“希望杯”数学竞赛系列丛书

周国镇◎主编

孙金兰 等◎编著

希望杯
数学能力培训教程
初一（第4版）

象出版社
ina Meteorological Press

"希望杯"数学竞赛系列丛书

周国镇◎主编

希望杯

数学能力培训教程

初一（第4版）

孙金兰 等◎编著

气象出版社
China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

"希望杯"数学能力培训教程. 初一/孙金兰等编著. —4 版.
—北京:气象出版社,2014.7
ISBN 978-7-5029-5965-4

Ⅰ.①希… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①中学数学课-初中-教
学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 146661 号

"Xiwangbei" Shuxue Nengli Peixun Jiaocheng. Chuyi(Di-4 Ban)

"希望杯"数学能力培训教程·初一(第 4 版)

孙金兰 等◎编著

出版发行:气象出版社
地　　址:北京市海淀区中关村南大街 46 号　　**邮政编码**:100081
总 编 室:010-68407112　　**发 行 部**:010-68409198
网　　址:http://www.cmp.cma.gov.cn　　**E-mail**:qxcbs@cma.gov.cn
责任编辑:殷　淼　　**终　　审**:章澄昌
封面设计:符　赋　　**责任技编**:吴庭芳
责任校对:华　鲁
印　　刷:三河市鑫利来印装有限公司
开　　本:720 mm×960 mm　1/16　　**印　　张**:17
字　　数:304 千字
版　　次:2014 年 7 月第 4 版　　**印　　次**:2014 年 7 月第 1 次印刷
印　　数:1—25000　　**定　　价**:28.00 元

前 言

这套教程充分注意了中小学数学教学大纲，力求充分体现“希望杯”的特色，为中小学师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法，以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题，这些题目中的绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命题，其余则是由全国各地数学命题的研究人员编制。这些题目不但贴近现行的中小学数学课本，而且很有启发性、思考性和趣味性，寓科学于趣味之中，寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平，并且能实实在在地提高科学思维素质，而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此，历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好：中考、高考命题人员经常从中吸取营养；有远见的数学教师从中选取大量资料，来充实和丰富教学内容；众多的数学教育和培训机构则用来作为教材的主要内容。最有说服力的是千千万万的中小学生，正是通过对“希望杯”试题的学习、研究，提高了水平，大大加强了学数学的兴趣和信心，他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是，北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子中有不少人，在中小学时代，都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从 1990 年开始举办，至今已举办 25 届中学组比赛。25 年来，参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级，每个年级的试题、培训题累计超过 3000 个，四个年级的题目则累计近 1.2 万个，几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容，不仅如此，而且蕴涵了丰富的数学思想和方法。从 1993 年开始，至今已举办 12 届小学组比赛，四、五、六级的试题、培训题累计也近 5000 个。若要将这些题目全部做一遍，对于一位数学教师来说，确也值得和可能，但是，对于一名学生，则难度就很大了。因此，如何从中提取最精彩、最重要的部分，按数学内容的系统整理出来，就非常必要。这套教程正是做了这样一件事：它从每个年级的试题中各精选了 1/5 左右，分为若干个专题，对每个专题，给出了

相关的必备知识,再详细分析若干个题目,然后安排做少量的题,通过这样一个过程,一个专题就拿下来了。一个个专题,陆续学下来,中小学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握,数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小学生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容,另一方面又有不少中小学生并不满足于此,他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲,所以我们的教程分课本以内(基础篇)和课本以外(提高篇)两部分。前者占教程的大部分,后者只占教程的小部分。

这套教程由气象出版社于2005年12月开始出版,此后多次重印,包括高一、高二,初一、初二,小学四、五、六年级,共七册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲,更突出对科学思维能力的培养,而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要,本教程将逐年修订,不断优化,力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小学生走向热爱数学、掌握数学的成功道路。

这套教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员,有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛,并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚地欢迎读者指出书中不妥之处。

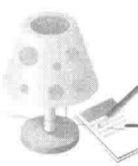
周国镇

2014年6月10日

注:**周国镇** 数学教育专家,1991年创办《数理天地》杂志并担任杂志社社长兼总编;中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事,数学教育委员会主任;1991年创办“希望杯”全国数学邀请赛,一直是组委会第一负责人,并兼秘书长、命题委员会主任。2010年,与美国加州大学伯克利分校合作创办了世界数学团体锦标赛(World Mathematics Team Championship),担任组委会主席。

目 录

第 1 讲　有理数



一、知识提要

本章的主要内容可以概括为有理数的概念与有理数的运算两部分. 有理数的概念可以利用数轴来认识、理解，同时，利用数轴又可以把这些概念串在一起. 有理数的运算是重点. 在具体运算时，要注意四个方面，一是运算法则，二是运算律，三是运算顺序，四是近似计算.

