高等学校教学参考书

电磁能与电磁力

黄席椿 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

电磁能与电磁力

黄席椿 编

高等学校教学参考书

电磁能与电磁力

黄席椿　编

·

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

·

开本 850×1168　1/32　印张 3.875 字数 92,000
1981 年 10 月第 1 版　1983 年 5 月第 1 次印刷
印数 00,001-　12,500

书号 15012·0366　　定价 0.42 元

序

电磁场的力作用以及与其相关联的储能问题，属于电磁场理论的基本概念，电场和磁场一般就是根据它们的力作用定义的。所以电工类各专业的学生应当对电磁能和电磁力有所了解。但是在大多数工科用电磁场理论书籍中，对这个问题叙述得过于简略，以致仅能使学生获得比较肤浅的概念。这方面内容一般在较高深的电磁理论或理论物理书籍中，进行比较详细深入的讨论；但因材料零散地安排在不同章节中，对初学者来说，归纳并系统地掌握这些内容还是有困难的。

这本小册子的目的，就是试图把电磁能和力的问题集中起来作一个系统的介绍，以弥补一般电磁场课程之不足。全书按涉及的场型分为四章。第一、二两章，第三章和第四章分别是与静电场、恒定电场和时变电磁场有关的。其中与静电场有关的内容所占比重最大，这是因为静电场的能和力涉及到普遍性质的基本概念，而且有不少工具性知识也在这一部分内介绍。读者掌握了第一和第二两章，就可以举一反三，顺利地阅读第三和第四章。

阅读本书之前，要求读者熟练掌握工科水平的电磁场基本理论和有关的数学知识(主要是矢量分析)。与电磁能和力特别有关的工具性知识，如张量分析和弹性力学等，则在本书中作比较完整的、系统的介绍，不要求读者具备这些方面的预备知识。

本书是编者在为教师开设讲座的基础上，根据讲稿进行整理修改而写成的。内容难免有缺点甚至错误，敬请广大读者赐教指正。

编　者

1980 年 9 月于西安交通大学

目　录

第一章　静电场能量

1.1　真空中点电荷系的能量

在产生静电场的电荷之间作用着力，因此当移动其中某一电荷时，不是这种力本身必须做功，就是为反抗这种力而必须由外力做功。由此可以看出，在静电场中是储存着能量的。

首先让我们研究一个最简单的情况：在真空中位于矢径 $\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$、…、$\mathbf{r}_n$ 的端点上分别有一组点电荷 q_1、q_2、…、q_n，试求在这个系统中储存的能量。将各个电荷由无限远处移到给定位置上所需的功就确定了这个能量。我们首先将电荷 q_1 移到给定位置 $\mathbf{r}_1$。这时还不需要做功，因为其它电荷均在无限远处，对 q_1 尚无力的作用。现在再将电荷 q_2 移到位置 $\mathbf{r}_2$，与 q_1 相隔距离 $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|=r_{12}$；这时为了克服库仑斥力需要做功 $q_1q_2/4\pi\varepsilon_0r_{12}$。然后将电荷 q_3 移入，为此需要做功 $(1/4\pi\varepsilon_0)\left(\dfrac{q_1q_3}{r_{13}}+\dfrac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$。依此进行，直到所有电荷都被移到给定位置上为止，为此而必须做的总功为

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_2q_1}{r_{21}}\right)+\left(\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_3q_1}{r_{31}}\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{q_2q_3}{r_{23}}+\frac{q_3q_2}{r_{32}}\right)+\cdots\right]\end{aligned}\tag{1-1}$$

或简写为

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_iq_j}{r_{ij}}\qquad(i\neq j)\tag{1-2}$$

