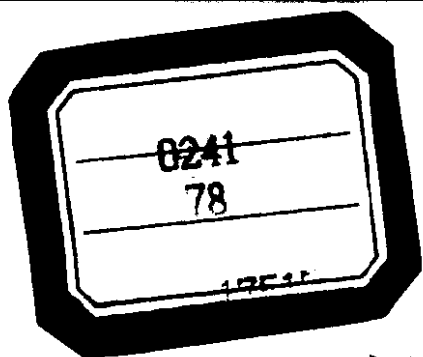


# 数值分析基础

关治 陆金甫 编

高等教育出版社



1751543

# 数值分析基础

关 治 陆金甫 编

J41183/18



高等教育出版社



北师大图书 B1370183

(京) 112号

本书着重介绍了与现 计算有关的数值分析的基本方法, 强调基本概念、理论和应用, 特别是数值方法在计算机上的实现. 以期学生在使用本教材后能够在计算机上进行有关的科学与工程计算. 本书理论叙述严谨、精炼, 概念交待明确, 描述清晰, 系统性较强, 可供各校《数值分析》课程采用.

全书包括: 插值和逼近, 数值积分和微分, 解线性代数方程的直接和迭代方法, 解非线性方程和方程组的数值方法, 特征值问题和常微分方程初值问题的计算方法.

### 图书在版编目 (CIP) 数据

数值分析基础/关治, 陆金甫编. —北京: 高等教育出版社, 1998

ISBN 7-04-006393-X

I. 数… II. ①关… ②陆… III. 计算方法 IV. 0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 29100 号

\*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 15.75 字数 400 000

1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷

印数 0 001—5 121

定价 15.00 元

凡购买高等教育出版社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换

**版权所有, 不得翻印**

# 前 言

随着计算机与计算数学的发展以及它们在各种科学技术问题中的广泛应用，数值分析课程已经成为高等学校理工科的一门重要课程。它是一门应用性很强的基础课程，一般包含数值分析学科最基础和最常用的部分。几十年来，国内外数值分析教材有很大的变化，除了内容的变化和发展外，也出现了一些适应不同对象的不同类型的教材，但目前在国内还较少见到应用数学专业本科生的适用教材，本书就是为此而编写的，同时也兼顾到理工科其它专业研究生同类课程的需要。

本书按照国家教委数学与力学教学指导委员会应用数学教材建设组制定的《应用数学专业〈数值分析〉课程基本要求》编写，个别内容有所增删，以适应其它理工科专业研究生课程的教学。我们体会这一基本要求的特点是重视基础理论，注意本学科的发展和教学内容的更新，同时强调应用，特别是重视数值方法在计算机上的实现。数值分析课是一门基础课，它象通常的数学课程那样有自身严密的科学系统，但它又是一门应用性很强的课程，希望使学生能够用本学科的知识在计算机上进行有关的科学与工程计算。计算能力的培养对理工科各专业的学生是十分重要的，对应用数学专业的学生更是如此。所以我们在教材的选材上适当减少了古典内容的篇幅，增加近代方法的介绍，也力图在理论叙述尽量严谨的同时注意对方法的分析，使算法描述尽量清晰，并配有适量的例题，便于学生理解方法和在计算机上实现方法的数值计算。

本书的主要内容是函数的插值和逼近，数值积分和微分，解线性代数方程的直接方法和迭代方法，非线性方程和方程组的数

值方法，矩阵特征值问题计算方法和常微分方程初值问题的数值解法。第一章引论除了介绍本学科的一些基本问题外，还为其它各章的一些基础知识作了准备。本书的初稿曾在清华大学校内使用，据我们的经验，60学时左右可以讲授本书的主要部分，估计75-80学时可以讲授本书的绝大部分。当然，使用本书的讲授次序不是固定不变的，大致地说，可以分为两条主要线索，即按照书上各章的自然顺序，或者是按照第一、五、六、七、八章及第二、三、四、九章的顺序讲授。书中有些内容单独安排成章、节，便于教师适应不同学时和要求选择使用，特别是带“\*”号的节和段是供选择的。各章有一定数量的习题，其中一部分是有关方法的分析和理论方面的，另一部分则是数值计算的习题，可以手算，也可用计算器完成，还有一些要利用计算机计算，其中一些习题也带有“\*”号。对于学习数值分析课程的学生来说，这两部分的练习都是重要的。