(一) 有理数的概念

1. 正数：大于 0 的数叫作正数.

2. 负数：在正数前面加上负号“−”的数叫作负数.（也就是小于 0 的数是负数）

3. 0 既不是正数也不是负数.

4. 有理数：可以写成分数$\frac{m}{n}$(m，n 是整数，$n \neq 0$) 的形式的数叫作有理数.

5. 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作数轴.

数轴三要素：

(1) 在直线上任取一个点表示 0，这个点叫作原点.

(2) 通常规定直线上从原点向右(或上) 为正方向，从原点向左(或下) 为负方向.

(3) 选取适当的长度为单位长度.

6. 绝对值：数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫作数 a 的绝对值，记作 $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0. \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

由绝对值的定义可得：$|a-b|$ 表示数轴上 a 点到 b 点的距离.

7. 相反数：绝对值相等，只有符号不同的两个数叫作互为相反数.

8. 倒数：1 除以一个数(0 除外)的商，叫作这个数的倒数. 0 没有倒数.

9. 有理数的乘方：求 n 个相同因数的积的运算，叫作乘方，乘方的结果叫作幂. a^n 中，a 叫作底数，n 叫做指数.

负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数. 正数的任何次幂都是正数，0 的任何正整数幂都是 0.

10. 科学计数法：把一个大于 10 的数表示成 $a\times10^n$ 的形式(其中 $0<a<10$，n 是正整数).

11. 近似数：与实际数很接近的数.

有效数字：一个近似数，从左边第一个不是 0 的数字起，到精确到的数位止，所有的数字都叫作这个数的有效数字.

一个近似数，四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位. 换句话说，这个近似数最末一个数字所处数位就是它的精确度.

(二) 有理数的运算

1. 有理数加法法则

(1) 同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加.

(2) 绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 互为相反数的两个数相加得 0.

(3) 一个数同 0 相加，仍得这个数.

2. 有理数减法法则

减去一个数，等于加上这个数的相反数. 如：$a-b=a+(-b)$.

3. 有理数乘法法则

两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘. 任何数乘以 0，都得 0.

4. 有理数除法法则

(1) 除以一个不等于 0 的数，等于乘这个数的倒数.

(2) 两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除. 0 除以任何一个不等于 0 的数，都得 0.

5. 有理数运算律

(1) 加法交换律：$a+b=b+a$.

(2) 加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

(3) 乘法交换律：$ab=ba$.

(4) 乘法结合律：$(ab)\cdot c=a\cdot(bc)$.

(5) 乘法分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

6. 有理数混合运算的运算顺序

(1) 先乘方，再乘除，最后加减.

(2) 同级运算，从左到右进行.

(3) 如有括号，先做括号内的运算，按小括号、中括号、大括号的顺序依次进行.

7. 比较两个有理数大小的方法

(1) 利用数轴比较：在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大.

(2) 利用法则比较：正数大于 0，负数小于 0，正数大于一切负数；两个正数比较大小，绝对值大的数较大；两个负数比较大小，绝对值大的数反而小.

(3) 作差法：$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$.

(4) 作商法：$\dfrac{a}{b}>1, b>0 \Leftrightarrow a>b$.

8. 比较多个(大于 2 个) 有理数大小的原理

(1) 对于 3 个有理数 a,b,c，如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

(2) 对于 3 个有理数 a,b,c，如果 $a>b, c>0$，则 $ac>bc$. 如果 $a>b, c<0$，则 $ac<bc$.

(3) 对于 3 个有理数 a,b,c，如果 $a>b$ 且 $b>c$，则 $a>c$.

(4) 对于有理数 a,b,c,d，如果 $a>b, c>d$，则 $a+c>b+d, a-d>b-c$.

