高等学校试用教材

数学·逻辑与教育

孙名符　吕世虎　傅　敏　王仲春　编著

高等教育出版社

数学·逻辑与教育

孙名符　吕世虎
傅　敏　王仲春　编著

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

本书是继我社1989年出版的《数学思维与数学方法论》之后的教育理论丛书之一。该书用现代认识论和方法论的思想，从更深层次揭示了数学、逻辑与教育三者之间的内在联系与相互关系。

本书的主要内容为：数学与逻辑的特征分析．数学对逻辑发展的作用和意义，逻辑对数学发展的作用和意义．逻辑对教育发展的作用和意义，教育对逻辑发展的作用和意义．数学与教育在发展过程中的相互作用与影响以及数学教育与人的全面发展等。

本书可作为高等师范院校数学教育课程教材或选修课教材，也可作为中学教师进修参考书。

数学·逻辑与教育

孙名符　吕世虎
傅　敏　王仲春　编著

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

开本850×1168 1/32　印张 8.75　字数 220 000
1994年1月第1版　1994年1月第1次印刷
印数0001—2 670
ISBN7-04-004694-6/O·1324
定价 4.85 元

前　言

本书是作者继《数学教学系统方法概论》、《数学思维与数学方法论》之后，研究数学教育学理论基础的一本新作。该书用现代认识论和方法论的思想，全面地揭示了数学、逻辑与教育三者之间在较深层次上的相互制约，相互影响，相互促进、协调发展的内在规律性。

"数学教育学"是一门涉及数学、逻辑学、教育学、心理学、哲学等几门学科的横向交叉新兴学科。因此，要建立数学教育学这门学科完整的理论体系，就必须对数学、逻辑与教育三者的内在联系有一个比较深刻的认识。这也正是我们写这本书的目的。

本书的主要内容有：数学与逻辑的特征分析。数学对逻辑发展的作用和意义，逻辑对数学发展的作用和意义。逻辑对教育发展的作用和意义，教育对逻辑发展的作用和意义。数学与教育在发展过程中的相互作用与影响以及数学教育与人的全面发展等。

本书是在近几年来给数学教育学硕士研究生及本科高年级学生使用的讲义的基础上修改而成的。书中力图做到观点新颖、内容丰富、方法独特、结构清晰。

本书可作为高等师范院校数学教育课程教材或选修课教材，也可作为中学教师进修参考书。

本书的出版，得到了高等教育出版社等有关单位的大力协助和支持，在此表示衷心的感谢。

由于本书涉及的知识面相当广泛，加之作者水平有限，论述不全面或不妥之处在所难免。恳切希望广大读者指正和帮助。

作　者

1992年12月于西北师范大学

目　录

第一章　数学的特征与功能

§1．数学的特征分析

人们普遍认为数学的特征是抽象性、严谨性和应用的广泛性．但随着数学科学的深入发展，特别是数学教育学的发展，对数学的特征仅停留在这“三性”的认识上是不够的，必须从更深层次和更广角度作进一步的分析，力求更全面地揭示数学的本质特征．

一、数学的抽象性

首先，抽象性并非数学所特有，任何一门科学都离不开抽象．因为每门科学都必须有一个概念系统，而概念都是经历了不同程度的抽象过程而形成的，即人们需要对事物进行分析、概括，抽出同类事物的共同的本质属性或特征，舍弃非本质的属性或特征，才能上升为概念，可见概念本身就是抽象思维的产物．当然在概念基础上建构的各门科学就必然具有抽象性；其次，要揭示数学的抽象特征，关键应弄清楚数学抽象在数学科学中究竟起什么作用？这种抽象与其它科学的抽象有何区别？它是怎样抽象的？如何对各种不同层次的数学抽象进行定义与分析？只有对上述几个问题给出恰当的回答，才能揭示数学抽象性的本质．国内学者对此已有较深入的研究，我们不妨在此一一阐明．

