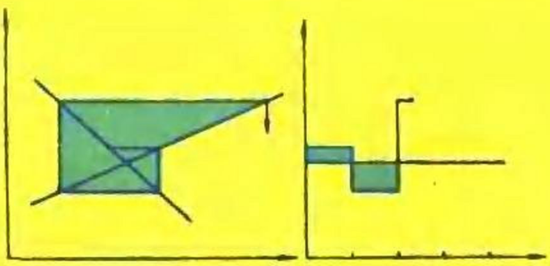
动态经济学
——方法与模型

龚德恩　舒辅琪　俞翔华　编译







动态经济学

——方法与模型

龚德恩　舒辅琪　俞翔华　编译

中国人民大学出版社

动态经济学——方法与模型
龚德恩　舒辅琪　俞翔华 编译

●

中国人民大学出版社出版发行
（北京西郊海淀路39号）
中国人民大学出版社印刷厂印刷
（北京鼓楼西大石桥胡同61号）
新 华 书 店 经 销

●

开本：850×1168毫米32开　印张：11.625
1990年9月第1版　1990年9月第1次印刷
字数：281 000　册数：1-3 000

●

ISBN 7-300-00736-8

F·223　　　定价：5.30元

序

在古典经济学著作中我们可以看到许多算术例子。1870年以后，洛桑学派的瓦尔拉（Walras）、帕累托（Pareto）和英国的杰文斯（Jevons）、美国的费希尔（Fisher）等人，将更加强有力的微积分与代数方法引入经济学。整个经济变量网络与可以用一组联立方程表示的一般均衡模型联系起来的思想，逐渐深入人心。以丁伯根（Tinbergen）、克莱因（Klein）等为代表的经济计量学家，则进一步将数理经济学与经济数据结合起来，以解释经济过程。数理经济学和经济计量学虽然不是经济科学的同义词，但在其中占有极重要的地位，而差分方程与微分方程又是数理经济学和经济计量学的常用工具。

经济是在时间过程中不断演化的动态系统。不仅同一时期的经济变量相互作用，前期的经济变量对后期的经济变量也有作用。所以，经济变量实际上是有时间下标的。不考虑经济变量的时间属性的静态模型，只能作为经济问题的初步近似，距离真实尚远。

龚德恩、舒辅琪、俞翔华编译的《动态经济学——方法与模型》一书，将传统的差分方程和微分方程与他们在动态经济模型中的应用紧密结合起来，为读者学习现代数理经济学和经济计量学提供了必要的津梁。作为大学生或研究生的教材或补充读物都是有益的。

王宏昌

1989年8月于北京

编 译 者 前 言

西方著名经济学家、1970年诺贝尔经济学奖金获得者保罗·萨缪尔森在其名著《经济学》一书中曾指出："经济学研究人和社会如何作出最终抉择，在使用或不使用货币的情况下，来使用可以有其他用途的稀缺的生产性资源来在现在或将来生产各种商品，并把商品分配给社会的各个成员或集团以供消费之用。它分析改善资源配置型式所需的代价和可能得到的利益。"①当然，萨缪尔森所讲的是西方经济学。西方经济学的发展可分为古典经济理论、新古典经济理论，以及现代经济理论三个阶段。

古典经济理论很少用到数学，或者只用到简单的初等数学。代表人物有斯密、李嘉图、马尔萨斯等人。

新古典经济理论开始大量使用数学，特别是17世纪开始创立的微积分学。代表人物有瓦尔拉、马歇尔、凯恩斯等人。

现代西方经济理论则以建立经济模型来分析经济现象的"定量分析"方法为其特征。"经济科学日益朝着用数学表达经济内容和统计定量的方向发展"，"数理经济学和经济计量学，表明了最近几十年这个学科的发展。"②其代表人物几乎都诞生于本世纪。从1969年第一次颁发诺贝尔经济学奖金以来，20多位获奖者中，绝大多数都是数理经济学或经济计量学大师。如丁伯根、萨缪尔森、希克斯、康托洛维奇、列昂节夫等人。

---

① 保罗·萨缪尔森：《经济学》，高鸿业译，商务印书馆1981年版。

② 王宏昌编译：《诺贝尔经济学奖金获得者讲演集》，中国社会科学出版社1986年版，第1页。

为什么现代西方经济学以定量分析为其主要特征呢？这是与西方资本主义自由经济的特殊性有关的。我们知道，西方各种社会经济现象之间的联系是如此错综复杂，以至于对任何一种经济主张，人们都能提出赞成的理由，也不难找到反对的依据。定性经济理论对此常常是进退两难，顾此失彼，甚至是无能为力的。例如，当一个国家面临经济衰退时，如何选择对策呢？可有如下两种方案：