(5) 对于有理数 a,b,c,d：

① 如果 $a>b>0, c>d>0$，则 $ac>bd$；

② 如果 $a>b>0, c>d>0$，则 $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$；

③ 如果 $a>b>0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

④ 如果 $a>b>0$ 且 n 是正整数，则 $a^n>b^n$.

二、例题

例 1. 设 $a<0$，在代数式 $|a|, -a, a^{2009}, a^{2010}, |-a|, \left(\dfrac{a^2}{a}+a\right), \left(\dfrac{a^2}{a}-a\right)$ 中，负数的个数是(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

第 21 届(2010 年) 初一第 1 试

分析:通过简单运算即可确定答案.

解:因为 $a<0$,所以 $|a|$,$-a$,a^{2010},$|-a|$ 均为正数,而$\frac{a^2}{a}-a=a-a=0$,所以只有 a^{2009},$\frac{a^2}{a}+a=2a$ 为负数.故选(B).

例 2. 已知 a 和 b 是有理数,若 $a+b=0$,$a^2+b^2\neq0$,则在 a 和 b 之间一定(　　)

(A) 存在负整数. (B) 存在正整数. (C) 存在负分数. (D) 不存在正分数.

第 21 届(2010 年)初一第 1 试

分析:由 $a+b=0$ 知 a,b 互为相反数,由 $a^2+b^2\neq0$ 知 a,b 不同时为 0.

解法 1:特殊值法.

当 $a=-b=\frac{1}{2}$ 时,$a+b=0$,$a^2+b^2\neq0$,$-\frac{1}{2}$ 和$\frac{1}{2}$ 之间不存在正整数和负整数,存在正分数和负分数,于是(A)(B)(D) 都不正确.故选(C).

解法 2:一般地,由 $a^2+b^2\neq0$ 可知 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,再由 $a+b=0$,可知$a=-b$,则可设 $a>b$,并且有 $a>0>b$,0 和 b 之间一定有负分数.故选(C).

例 3. 计算:$2012+2011-2010-2009+2008+2007-2006-2005+\cdots+4+3-2-1=$(　　)

(A)2011.　　(B)2012.　　(C)0.　　(D)1.

第 23 届(2012 年)初一培训题

分析:观察所求式发现:各数的绝对值逐渐递减,数字前的正负号也有一定规律,从而想到要适当地添加括号,将所求式先分组,再化简计算.

解法 1:从第一个数 2012 开始,每四个数分成一组,一共分成 $2012\div4=503$ 组,每一组的计算结果都是 4.则

$$\begin{aligned}原式&=(2012+2011-2010-2009)+(2008+2007-2006-2005)+\cdots+\\&\quad(4+3-2-1)\\&=\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{503个4}\\&=4\times503=2012.\end{aligned}$$

故选(B).

解法 2:从第二个数 2011 开始,每四个数分成一组,每一组的结果为 0,在算式的末尾补上“+0”这一项.则

$$\begin{aligned}原式&=2012+(2011-2010-2009+2008)+(2007-2006-2005+2004)+\cdots+\\&\quad(7-6-5+4)+(3-2-1+0)\end{aligned}$$

$$=2012+\underbrace{0+0+\cdots+0}_{503个0}$$

$$=2012.$$

故选(B).

例 4. 计算 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)=$ ______.

第 8 届(1997 年)初一第 2 试

分析: 待求式各项中均含有 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)$,用字母 a 来表示,可使各式之间关系变得简明.

解: 原式 $=\left(a+\frac{1}{1997}\right)(1+a)-\left(1+a+\frac{1}{1997}\right)a$

$$=\left(a+\frac{1}{1997}+a^2+\frac{a}{1997}\right)-\left(a+a^2+\frac{a}{1997}\right)$$

$$=\frac{1}{1997}.$$

例 5. 设 $A=48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$,则与 A 相差最小的正整数是(　　)

(A) 18.　　(B) 20.　　(C) 24.　　(D) 25.

第 22 届(2011 年)初一培训题

分析: 显然 $A>0$. 若存在整数 x 使得 $0\leqslant|A-x|<\frac{1}{2}$,则与 A 相差最小的整数是 x.