1．数学抽象性特征

其一，数学科学是借助于抽象建立起来并借助于抽象来发展的．一方面，数学的对象皆为抽象思维的产物．数学的每个概念，不论是原始的概念，还是被定义的概念，都是抽象的结果．许多数学概念是在已有概念基础上再一次抽象而来的．由此可见，数学概念具有多层次抽象的特点，每一次抽象，都是理性思维的结

果．数学的原理（包括定理、法则等）反映着数学概念与概念之间的关系，也是抽象的产物．概念间的这种关系，往往不是自明的，需要对概念的各个特征进行分析，发现两者实质性的“联合”．同时，数学中的同一对象，它的抽象不一定是一次完成的，而是经历了一个纯化过程．如点的概念，在现代数学中，可以是欧氏空间的“没有部分的东西”，也可以是“函数”空间中的一个函数．而在希尔伯特系统中，点只是受公理系统约束的名称或术语而已，这种名称或术语表示什么都无妨．又如曲线概念、函数概念、连续概念、空间概念以及与它们有关的数学原理等等，都经历了一个不断抽象的历史过程．总之，我们可以毫不夸张地说，数学的全部对象，皆为抽象思维的产物或结果．

另一方面，数学方法的使用，只有借助于抽象才能实现．这里所说的数学方法，不仅有处理数学自身对象的方法，如分析、证明及数学成果的扩展等，而且还有为解决实际问题而构造数学模型的方法以及数学的变换方法、公理方法、对称方法、结构方法、无穷小方法等．这些方法是人们在处理数学自身问题和运用数学知识解决实际问题的过程中提炼出来的，这种提炼过程本身就是一种抽象．同时，这些方法的运用一般都要经历一个变化或转换过程，这也涉及到抽象．特别是现代数学，普遍采用公理化方法，公理的选择本身就是一种抽象．如布尔巴基（Bourbaki）学派的数学“结构”观点就是典型代表．显然，这种抽象是有其特征的，下面将论及这个问题．

总之，从数学对象、数学方法对数学抽象的依赖可以看出，数学抽象在数学科学的发展中起着非常重要的作用．它不仅使数学自身不断分化、精确，同时又使数学实现高层次下的统一．正因为这样，人们才把抽象作为数学的一大特征．

其二，数学抽象的多层次性和数学方法的逻辑性，导致了数学语言的符号化和形式化，而且这种符号化和形式化的程度，任何一门科学都不能与数学相媲美．也正因为数学语言具有符号化和

形式化等特点，这就给人们探索、发现数学新问题提供了很大的“自由”。

最后，我们再从当今数学研究对象的内涵的最深层意义上理解数学的抽象性特征。数学是关于量的科学，数学抽象的本质就是关于量的方面、量的属性和量与量关系的抽象。这是数学抽象性有别于其它科学抽象性的实质方面。也是数学的上述抽象性特征的内在根源。

量本身是一个哲学概念，指事物存在的规模、方式以及发展的速度、程度等等，它与一事物区别于它事物的内部规定性——质形成了对立统一。任何一门科学的质，使得这门科学不同于其它科学而具有存在的价值。从大范围讲，这种质的区别形成了相对独立的自然科学、社会科学、系统科学、人体科学、思维科学和数学科学。按照质和量的对立统一规律，质体现的规定性，必然通过一定的量表现出来。因而定性研究必然伴随定量的分析。数学与其它科学相比，是舍弃了现实事物的具体内容和质的特点而进行的纯粹的量的研究，这种量已突破了其历史的局限性。“数”和“形”仅是量的基本概念，量也包括结构，这种结构在现代数学中，已不一定是有直观意义的结构，而是可能的结构。

综上所述，数学抽象，就其本质而言，是抽取事物量的属性和量与量的关系；就形式来讲，表现为多层次、符号化、形式化。这就构成了数学抽象性区别于其它科学抽象性的特质。

2. 数学抽象的方法

由前面的论述可以看出，关于数学抽象的方式方法是不尽相同的。然而就数学抽象的基本方式方法而言，总可概括为如下几个方面：

（1）弱抽象，即“概念扩张式抽象”。它是从众多数学对象中抽取共同属性的抽象方法，如“基数”概念是从有限集、全体偶数集、全体整数集、全体有理数集和全体实数集中抽取出来的。又如“函数”概念经历了代数函数、解析函数、变量函数和映射函