本书的第二、三、四章和第九章的后四节由陆金甫执笔，其余部分由关治编写。我们从准备到编写都得到李庆扬教授的关怀和鼓励。他和应用数学教材建设组的施吉林教授、李心灿教授都一直关注着这一教材的编写。他们和王仁宏教授、易大义教授以及兄弟院校的多位同行在评审中提出了宝贵和中肯的意见，使我们有目的地对初稿进行修正，对此我们深表谢意。我们也十分感谢清华大学应用数学系有关老师和高等教育出版社有关编辑同志对我们的帮助。我们更希望有更多的读者和同行对本书批评指正。

关 治 陆金甫

1994年11月

0241/28.

1751543.

责任编辑	徐 可
封面设计	李卫青
责任绘图	潘曙光
版式设计	马静如
责任校对	朱惠芳
责任印制	宋克学



北师大图书 B1370183

# 目 录

<b>第一章 引论</b> .....	1
§ 1 数值分析的研究对象 .....	1
§ 2 数值计算的误差 .....	2
2.1 误差的来源与分类 .....	2
2.2 误差与有效数字 .....	3
2.3 求函数值和算术运算的误差估计 .....	5
2.4 计算机的浮点数表示和舍入误差 .....	6
§ 3 病态问题、数值稳定性与避免误差危害 .....	8
3.1 病态问题与条件数 .....	8
3.2 数值方法的稳定性 .....	9
3.3 避免有效数字的损失 .....	11
3.4 减少运算次数 .....	12
§ 4 矩阵、向量和连续函数的范数 .....	13
4.1 范数的一般概念 .....	13
4.2 向量的范数 .....	18
4.3 矩阵的范数 .....	19
评注 .....	26
习题 .....	26
<b>第二章 插值法</b> .....	29
§ 1 Lagrange 插值 .....	29
1.1 Lagrange 插值多项式 .....	29
1.2 插值余项及估计 .....	32
1.3 线性插值和抛物插值 .....	34
§ 2 均差与 Newton 插值公式 .....	36
2.1 Newton 插值公式 .....	36

2.2	均差及其性质 .....	38
2.3	均差型余项 .....	41
§ 3*	插值余项的 Peano 估计 .....	43
3.1	近似公式的误差 .....	43
3.2	一般 Peano 余项公式 .....	45
3.3	插值余项公式 .....	47
§ 4	差分与等距节点插值公式 .....	51
4.1	差分及其性质 .....	51
4.2	等距节点插值公式 .....	53
§ 5	Hermite 插值 .....	56
5.1	Hermite 插值多项式 .....	56
5.2	重节点均差 .....	59
5.3	Newton 形式的 Hermite 插值多项式 .....	62
5.4	一般密切插值(Hermite 插值) .....	65
§ 6	分段低次插值 .....	66
6.1	插值法的收敛性问题 .....	66
6.2	分段线性插值 .....	69
6.3	分段三次 Hermite 插值 .....	72
§ 7	三次样条插值的计算方法 .....	75
7.1	三次样条插值函数 .....	75
7.2	$M$ 关系式 .....	76
7.3	$m$ 关系式 .....	78
7.4	数值例子 .....	80
§ 8	三次样条插值函数的性质与误差估计 .....	83
8.1	基本性质 .....	83
8.2*	误差估计 .....	84
§ 9*	$B$ -样条函数 .....	88
9.1	$B$ -样条函数概念 .....	88
9.2	$B$ -样条函数基本性质 .....	91
9.3	低次正规化 $B$ -样条函数 .....	96
9.4	样条函数插值 .....	98