解: 当 $n\geqslant 3$ 时,有

$$\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{(n-2)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right),$$

所以 $$A=48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$$

$$=48\times\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{102}\right)\right]$$

$$=12\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)$$

$$=25-12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right).$$

因为
$$12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right)$$
$$<12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{99}+\frac{1}{99}+\frac{1}{99}\right)$$
$$=12\times\frac{4}{99}<\frac{1}{2}.$$

所以,与 A 相差最小的正整数是 25.

故选(D).

例 6. 若4个有理数 a,b,c,d 满足 $\frac{1}{a-1997}=\frac{1}{b+1998}=\frac{1}{c-1999}=\frac{1}{d+2000}$,则 a,b,c,d 的大小关系是(　　)

(A)$a>c>b>d$.　　(B)$b>d>a>c$.

(C)$c>a>b>d$.　　(D)$d>b>a>c$.

第 11 届(2000 年)初一第 1 试

分析:a,b,c,d 均含在分母中,自然想到先取倒数再化简比较.

解:由 $\frac{1}{a-1997}=\frac{1}{b+1998}=\frac{1}{c-1999}=\frac{1}{d+2000}$ 得

$$a-1997=b+1998=c-1999=d+2000,$$ 设其值为 k,

于是
$$a=k+1997,b=k-1998,c=k+1999,d=k-2000.$$

所以
$$c>a>b>d.$$

故选(C).

例 7. 已知 $P=-\frac{1}{12345\times12346}$,$Q=-\frac{1}{12344\times12346}$,$R=-\frac{1}{12344\times12345}$,则 P,Q,R 的大小顺序是(　　)

(A)$P>Q>R$.　　(B)$Q>P>R$.

(C)$P>R>Q$.　　(D)$R>Q>P$.

第 6 届(1995 年)初一第 2 试

分析:P,Q,R 均是分子为 1 的分数,显然,可通过比较分母(取倒数)大小来求解. 再看分母,数字比较大,直接计算太繁琐,但每个因数的差为 1,可用字母代数来比较.

解:设 $12345=a$,则

$$P=-\frac{1}{a(a+1)}=-\frac{1}{a^2+a},$$

$$Q=\frac{1}{(a-1)(a+1)}=-\frac{1}{a^2-1},$$

$$R=-\frac{1}{(a-1)a}=-\frac{1}{a^2-a}.$$

显然 $$a^2+a>a^2-1>a^2-a>0\text{(其中 }a=12345\text{)}.$$

于是 $$\frac{1}{a^2+a}<\frac{1}{a^2-1}<\frac{1}{a^2-a}.$$

因此 $$-\frac{1}{a^2+a}>-\frac{1}{a^2-1}>-\frac{1}{a^2-a}\text{，即 }P>Q>R.$$

故选(A).

注:此题也可用作差法求解.

例 8. 若 $a=\frac{999}{2011}$,$b=\frac{1000}{2012}$,$c=\frac{1001}{2013}$,则(　　)

(A) $a<b<c$.　　　　(B) $b<c<a$.

(C) $c<b<a$.　　　　(D) $a<c<b$.

第 24 届(2013 年)初一第 1 试

分析:a,b,c 的分子依次相差 1,分母也依次相差 1,可作差、作商或拆分.

解法 1:拆项法.

$$a=\frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011},$$

$$b=\frac{1000}{2012}=1-\frac{1012}{2012},$$

$$c=\frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}.$$

因为 $$2011<2012<2013,$$

所以 $$\frac{1012}{2011}>\frac{1012}{2012}>\frac{1012}{2013},$$

于是 $$1-\frac{1012}{2011}<1-\frac{1012}{2012}<1-\frac{1012}{2013},$$

即 $$a<b<c.$$

故选(A).

解法 2:观察已知三个分数的特征,可设它们分别为 $\frac{y}{x}$,$\frac{y+1}{x+1}$,$\frac{y+2}{x+2}$(其中 $x>y$),则

$$\frac{y}{x}-\frac{y+1}{x+1}=\frac{y(x+1)-x(y+1)}{x(x+1)}=\frac{y-x}{x(x+1)},$$

因为
$$x>y,$$
所以
$$y-x<0,$$
于是
$$\frac{y-x}{x(x+1)}<0,$$
所以
$$\frac{y}{x}<\frac{y+1}{x+1}.$$
同理
$$\frac{y+1}{x+1}<\frac{y+2}{x+2},$$
于是
$$\frac{y}{x}<\frac{y+1}{x+1}<\frac{y+2}{x+2},$$
所以
$$a<b<c.$$

故选(A).