与此相等的能量必须以某种方式在系统中储存。至于是何种

方式，这个问题单单用静电学是无法回答的。因此曾提出过两种完全不同的看法，一是根据超距作用理论，一是根据场论。前者假设，构成电荷系所需的功形成了附着在电荷上的势能。后者则认为，场是电能的承载者，并且认为，在有电场存在的真空媒质的每一单元体积 dv 内含有能量 udv，这里 u 是由下式给出的能量密度（证明见下节）：

$$u=(\varepsilon_0/2)\mathbf{E}^2 \tag{1-3}$$

（$\mathbf{E}$ 为电场强度矢量）。因此在某一空间范围内含有的能量为

$$U=(\varepsilon_0/2)\int \mathbf{E}^2 dv \tag{1-4}$$

我们将证明，上述由(1-2)式给出的将 n 个点电荷互相移近所需的功等于在这过程中场能 U 的增加，这样就可以证实场能的观点是正确的。

令 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$、…、$\mathbf{E}_n$ 为在任一点上分别由电荷 q_1、q_2、…、q_n 产生的场强。因此

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\cdots+\mathbf{E}_n \tag{1-5}$$

从而

$$\mathbf{E}^2=\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}=(\mathbf{E}_1^2+\mathbf{E}_2^2+\cdots+\mathbf{E}_n^2)+2(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_3+\cdots+\mathbf{E}_{n-1}\cdot\mathbf{E}_n) \tag{1-6}$$

以此代入(1-4)式来求场能 U，可以看出，由平方项 $\mathbf{E}_j^2$ 给出的值 $U_j=(\varepsilon_0/2)\int \mathbf{E}_j^2 dv$ 当电荷互相移近时根本不起变化。其实 U_j 是一个只与电荷 q_j 相关联的能量，它是为形成电荷 q_j 而需做的功，也就是将许多元电荷 dq_j“压紧”在一起以构成 q_j 而需要做的功（压紧时必须克服同号电荷间的斥力，对于点电荷，U_j 甚至为无限大）。因此我们只考虑(1-6)式中混合项 $\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2$ 等等所引起的部分 U 值。由图 1.1

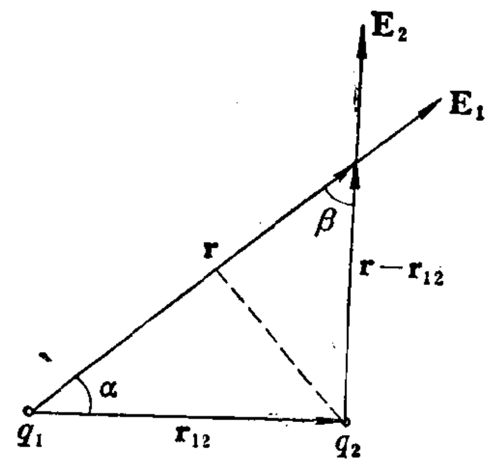

图 1.1

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{q_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12})}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}|^3}$$

因此

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{q_1 q_2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12})}{r^3 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}|^3} \tag{1-7}$$

由图 1.1 可看出：

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}) = r|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}|\cos\beta$$

但

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}|\cos\beta = r - r_{12}\cos\alpha$$

所以(1-7)式可写为

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{q_1 q_2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{r - r_{12}\cos\alpha}{r^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}|^3} \tag{1-8}$$

在以 q_1 为中心、r 为半径的球面上的一个面积元为 $r^2 d\Omega$，这里 $d\Omega$ 为该面积元在 q_1 点上所张的立体角。体积元可写为 $dv = r^2 d\Omega \cdot dr$ 于是由(1-8)式得

$$U_{12} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv = \frac{q_1 q_2 \varepsilon_0}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\int_0^\infty \oint \frac{r - r_{12}\cos\alpha}{r^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}|^3} r^2 dr d\Omega \tag{1-9}$$

由于 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{12}| = (r^2 + r_{12}^2 - 2rr_{12}\cos\alpha)^{1/2}$，故上式中对 r 的积分可写为

$$\int_0^\infty \frac{r - r_{12}\cos\alpha}{(r^2 + r_{12} - 2rr_{12}\cos\alpha)^{3/2}} dr = \int_0^\infty \frac{d(r^2 + r_{12}^2 - 2rr_{12}\cos\alpha)}{2(r^2 + r_{12}^2 - 2rr_{12}\cos\alpha)^{3/2}}$$

$$= (1/2)(-2)(r^2 + r_{12}^2 - 2rr_{12}\cos\alpha)^{-1/2}\Big|_0^\infty = 1/r_{12}$$