§ 10*	二元插值 .....	101
10.1	Lagrange 插值 .....	101
10.2	分片双线性插值 .....	104
10.3	分片双三次 Hermite 插值 .....	105
评注	.....	105
习题	.....	106
<b>第三章</b>	<b>函数逼近</b> .....	<b>110</b>
§ 1	正交多项式 .....	110
1.1	正交多项式的概念及性质 .....	110
1.2	Legendre 多项式 .....	114
1.3	Chebyshev 多项式 .....	116
1.4	Laguerre 多项式 .....	118
1.5	Hermite 多项式 .....	118
§ 2	函数的最佳平方逼近 .....	119
2.1	最佳平方逼近概念及计算 .....	119
2.2	用正交函数作最佳平方逼近 .....	122
2.3	用 Legendre 多项式作最佳平方逼近 .....	124
§ 3	最小二乘法 .....	126
3.1	最小二乘法及其计算 .....	126
3.2	用正交函数作最小二乘 .....	131
§ 4*	周期函数的最佳平方逼近 .....	132
4.1	周期函数的最佳平方逼近 .....	133
4.2	离散情形 .....	136
4.3	$f$ 为周期复值函数的情形 .....	138
§ 5*	快速 Fourier 变换 .....	138
5.1	快速 Fourier 变换 .....	139
5.2	以 2 为底的 FFT .....	141
5.3	Sande-Tukey 算法 .....	146
§ 6	函数的最佳一致逼近 .....	148
6.1	最佳一致逼近多项式的存在性 .....	148
6.2	Chebyshev 定理 .....	150

6.3 零偏差最小问题..... 155

6.4 最佳一致逼近多项式..... 156

§ 7 近似最佳一致逼近多项式 ..... 157

7.1 用 Chebyshev 多项式的展开来逼近函数..... 157

7.2 Chebyshev 多项式零点插值 ..... 159

§ 8 Chebyshev 节约化 ..... 161

评注 ..... 165

习题 ..... 166

**第四章 数值积分和数值微分 ..... 169**

§ 1 Newton-Cotes 求积公式 ..... 169

1.1 插值型积分法..... 169

1.2 Newton-Cotes 求积公式 ..... 170

1.3 Newton-Cotes 公式的误差分析 ..... 172

1.4 计算稳定性问题..... 175

1.5 开型求积公式..... 176

§ 2 复合求积公式 ..... 178

2.1 复合梯形求积公式..... 179

2.2 复合 Simpson 求积公式..... 181

§ 3\* Peano 的误差表示 ..... 183

3.1 梯形公式的误差..... 183

3.2 Simpson 公式的误差 ..... 185

3.3 利用导数值的求积公式..... 188

§ 4 Gauss 求积公式 ..... 191

4.1 一般理论..... 191

4.2 Gauss 求积方法的稳定性与收敛性 ..... 194

4.3 Gauss-Legendre 求积公式 ..... 197

4.4 Gauss-Chebyshev 求积公式 ..... 199

4.5\* 修改 Gauss 求积公式 ..... 201

§ 5 Romberg 求积公式..... 203

5.1 Euler-Maclaurin 求和公式 ..... 204

5.2 Richardson 外推..... 204

5.3 Romberg 求积方法 .....	207
§ 6 奇异积分与振荡函数的积分 .....	210
6.1 反常积分的数值方法 .....	210
6.2 无穷区间上的积分 .....	214
6.3 无穷区间上的 Gauss 求积公式 .....	216
6.4* 振荡函数的积分 .....	217
§ 7* 二维近似求积 .....	219
7.1 矩形域上的插值型求积公式 .....	220
7.2 复合求积公式 .....	222
7.3 Gauss 型求积公式 .....	225
§ 8 数值微分 .....	226
8.1 插值型求导公式 .....	226
8.2 数值微分问题化为数值积分问题 .....	228
8.3 数值微分的外推算法 .....	231
评注 .....	232
习题 .....	233
<b>第五章 解线性代数方程组的直接方法 .....</b>	<b>236</b>
§ 1 Gauss 消去法 .....	236
1.1 Gauss 消去法的计算过程 .....	237
1.2 消去法的进一步讨论, 矩阵的 $LU$ 分解 .....	240
§ 2 主元素消去法 .....	245
2.1 有换行步骤的消去法 .....	245
2.2 列主元素消去法与完全主元素消去法 .....	246
2.3 包含换行步骤的三角分解定理 .....	249
§ 3 直接三角分解方法 .....	250
3.1 Doolittle 分解方法 .....	250
3.2 列主元直接三角分解方法 .....	253
3.3 三对角方程组的追赶法 .....	254
3.4 对称正定矩阵的 Cholesky 分解, 平方根法 .....	258
§ 4 矩阵的奇异值和条件数, 直接方法的误差分析 .....	261
4.1 矩阵的奇异值及其性质与应用 .....	261