数这样一个弱抽象的历史演变．弱抽象的方式决定了这种抽象只是由原型中选取某一侧面或某一特征进行抽象，因而弱抽象的产物是比原型更为普遍、更为一般的概念或理论，原型仅为弱抽象产物的特例。

（2）强抽象，即“概念强化式抽象”．这种抽象首先在原型中引入某种新的关系，如某种映射、对应关系或运算关系等；然后，如果这种新的关系造成原有概念的分化，就以得出子类的共同特征去定义新的更为特殊的对象。例如，从函数概念出发，引进积分运算，可分化出可积函数概念。强抽象是通过引入新特征强化原型来完成的抽象，从而所获得的新概念或理论是原型的特例。

（3）理想化抽象.这种抽象不是对现实原型的直接抽取，而是完全理想化的，往往是属于数学发展逻辑上的需要而进行的．更确切地说，理想化抽象的目的是使数学理论体系完备、和谐统一．如点、线、面、虚数、无穷小量、无限远点、超实数、高维空间的超平面、集合论中的超限数等数学对象，皆为理想化抽象的结果．又如非欧几何的产生起因于对欧氏几何第五公设的争论，而非欧几何中的平行公理，则为理想化抽象的典范。

在实际的数学抽象中，弱抽象、强抽象和理想化抽象之间往往是互相联系，互相补充的．理想化抽象不是任意构造，强抽象也不是不同数学对象的任意组合，它们往往是和数学科学的发展水平、对数学的总体洞察能力、数学的思维水平等诸多因素密切相关，并受其制约。

3。数学抽象的定量分析

人们往往认为数学的抽象程度很高，诚然，与其它一些学科相比，确实如此。但哲学、逻辑学等学科的抽象程度也很高，那么这些学科的抽象程度与数学相比究竟如何呢？事实上，哲学、逻辑学等学科的出发点与数学不同．哲学是对具体的东西进行抽象的研究，它研究世界上一切事物共同的普遍规律．如人是怎样认

识世界的等等。形式逻辑属于思维科学，它研究人的思维形式、规律及思维方法等。而数学则是对抽象的东西做“具体”的研究，它的一切对象是抽象的产物，对这些抽象物如函数空间、拓扑空间再做“具体”的研究。实质上，这种“具体”是针对一定水平的“抽象”产物而言，具有二重性。就低层而言，是抽象的，而就更深层的抽象来讲，是具体的。如内积空间，对于欧氏空间，是抽象的研究，而对于距离空间，则为具体的东西。这里我们无意于说明数学的抽象程度至高无上，而是指出数学的起点就是抽象的，然后经多层抽象向更深的方向发展，以致于不是数学内行就很难理解数学抽象的过程和产物，甚至于同是数学家也难理解不同专业方向的内容。

那么，对数学的这种抽象如何进行定量分析呢？我国一些学者在此方面已作了较深入的研究，创立了数学抽象度概念和数学抽象度分析法来探讨数学抽象程度的量化问题.这里我们就其主要观点作简要介绍。

（1）数学抽象度

我们将数学中的各种数学对象和方法称为数学抽象物，并将逻辑上等价的抽象物（等价类）不加区别，一律看作同一元素．这样，由于数学抽象的多层次性，抽象程度不同的数学抽象物，可按抽象方式定义一种顺序关系。如前面的强抽象中，连续函数比函数更抽象，可微函数比连续函数更抽象，解析函数比可微函数更抽象。下面，我们将讨论这种抽象度的定义。

首先，我们规定广义的数学抽象是指：若数学抽象物B的获得（定义或证明等）用到了数学抽象物A，就可以说B比A更抽象，记作$A—\!\!<B$.为了能用这种“抽象”定义比较某一数学分支的诸抽象物的抽象层次，再约束如下两个条件：

第一、传递性：若$A—\!\!<B$，$B—\!\!<C$，则$A—\!\!<C$.