方案甲：（1）削减工资→增加企业利润→刺激开工→复苏；（2）削减利息→刺激投资新产业→复苏。

方案乙：（1）增加工资→刺激消费→生产回升；（2）增加利息→增加存款→增加银行贷款能力→有利投资→复苏。

两种定性的方案如此对立，如何取舍呢？出路之一就是根据具体情况作定量分析。

当然，应强调的是，定性的经济理论也是非常重要的，它是定量分析的理论基础。缺乏定性经济理论的指导，定量的经济分析只能认为是数学游戏，而无任何实际利用的价值。

使用数学的程度，可以说是经济学成熟程度的重要标志之一。本书采用模型化的定量分析方法，研究动态经济问题。亦即，将各经济变量都看作时间的函数，在一定的经济假设条件下，建立各经济变量之间的函数关系（或函数方程或函数方程组），然后讨论函数方程（组）的求解方法，以及解的变化趋势（即稳定性、振荡性）。这是西方经济学中热门的研究课题之一。

本书主要取材于G.甘多尔弗(G.Gandolfo)著的《Economic Dynamic: Methods and Models》一书的1979年第二版。原书是罗马大学高年级大学生与研究生用的教材，假定读者已学过西方经济学的基本知识。全书分为两篇共18章。第一篇介绍常系数线性差分方程(组)的基本理论及其在经济学中的应用。第二篇介绍常系数线性微分方程(组)的基本理论及其在经济学中的

应用。为了方便中国的读者，我们在编译时，参照历以宁、秦宛顺著《现代西方经济学概论》等书，对原书一些内容作了必要的改写和补充。原书中具有附录性质的第三部分，涉及非线性微分方程、混合微分差分方程等更深的数学知识，考虑到本书的多数读者不一定熟悉这些数学知识，而且这一部分的经济应用例子也不多，故编译时未将这部分内容编入本书。

凡是具有一般的微积分和线性代数知识的读者，阅读本书时在数学上不会感到困难。全书重点是介绍经济应用，共介绍了西经方济学中30多个著名的模型，希望读者能收“熟读唐诗三百首，不会吟诗也会吟”之效。

本书可作为经济、管理、数量经济学、应用数学及其他有关专业的高年级大学生和一年级研究生的教材，也可供有关专业的教师或科研工作者参考。

本书承蒙数量经济学家王宏昌教授审阅并作序，特向王宏昌教授表示衷心的感谢。本书责任编辑苏一针同志，为此书的出版付出了辛勤的劳动，也向苏一针同志表示衷心的感谢。

本书的编译原则由龚德恩、舒辅琪共同商定。第一篇和第二篇的最后一章的初稿，由舒辅琪完成，第二篇的前八章初稿由俞翔华、龚德恩共同完成。最后的修改和定稿工作则由龚德恩完成。由于编译者水平所限，特别是西方经济学方面的知识水平所限，编译本中错误与不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编译者

1989年8月1日于北京

目　录

第二篇 常系数线性微分方程

绪　论

什么是动态系统？不同的人会有不同的理解，会给出不同的定义。下面是著名的经济学家、诺贝尔经济学奖金获得者拉格纳·弗里希和保罗·A·萨缪尔森给动态系统下的定义：

"如果一个系统的行为自始至终都决定于一个（或一组）函数方程，而此方程（或方程组）必须在实质上包含各个不同时刻的变化，则称这个系统为动态系统。"

简言之，动态系统是一个在实质上随时间变化而变化的系统。这个定义比较全面地概述了动态系统的形式特征，是一个较精确、较通用的定义。

那么，什么是动态经济学呢？有人说，动态经济学是经济理论的一个分支，在这个分支所研究的问题中，每个变量都必须标注时间；与此相反，当问题中的变量不用标注时间时，就成为静态经济学。也有人说，动态经济学是与经济增长和稳定有关的经济学。

显然，这些定义都是立足于问题的经济学实质，是不全面的。本书将不采用这类定义，而是按照弗里希与萨缪尔森关于动态系统的定义来理解动态经济学。即，动态经济学研究的经济系统应是：描述经济系统的函数方程必须在实质上包含系统在各个不同时刻的变化。

那么，什么是函数方程呢？关于函数方程我们仅给出有关知识的概貌，以够用为度。至于函数方程的一般理论，因超出本书的讨论范围，就不多作介绍了。

通常，**将含有未知函数的方程称为函数方程**。众所周知，解方程就是求一个或多个未知量的值，使它满足所要求解的方程。而求解函数方程就是求一个或多个未知函数，使它**恒等地满足**所要求解的函数方程。所求得的未知函数称为所要求解的**函数方程的解或积分**。所谓“恒等地满足”是指，所要寻求的未知函数对其自变量的一切可能的取值，都应满足待求解的函数方程。理解这一点非常重要。举例如下：