于是(1-9)式变为

$$U_{12} = [q_1q_2/(4\pi)^2\varepsilon_0 r_{12}]\oint d\Omega = q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0 r_{12}) \qquad (1\text{-}10)$$

($\because \oint d\Omega = 4\pi$)。一般说来

$$U_{ij} = \frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_iq_j}{r_{ij}} + \frac{q_jq_i}{r_{ji}}\right) \qquad (1\text{-}11)$$

根据上式及(1-2)式，可知由(1-6)式中的所有混合项决定的场能，就是由于电荷之间的相互作用而引起的场能部分 A:

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij} \qquad (i \neq j) \qquad (1\text{-}12)$$

A 称为电荷间的互有能。由(1-6)式中所有平方项决定的场能 U_0，来源于建立各个电荷时所需做的功，即

$$U_0 = \sum_{j=1}^{n} U_j \qquad (1\text{-}13)$$

U_0 称为电荷的固有能。总场能为 A 与 U_0 之和，即

$$U = U_0 + A \qquad (1\text{-}14)$$

由(1-11)式可以看到，互有能中的任一部分 U_{ij} 都可正可负。当 q_i 与 q_j 同号时，$U_{ij}>0$，因为这时将电荷移近时必须为克服其间的斥力而由外力做功，从而使场能增加。当 q_i 与 q_j 异号时，$U_{ij}<0$，因为这时是电荷间的引力使它们移近并做功，从而使场能减小。所以，总互有能 A 也可正可负。但是，固有能 U_0 肯定是正的，而且总场能 $U = U_0 + A$ 也必须为正，这是理所当然的。

(1-1)式可改写为

$$A = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \cdots\right)\right.$$

$$+q_2\left(\frac{q_1}{r_{21}}+\frac{q_3}{r_{23}}+\cdots\right)+\cdots\Big]$$

$$=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1'+q_2\varphi_2'+\cdots)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}q_j\varphi_j' \qquad (1\text{-}15)$$

由上式可看出，φ_j' 是除去 q_j 外，其它所有电荷在 q_j 所在点上引起的电位。如果把 q_j 的作用包括在内时，在 q_j 所在点上的电位为φ_j（当然，在点电荷情况下，$\varphi_j\to\infty$），则若将(1-15)式中的 φ_j' 改为φ_j，就得到总场能 U:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}q_j\varphi_j \qquad (1\text{-}16)$$

如果电荷不是点形，而是以体密度 ρ 分布在某一体积内且（或）以面密度 σ 分布在某一表面上，则由于体积元 dv 中的电荷 ρdv以及面积元 da 上的面电荷 σda 都可以看作是点电荷，因此由(1-16)式可得到场能为

$$U=(1/2)\int\varphi\rho dv+(1/2)\int\varphi\sigma da \qquad (1\text{-}17)$$

1.2 有导体和电介体时的能量

设有 n 个表面带电的导体，电荷的面密度为 σ。这些导体可以看成是电容器的电极，场能的增加可以是来自电源的电动势在建立电极上的电荷时所做的功。导体的表面用 S_i 来表示。这些导体置于无限延伸的介质之中。假设其中一个称为 S_n 的表面包围着所有的其它表面。如图 1.2 所示。为了能够应用散度定理，必须保证电位和电场是连续的，因此如果有介质特性的突变表面的

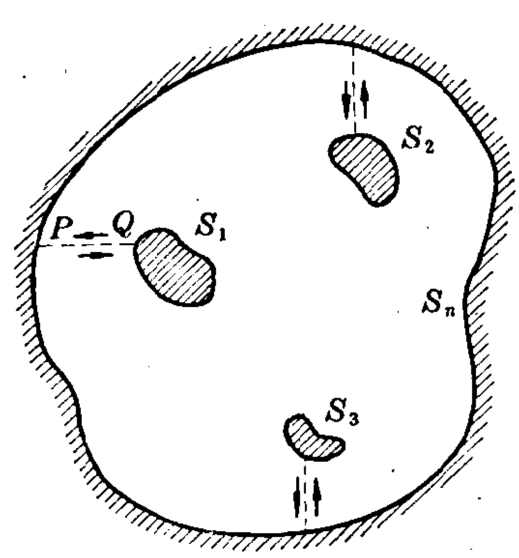

图 1.2

话，这些表面将以极薄的过渡层来代替，这样就不会影响计算结果的普遍性。使表面 S_i 上的电荷密度增加 $\delta\sigma$ 而需要的功为

$$\delta U=\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\varphi\delta\sigma da_i \tag{1-18}$$