4.2	矩阵的条件数, 扰动方程组的误差界	265
4.3	主元素消去法浮点舍入的误差分析	271
§ 5	解的迭代改进	272
5.1	迭代改进的计算方法	273
5.2	收敛性分析	274
§ 6*	稀疏矩阵技术介绍	276
6.1	稀疏矩阵	276
6.2	稀疏矩阵的存贮	278
6.3	稀疏方程组的消去法简介	281
6.4	稀疏对称正定矩阵的 Cholesky 分解	285
评注		289
习题		290
<b>第六章</b>	<b>解线性代数方程组的迭代方法</b>	<b>294</b>
§ 1	迭代法的基本概念	294
1.1	向量序列和矩阵序列的极限	294
1.2	迭代公式的构造	297
1.3	迭代法的收敛性	298
1.4	迭代法的收敛速度	301
§ 2	Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法	302
2.1	Jacobi 迭代法	302
2.2	Gauss-Seidel 迭代法	304
2.3	J 法和 GS 法的收敛性	305
§ 3	超松弛 (SOR) 迭代法	310
3.1	超松弛迭代法	310
3.2	SOR 迭代法的收敛性	317
3.3	最优松弛因子, 迭代法的比较	314
3.4	块松弛迭代法	317
§ 4	共轭梯度法	319
4.1	与方程组等价的变分问题	319
4.2	最速下降法	320
4.3	共轭梯度法	321

4.4* 预处理方法简介 .....	327
评注 .....	329
习题 .....	329
<b>第七章 非线性方程和方程组的数值解法</b> .....	<b>333</b>
§1 单个方程的迭代法 .....	334
1.1 不动点和不动点迭代法 .....	334
1.2 局部收敛性和收敛阶 .....	338
§2 迭代加速收敛的方法 .....	340
2.1 Aitken 的 $\Delta^2$ 方法 .....	340
2.2 Steffensen 迭代法 .....	341
§3 Newton 迭代法 .....	344
3.1 Newton 迭代法的计算公式 .....	344
3.2 重根情形 .....	346
§4 割线法与 Muller 方法 .....	348
4.1 割线法 .....	348
4.2 Muller 方法 .....	351
§5 非线性方程组的不动点迭代法 .....	351
5.1 向量值函数的导数及其性质 .....	352
5.2 不动点迭代法 .....	354
§6 非线性方程组的 Newton 法和拟 Newton 法 .....	358
6.1 Newton 法 .....	358
6.2* 拟 Newton 法 .....	361
评注 .....	365
习题 .....	366
<b>第八章 代数特征值问题计算方法</b> .....	<b>369</b>
§1 特征值问题的性质和估计 .....	370
1.1 特征值问题的性质 .....	370
1.2 特征值的估计和扰动 .....	371
§2 正交变换及矩阵分解 .....	376
2.1 Householder 变换 .....	376

2.2	Givens 变换 .....	379
2.3	矩阵的 QR 分解 .....	380
2.4	矩阵的 Schur 分解 .....	384
§ 3	幂迭代法和逆幂迭代法 .....	386
3.1	幂迭代法 .....	386
3.2	加速技术 (Aitken 方法) .....	389
3.3	收缩方法 .....	390
3.4	逆幂迭代法 .....	391
§ 4	正交相似变换化矩阵为 Hessenberg 形式 .....	393
4.1	化矩阵为 Hessenberg 形式 .....	393
4.2	Hessenberg 形式的不唯一性 .....	396
§ 5	QR 方法 .....	398
5.1	QR 迭代的基本算法及性质 .....	398
5.2	Hessenberg 矩阵的 QR 方法 .....	403
5.3	带有原点位移的 QR 方法 .....	404
5.4*	双重步 QR 方法 .....	407
§ 6	对称矩阵特征值问题的计算 .....	412
6.1	对称矩阵特征值的性质 .....	412
6.2	Rayleigh 商加速和 Rayleigh 商迭代 .....	412
6.3	Jacobi 方法 .....	413
评注	.....	417
习题	.....	418
<b>第九章</b>	<b>常微分方程初值问题的数值解法</b> .....	<b>422</b>
§ 1	基本概念、Euler 方法和有关的方法 .....	422
1.1	Euler 方法、后退 Euler 方法和梯形方法 .....	422
1.2	单步法的截断误差和阶 .....	426
§ 2	Runge-Kutta 方法 .....	428
2.1	用 Taylor 展开构造高阶方法 .....	428
2.2	二、三、四阶的显式 Runge-Kutta 方法 .....	430
2.3	高阶和隐式的 Runge-Kutta 方法 .....	434
2.4*	误差控制与变步长的 Runge-Kutta-Fehlberg 方法 .....	435