考察函数方程：

$$y'(x)-y(x)=0 \tag{0.1}$$

容易验证函数 $y(x)=Ae^x$，$-\infty<x<+\infty$，是函数方程(0.1)的解，其中A为任意常数。

事实上，因为 $y'(x)=(Ae^x)'=Ae^x$，故有

$$y'(x)-y(x)=Ae^x-Ae^x\equiv 0$$

上式对一切 $x\in(-\infty,\ +\infty)$恒成立。

而函数

$$y(x)=ax+b\quad(a\text{ 和 }b\text{ 为常数}) \tag{0.2}$$

却不是函数方程（0.1）的解。虽然当 $x=(a-b)/a$ 时，有 $y'(x)-y(x)=a-a=0$；但当$x\neq(a-b)/a$时，却有 $y'(x)-y(x)=a-(ax+b)=a[(a-b)/a-x]\neq 0$。因此，(0.2)式定义的函数不能“恒等地满足”函数方程(0.1)，故不是(0.1)的解或积分。

为了简单起见，今后我们将省略“恒等地”一词，而将“满足”函数方程，理解为“恒等地满足”函数方程。

另外，我们说一个“函数”满足待求解的函数方程，是指该函数的“形式”，任意常数不算在内。例如，$y=Ae^x$ 是满足函数方程（0.1）的函数（即解或积分），其中任意常数 A 不能由函数方程(0.1) 确定。后面将会看到，函数方程只能确定解或积分的“形式”，要确定解或积分中的任意常数，必须附加其他

条件。

如果自变量 x 表示时间，则函数方程(0.1)表示：未知函数 $y=y(x)$在任何时刻的值，都应等于它的导数 $y'(x)$（即 y 的变化速度）在相应时刻的值。通常，当自变量表示时间时，用符号 t 表示。当然，函数方程不只是适用于动态问题，故自变量可以具有任何其他的含义。因本书只讨论动态经济问题，故自变量均指时间，并用 t 表示。

最后，再强调一下，在讨论动态经济问题时，时间的引入必须是“实质性”的。换言之，各种经济变量的值在“各个不同的时刻”，均须受到所给函数方程的约束。

动态经济学中最常见的函数方程有**常系数线性差分方程**和**常系数线性微分方程**。本书将分第一篇和第二篇两个部分，分别介绍这两类函数方程的基本知识及其在经济学中的应用。

第一篇　常系数线性差分方程

第一章　差分方程的一般原理

§1.1　差分方程的基本概念

一、差分概念

已知函数 $y=f(t)$，其自变量 t 表示时间，并取离散的等间隔整数值，即 $t=0$，± 1，± 2，…。为简化起见，记 $y_t=f(t)$，$y_{t+1}=f(t+1)$等等。注意，因 t 取等间隔离散值，故函数 $y=f(t)$也只能在相应点有定义。

函数 $y=f(t)$在时刻 t 的**一阶差分**定义为

$$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t=f(t+1)-f(t)$$

依此定义有

$$\Delta y_{t+1}=y_{t+2}-y_{t+1}=f(t+2)-f(t+1)$$
$$\Delta y_{t+2}=y_{t+3}-y_{t+2}=f(t+3)-f(t+2)$$
…………

函数 $y=f(t)$ 在时刻 t 的**二阶差分**定义为一阶差分的差分，即

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t&=\Delta(\Delta y_t)=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t\\&=(y_{t+2}-y_{t+1})-(y_{t+1}-y_t)\\&=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t\end{aligned}$$

依此定义有

$$\Delta^2 y_{t+1} = \Delta y_{t+2} - \Delta y_{t+1} = y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1}$$

$$\Delta^2 y_{t+2} = \Delta y_{t+3} - \Delta y_{t+2} = y_{t+4} - 2y_{t+3} + y_{t+2}$$

…………

注意，二阶差分$\Delta^2 y_t$中的上标 2 表示差分运算重复了两次，即差分算子Δ使用了两次。

依此类推，计算两个相继的二阶差分的差，便可得到**三阶差分**

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_t &= \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t \\ &= (\Delta y_{t+2} - \Delta y_{t+1}) - (\Delta y_{t+1} - \Delta y_t) \\ &= \Delta y_{t+2} - 2\Delta y_{t+1} + \Delta y_t \\ &= (y_{t+3} - y_{t+2}) - 2(y_{t+2} - y_{t+1}) + (y_{t+1} - y_t) \\ &= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_{t+1} &= \Delta^2 y_{t+2} - \Delta^2 y_{t+1} \\ &= y_{t+4} - 3y_{t+3} + 3y_{t+2} - y_{t+1}\end{aligned}$$

…………

关于更高阶的差分，可类似地定义。一般的k**阶差分**（k为正整数）定义为

$$\begin{aligned}\Delta^k y_t &= \Delta(\Delta^{k-1} y_t) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{t+k-i} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots)\end{aligned}$$

其中$C_k^i = k!/[i!(k-i)!]$。

二、常差分方程

我们将**含有未知函数$y = f(t)$的一个或多个差分Δy_t，$\Delta^2 y_t$……的函数方程，称为常差分方程。**

之所以称为常，是因为未知函数$y = f(t)$只含有一个自变量t。当未知函数含有的自变量多于一个时，应考虑函数的**偏差分**。这时，若函数方程中出现函数的偏差分，就称该函数方程为**偏差分方程**。本书不考虑偏差分方程。因此，今后我们将常差分方程