通过由内导体作出片状面至 S_n(图 1.2)的办法，可以把这 n 个面积分之和表示为一个单一积分。积分由 S_n 上的一点 P 开始，延伸到片的一侧至 Q，扩展到 S_1，然后经过片的另一侧回至 P。表面 PQ 不载电荷，因此对积分无贡献。这样，S_n 的内部就转换成一个由单一表面 $S=\sum_{i=1}^{n}S_i$ 所限定的单连区域。于是(1-18)式可写为

$$\delta U=\int_S\varphi\delta\sigma da \tag{1-19}$$

我们知道，在导体表面上应满足以下关系：

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=\sigma,\qquad \mathbf{n}\times\mathbf{E}=0 \tag{1-20}$$

$\mathbf{n}$ 为导体的外向法线单位矢量。将第一式代入(1-19)式，得

$$\delta U=\int_S\varphi\delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da \tag{1-21}$$

我们应用散度定理，将这个面积分转换成一个延伸在由表面 S_i 所限定的整个介质体积 V 内的体积分。但是要注意，这个体积的表面 S_i 的外法线是指向导体内部的，而(1-21)式中的 $\mathbf{n}$ 则是指向导体外部的，所以在应用散度定理时必须将(1-21)式改变符号。因此得

$$\delta U=-\int_V\nabla\cdot(\varphi\delta\mathbf{D})dv \tag{1-22}$$

由于

$$\nabla\cdot(\varphi\delta\mathbf{D})=\varphi\nabla\cdot(\delta\mathbf{D})+\delta\mathbf{D}\cdot\nabla\varphi=\varphi\nabla\cdot(\delta\mathbf{D})-\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} \tag{1-23}$$

因此

$$\delta U=\int_V\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}dv-\int_V\varphi\nabla\cdot(\delta\mathbf{D})dv \tag{1-24}$$

如果介质中的电荷为零或常值，则 $\nabla\cdot(\delta\mathbf{D})=\delta\rho=0$，因此当在电极上建立起电荷 $\delta\sigma$ 时，电源所做的功为

$$\delta U=\int_V \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}dv \tag{1-25}$$

这是一个延伸在电场占据的整个空间内的积分；这个功以静电能的形式储存在电场内。

要得到储存在场内的总能，必须将增量 δU 由初始状态 $\mathbf{D}=0$ 积分至终值 $\mathbf{D}$:

$$U=\int_V\int_0^{\mathbf{D}}\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}dv \tag{1-26}$$

如果媒质是各向同性且线性的，即在关系式 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 中的 ε 可能是空间坐标的函数，但与 $\mathbf{E}$ 无关，这时有

$$\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}=(\varepsilon/2)\delta\mathbf{E}^2$$

因此

$$U=\int_V\int_0^{\mathbf{E}}(\varepsilon/2)\delta\mathbf{E}^2dv$$

或

$$U=(1/2)\int_V\varepsilon\mathbf{E}^2dv=(1/2)\int_V\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}dv \tag{1-27}$$

依上式，可认为电能以密度

$$u=(1/2)\varepsilon\mathbf{E}^2=(1/2)\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \tag{1-28}$$

分布在电场内。若媒质为真空($\varepsilon=\varepsilon_0$)，则有

$$u=(1/2)\varepsilon_0\mathbf{E}^2 \quad 及 \quad U=(\varepsilon_0/2)\int_V\mathbf{E}^2dv \tag{1-29}$$

与(1-3)和(1-4)式一致。

1.3 矢量场的一个定理

设 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是位置的两个矢量函数，它们在整个空间内满足以下条件：

$$\nabla\times\mathbf{P}=0,\qquad \nabla\cdot\mathbf{Q}=0 \tag{1-30}$$

而且，除了在一个闭合面 S_1 上，它们都是连续的并具有连续的导数。$\mathbf{P}$ 的切向分量和 $\mathbf{Q}$ 的法向分量在穿过表面 S_1 时假设是连续的，但 $\mathbf{P}$ 的法向分量和 $\mathbf{Q}$ 的切向分量可以有任意的不连续性。因此，在 S_1 上规定的条件是