第二、唯一性：对任何A、B，三种关系$A—\!\!<B$、$B—\!\!<A$或A、B无法确定哪一个更抽象，必有且只有一种情形为真。

在上述广义抽象的意义下，一个数学分支或某一数学领域内的全部抽象物的有限集 M，便作成一个严格偏序集 $\{M, —<\}$. 设抽象物 A 和 B 属于 M 且 $A —< B$，则称“$A —< B$”为链，A 叫链的始点，B 叫末点。若链 $A —< B$ 某一端可联结新链，则称 $A —< B$ 为可扩张链；若链 $A —< B$ 中间不能增添新的环节，则称 $A —< B$ 为完全链。这样，整个 M 就可看成若干个“完全不可扩张的链”的并。位于同一链上的元素 A、B 称为相联，否则称为不相联。

由于每一数学抽象物都是经历一个抽象过程而形成的概念结构，所以处于每一条链上的各抽象物的个数就代表着抽象层次数。链的长度称为抽象度，它自然规定着抽象性的程度，抽象度具有某种“可加性”。

相联两抽象物之间的链的长度是两者之间相对关系的一种表示，称为后一抽象物对前一抽象物的“相对抽象度”。在偏序集 $\{M, —<\}$ 中，有些抽象物是至少两个不同链的末点，该点处汇聚的链的条数表明此抽象物的重要性程度，称为该点上的“入度”. 还有些抽象物是至少两个不同链的始点，从该点出发的链的条数表明该数学抽象物的基本性程度，称为该点的“出度”。数学抽象物的相对抽象度、入度和出度，统称为该抽象物的三元指标。三元指标值越大，表明该抽象物越深刻、越基本、越重要。于是可利用图论的方法，采用多重有向平面图来研究抽象物之间的关系.

（2）抽象度分析法

抽象度分析，就是运用上述抽象度的有关基本概念，对各类数学分支和各种具体数学问题进行分析，了解其抽象特征和内在结构，进行抽象度分析。为此，首先将某一数学分支的全部或部分数学抽象物为集合，依给定“抽象”的定义排成偏序集，画出有向图，再将偏序集中极小点作为始点计算出各点的相对抽象度，同时计算出每一点的出度和入度，最后从每一始点出发作各个关联点的抽象度向量。这样就实现了各链中抽象物的抽象程度的定量分析。

二、数学的严谨性

人们普遍认为，严谨性是数学的又一特征．客观地讲，严谨性亦非数学科学所独有．任何一门科学，不论是数学科学、自然科学、社会科学还是系统科学、人体科学以及思维科学，作为一门科学体系，都有它严谨的一面．概念系列、理论体系的提出，都必须符合客观现实．在每门科学体系中，不仅概念、理论要有各自确切的意义和范围，而且要求在逻辑上相容等等．通常人们将治学严谨作为科学研究的起码态度，这说明在治学的过程中必须尊重客观规律，也从另一方面说明每门科学对严谨性的追求．那么，将严谨性置于显著位置的数学，为什么要追求严谨性呢？数学又是如何追求严谨的呢？

如前所述，现代数学的发展，使得数学的研究对象已不仅是客观现实的数量关系和空间形式，也包括逻辑上可能的关系和形式，数学已成为广义的研究量的科学．数学抽象程度的不断提高，使得数学的发展与客观现实的距离越来越远，很难找到具有直观意义的现实原型，许多数学结果，往往是在理想化的情况下研究的．但作为一门科学，它所反映的内涵必须是服从客观规律的，不仅形式，而且内容都应是对现实世界量的属性、量的关系的正确反映，即使一时找不到现实原型用于检验．为了确保数学科学的真理性，就迫使数学的发展必须具备高度的严谨，依靠严谨来保证数学运演、数学证明、数学推理、数学理论体系等的真值传递．同时，现代数学的形式公理化，对数学严谨性提出了更高的要求，数学基础理论研究的深入，就是这种要求迫切性的体现．

数学是如何追求严谨性的呢？或者说数学的严谨性是怎样实现的呢？事实上，数学对严谨性的追求，不仅仅表现在对数学符号语言、数学形式化的追求，而且还在于对逻辑严密性的追求．前者是使数学形式、数学语言严格化，后者则是对数学科学真理性