§ 3	单步法的收敛性、相容性与绝对稳定性 .....	438
3.1	收敛性 .....	438
3.2	相容性 .....	439
3.3	绝对稳定性 .....	440
§ 4	线性多步法 .....	445
4.1	一般形式的线性多步法 .....	445
4.2	基于数值积分的方法 .....	449
4.3	Adams 公式 .....	451
4.4	Nyström 方法 .....	454
4.5	待定系数法 .....	455
4.6	预估—校正算法 .....	456
§ 5	线性差分方程 .....	459
5.1	线性差分方程的基本性质 .....	459
5.2	齐次差分方程的解 .....	461
§ 6	线性多步法的收敛性与稳定性 .....	462
6.1	相容性和收敛性 .....	462
6.2	稳定性 .....	469
6.3	绝对稳定性 .....	471
§ 7*	一阶方程组与刚性方程组 .....	475
7.1	一阶方程组 .....	475
7.2	刚性方程组 .....	476
评注	.....	479
习题	.....	480
<b>参考书目</b>	.....	<b>483</b>

# 第一章 引 论

## § 1 数值分析的研究对象

数值分析属于计算数学的范畴，是研究各种数学问题的数值方法设计、分析、有关的数学理论和具体实现的一门学科。由于近几十年来计算机的迅速发展，数值计算方法的应用已经普遍深入到各个科学领域，很多复杂的和大规模的计算问题都可以在计算机上进行计算，新的、有效的数值方法不断出现。现在，科学与工程中的数值计算已经成为各门自然科学和工程技术科学的一种重要手段，成为与实验和理论并列的一个不可缺少的环节。所以数值分析既是一个基础性的，同时也是一个应用性的数学学科，与其它学科的联系十分紧密。

由于大量的问题要在计算机上求解，所以要对各种数值方法进行分析，其内容包括：误差、稳定性、收敛性、计算工作量、存储量和自适应性，这些基本的概念用于刻画数值方法的适用范围、可靠性、准确性、效率和使用的方便性等。

当代实际的科学与工程计算中，计算问题往往是复杂的和综合的。但是有一些最基础、最常用的数值方法，它们成为通常大学数值分析课程的内容。本书主要讨论这些方法及其分析，它们包括逼近问题（函数的插值和逼近，数值积分和微分），线性代数问题（方程组和特征值问题）和非线性方程及方程组的数值解法问题，以及常微分方程的数值解法等。这些是数值分析最基础的内容，不仅可以直接应用于实际计算，同时也是其它数值计算问题所用到的方法及其分析的基础。



## § 2 数值计算的误差

### 2.1 误差的来源与分类

绝大多数的数值计算结果会有误差，这首先可能是将物理问题数学模型化时产生的，也可能是计算工作者的疏忽导致的，这些我们都不加以讨论。我们把一个数学问题作数值计算时可能产生的误差大致分为如下的三类。

第一类是**输入数据的误差**。这可能是物理数据的不可靠性引起的，例如物理数据的测量有误差等。在数值计算过程中我们不能控制这种误差，但是我们要分析它对计算结果的影响。分析的方法和舍入误差影响的方法大体上是一样的。

第二类是**舍入误差**。计算机的数字位数是有限的位数，所以对原始数据、中间结果和最后结果都要舍入，就产生舍入误差。在十进制运算一般就是四舍五入。例如，取五位数字时， $\frac{1}{3}$ 就写成0.333 33，同样 $\pi$ 写成3.141 6。在二进制、八进制和十六进制运算也类似进行舍入。有的计算机不用舍入而采用“切断”，即将规定有限位以后的数字去掉，这可以和舍入误差类似进行分析。

第三类是**截断误差**。一般是指求某数学问题的数值解时，用有限的过程代替无限的过程所产生的误差，也可能是用容易计算的问题代替不易计算的问题所产生的误差。例如

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

当 $|x|$ 较小 ( $|x| \ll 1$ ) 时，我们用前三项作为 $\sin x$ 的近似值，其截断误差的绝对值不超过 $\frac{|x|^7}{7!}$ 。又如，我们用差商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 作为导数 $\frac{dy}{dx}$ 的近似值，产生的误差也是截断误差。

在关于函数的插值和逼近，数值积分与微分，常微分方程数