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{P}_+-\mathbf{P}_-)=0,\qquad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{Q}_+-\mathbf{Q}_-)=0 \tag{1-31}$$

法线单位矢量 $\mathbf{n}$ 由 S_1 向外作出；紧贴外表面的矢量用下标 + 来表示，紧贴内表面的则以下标 - 表示。最后，再假设场量 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的源都位于离开某一任意原点有限的距离处，且 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 按以下规律在无限远处消失：

$$\lim_{r\to\infty} r\mathbf{P}=0,\qquad \lim_{r\to\infty} r\mathbf{Q}=0 \tag{1-32}$$

我们要证明的是：**具有上述性质的两个矢量 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{Q}$ 的点积在整个空间的积分为零。**由于 $\nabla\times\mathbf{P}=0$，可使 $\mathbf{P}=-\nabla\varphi$，从而

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=-\nabla\varphi\cdot\mathbf{Q}=-\nabla\cdot(\varphi\mathbf{Q})+\varphi\nabla\cdot\mathbf{Q} \tag{1-33}$$

令表面 S_1 所包围的体积为 V_1，S_1 以外的体积为 V_2，因此 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的全部场体积为 V_1+V_2。由(1-30)式，(1-33)式的末项为零，所以

$$\int_{V_1+V_2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}dv=-\int_{V_1}\nabla\cdot(\varphi\mathbf{Q})dv-\int_{V_2}\nabla\cdot(\varphi\mathbf{Q})dv \tag{1-34}$$

现对上式应用散度定理。我们注意到，V_1 是被 S_1 包围的，V_2 在内部是由 S_1，在外部是由一个位于无限远处的表面 S 所包围的。由于在无限远处，$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 满足由(1-32)式给定的条件，所以 $\varphi\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}$ 在 S 上的积分为零。对于一个闭合面，正法线的方向规定由它包围的体积指向外，所以 $\varphi\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}$ 在 S_1 上的两个积分符号相反，且按(1-31)式数值相等。因此(1-34)式变为

$$\int_{V_1+V_2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}dv=-\int_{S_1}\varphi\mathbf{Q}_-\cdot\mathbf{n}da+\int_{S_1}\varphi\mathbf{Q}_+\cdot\mathbf{n}da=0 \tag{1-35}$$

如上述。这个定理可以很容易推广到有数个闭合的不连续表面S_i的情况。

1.4 置于静电场中的一个电介体的能量

设在一个介电媒质中已经建立起一个静电场 $\mathbf{E}_1$。假定媒质是各向同性且线性的，因此它的介电常数 ε_1 或是恒值，或最多是位置的一个标量函数。一个介电常数为 ε_2 的电介体被移入场$\mathbf{E}_1$中，同时保持 $\mathbf{E}_1$ 的源绝对不变。我们希望知道这个外来电介体由于它在场内的位置而具有的能量。

原始能 U_1 表示在建立原始场的过程中所做的总功，它可以通过将

$$U_1=(1/2)\int \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{D}_1 dv \tag{1-36}$$

在整个空间内计算而求得。在移入物体后，在任一点上场强变为 $\mathbf{E}$，从而差值 $\mathbf{E}_2=\mathbf{E}-\mathbf{E}_1$ 表示由于物体的极化而引起的场。令外来体所占的体积为 V_1，在它外部的媒质体积为 V_2。在这新状态下，场能为

$$U_2=(1/2)\int_{V_1+V_2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}dv \tag{1-37}$$

差值

$$U=U_2-U_1=(1/2)\int_{V_1+V_2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{D}_1)dv \tag{1-38}$$

必须是物体在外场 $\mathbf{E}_1$ 中的能量，因此等于在移它入场时所做的功。(1-38)式等效于

$$U=(1/2)\int_{V_1+V_2}\mathbf{E}\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)dv$$

$$+(1/2)\int_{V_1+V_2}(\mathbf{E}-\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{D}_1 dv \tag{1-39}$$