的逼近。

数学符号产生的本身，就表现了数学对严谨性的要求。尽管用与感性直观的经验世界有密切联系的日常语言符号可表示几个量级的抽象层次，如初步抽象、比较抽象、很抽象或极为抽象等，但由于数学抽象物的多层次性、系统性，日常语言无法把远离直观和经验的不同数学对象、概念和抽象层次明确区别开来，无法准确体现数学抽象物之间的相互关系。数学符号就是为解决这种日常语言的繁杂、歧义和量级限制而产生的。

数学的形式化，就是用一套具有确切意义的数学符号体系去表达数学对象的结构和规律，从而把对具体数学对象的研究，转变为对符号语言的研究。数学形式化的目的是将纯粹的量从现实世界中抽取出来，简洁明了地加以表示，以便揭示事物的数学本质和规律性。形式化有助于数学理论体系的简单化、系统化和严格化，为数学内部的和谐统一提供了思想基础。实际上，形式化可帮助数学实现彻底的抽象。因为彻底的数学抽象是以排除直观经验的说明，实现数学抽象物的严格、简明为前提的。如果一个数学抽象物的表述不能够尽可能简明和形式化，而是夹杂一些直观的经验性的说明，那就意味着数学抽象不彻底，不能揭示其本质特征，当然也不可能严格。数学形式化的发展使得人们往往要借助这些形式化的东西来把握数学，因此，形式化过程自身的严格化又成为数学的一种追求。

数学符号语言和数学形式化都体现出数学对严谨性的追求。但客观地讲，数学的严谨性主要表现在数学对逻辑严密性的要求上。不论数学成果在人脑中是以逻辑思维或形象思维还是以直觉思维方式获得，要真正成为一种数学真理，必须经受逻辑证明的检验。只有在确信合乎逻辑的情形下，人们才会接纳这些成果或结论。通常的数学问题解决，不仅要遵从数学规律，而且也要合乎逻辑，在逻辑上无误。因而，一个数学问题的解决，反映着两方面的要求，一方面要符合数学规律，另一方面要合乎逻辑。而

后者，正是数学严谨性追求的实质所在。正因为这种对逻辑精确性的过于追求使得人们往往感到数学"呆板"、"枯燥"。

此外，数学概念的获得方式有具体的和定义的两类。前者是通过对客观对象的观察从中抽取共同属性，后者是以定义方式揭示内容。数学的大部分概念，是在初始概念基础上随数学的发展合乎逻辑地定义的。整个概念系统形成一种独特的结构，概念之间不一定总有某种逻辑关系，但概念本身的内涵和外延是严格的，有确定的内容和适应范围。

从上述讨论可以看出，数学对严谨性的追求或者数学在逻辑严密性上的要求，在某种程度上是通过数学符号化、形式化而实现的。因而逻辑学和数学必有密切联系，并在数学发展的全过程中起着重要作用。

三、数学应用的广泛性

所谓应用的广泛性，是指数学被作为一种工具或手段，几乎在任何一门科学及其每个分支领域中被使用。从哲学的角度看，任何事物都有质和量两个方面。作为质的定性分析，往往带有直观的、经验的判断。但是任何质又表现为一定的量，定量分析具有精确、严密、客观等特点，它是刻画质的重要手段。从这种意义上，每门科学的研究中，定性研究最终要化归为定量研究来揭示该门科学的本质。数学恰好解决了每门科学在纯粹的量的方面的问题。每门科学的定量研究都离不开数学，这就是数学具有应用的广泛性的实质。

数学应用的广泛性，受数学科学本身、所应用科学的发展程度、社会进步程度及数学自身规律等多种因素的制约。这就使得数学应用的广泛性是一个带有历史性的过程.从系统科学的角度看，每门科学的发展在某种程度上与其它科学的发展、进步密切相关，它们在一定程度上互相渗透，互相促进，共同发展。数学的发展也不例外，受整个时代环境中科学发展的影响。但是，应