$\nabla\times\mathbf{E}$ 到处为零。因为原来的场源分布保持不变，$\nabla\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)=0$。

穿过媒质 ε_2 和媒质 ε_1 的分界面时，如果该面上不带电荷的话，应满足下列条件：

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_+-\mathbf{E}_-)=0, \qquad \mathbf{n}\cdot[(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)_+-(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)_-]=0 \quad (1\text{-}40)$$

于是按上节中的定理，(1-39)式中的第一积分为零，因此

$$U=(1/2)\int_{V_1}(\mathbf{E}-\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{D}_1 dv+(1/2)\int_{V_2}(\mathbf{E}-\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{D}_1 dv \quad (1\text{-}41)$$

由于 $\mathbf{D}_1=\varepsilon_1\mathbf{E}_1$，且在 V_2 中，$\mathbf{D}=\varepsilon_1\mathbf{E}$，所以上式中的第二积分等效于

$$(1/2)\int_{V_2}(\mathbf{E}-\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{D}_1 dv=(1/2)\int_{V_2}(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{E}_1 dv \quad (1\text{-}42)$$

因为 $\nabla\times\mathbf{E}_1=0$，$\nabla\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)=0$，上节中的条件可满足，因此

$$\int_{V_1+V_2}\mathbf{E}_1\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)\,dv=\int_{V_1}\mathbf{E}_1\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)dv$$
$$+\int_{V_2}\mathbf{E}_1\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)dv=0 \quad (1\text{-}43)$$

从而

$$(1/2)\int_{V_2}\mathbf{E}_1\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)dv=-(1/2)\int_{V_1}\mathbf{E}_1\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_1)dv \quad (1\text{-}44)$$

将(1-44)式代入(1-41)式，我们就得到一个关于置于某一介电媒质中的一个电介体的能量公式，它表示为一个不是延伸到整个空间、而只是在物体本身体积内的积分：

$$U=(1/2)\int_{V_1}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}_1-\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{D})dv \quad (1\text{-}45)$$

因为在 V_1 内 $\mathbf{D}_1=\varepsilon_1\mathbf{E}_1$，$\mathbf{D}=\varepsilon_2\mathbf{E}$，所以

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}_1-\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{D}=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_1$$

于是

$$U=(1/2)\int_{V_1}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}_1-\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{D})dv$$
$$=(1/2)\int_{V_1}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_1 dv \quad (1\text{-}46)$$

若外界媒质为真空，则 ε_1 变为 ε_0。因为在物体内部的结果场强与其极化强度 $\mathbf{P}$ 的关系为

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}=\varepsilon_2\mathbf{E},\qquad \mathbf{P}=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\mathbf{E} \tag{1-47}$$

U 可写为

$$U=-(1/2)\int_{V_1}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_1 dv \tag{1-48}$$

由此可知，置于真空中固定外电场 $\mathbf{E}_1$ 内的一个电介体，其每单位体积的势能为 $-(1/2)\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_1$。

由(1-46)或(1-48)式给出的势能 U，对一个小位移的变分将导致施于一个极化电介体的机械力。可以看出，若 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$，能量为负，且随着 ε_1 的减小、ε_2 的增大或场强 $\mathbf{E}_1$ 的增大而减小。因此可以估计到，若 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$，物体将被推向强电场区域或 ε_1 减小的区域。另一方面，若 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$（这可能是一个固体被浸入高介电常数的液体中的情况），施于物体的力将把它推出场外。

1.5 汤姆生定理

汤姆生(Thomson)定理指出，**输至置于某一介质中的一个固定导体系的电荷在这些导体的表面上作这样的分布，以使得结果静电场的能量成为最小。**

这个定理的证明将只限于线性且各向同性的介质情况。假设有 n 个被表面 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所包围的导体，各带有电荷 q_i。介质性质的不连续处可以用薄的过渡层来代替而不致影响本定理的普遍性，因此我们可假设媒质的介电常数 ε 为连续的，但可为位置的任意函数。可以假设在介质的体积内有电荷密度，虽然在实际上很少遇到这样的情况。

在介质内部的任一点上，在平衡状态下电荷产生的电场必须满足以下条件：