例 9. $-\frac{1997}{1998}, -\frac{97}{98}, -\frac{1998}{1999}, -\frac{98}{99}$ 这 4 个数由小到大的排列顺序是(　　)

(A) $-\frac{1997}{1998}<-\frac{97}{98}<-\frac{1998}{1999}<-\frac{98}{99}$.

(B) $-\frac{1998}{1999}<-\frac{1997}{1998}<-\frac{98}{99}<-\frac{97}{98}$.

(C) $-\frac{97}{98}<-\frac{98}{99}<-\frac{1997}{1998}<-\frac{1998}{1999}$.

(D) $-\frac{98}{99}<-\frac{1998}{1999}<-\frac{97}{98}<-\frac{1997}{1998}$.

第 10 届(1999 年)初一第 1 试

分析:要比较的 4 个数均为负数,可转化为正数比较,也可根据数轴上的点的特征来求解.

解法 1:加 1 法.

将每个数都加 1(大小次序不变),即有

$$-\frac{1997}{1998}+1=\frac{1}{1998}, -\frac{97}{98}+1=\frac{1}{98},$$
$$-\frac{1998}{1999}+1=\frac{1}{1999}, -\frac{98}{99}+1=\frac{1}{99}.$$

由两分数比较大小,分子相同时,分母大的反而小,得

$$\frac{1}{1999}<\frac{1}{1998}<\frac{1}{99}<\frac{1}{98},$$

所以
$$-\frac{1998}{1999}<-\frac{1997}{1998}<-\frac{98}{99}<-\frac{97}{98}.$$

故选(B).

解法 2: 因为 $\left|-\frac{1997}{1998}\right|=\frac{1997}{1998}$, $\left|-\frac{97}{98}\right|=\frac{97}{98}$, $\left|-\frac{1998}{1999}\right|=\frac{1998}{1999}$, $\left|-\frac{98}{99}\right|=\frac{98}{99}$, 又 $\frac{1998}{1999}>\frac{1997}{1998}>\frac{98}{99}>\frac{97}{98}$,根据两个负数比较大小,绝对值大的反而小,得
$$-\frac{1998}{1999}<-\frac{1997}{1998}<-\frac{98}{99}<-\frac{97}{98}.$$

故选(B).

例 10. 甲杯中盛有 m 毫升红墨水,乙杯中盛有 m 毫升蓝墨水,从甲杯倒出 a 毫升到乙杯里($0<a<m$),搅匀后,又从乙杯倒出 a 毫升到甲杯里,则这时(　　)

(A) 甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水少.

(B) 甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水多.

(C) 甲杯中混入的蓝墨水和乙杯中混入的红墨水相同.

(D) 甲杯中混入的蓝墨水与乙杯中混入的红墨水多少关系不定.

第 1 届(1990 年)初一第 2 试

分析: 混合后红墨水和蓝墨水的体积不变,而甲、乙两杯中的墨水量也未改变. 假设最后甲杯中含有 x 毫升蓝墨水,则与原来相比,杯中红墨水的量减少了 x 毫升,而减少的红墨水盛在乙杯中. 同理,乙杯中减少的蓝墨水的量就是甲杯中增加的蓝墨水的量. 故最终两杯中混入对方的墨水量相同.

解: 从甲杯倒出 a 毫升红墨水到乙杯中以后,

乙杯中含红墨水的比例是　$\frac{a}{m+a}$,

乙杯中含蓝墨水的比例是　$\frac{m}{m+a}$.

再从乙杯中倒出 a 毫升混合墨水到甲杯中以后,
乙杯中含有的红墨水的数量是
$$a-a\cdot\frac{a}{m+a}=\frac{ma}{m+a}(\text{毫升}),$$
乙杯中减少的蓝墨水的数量是
$$a\cdot\frac{m}{m+a}=\frac{ma}{m+a}(\text{毫升}).$$

故选(C).

例 11. 5 个有理数两两的乘积是如下 10 个数:-12, 0.168, 0.2, 80, -12.6,

-15，-6000，0.21，84，100. 请确定这5个有理数，并简述理由.

第20届(2009年)初一第2试

分析：由这10个数中有4个负数，知原来的5个有理数中负数的个数是1或4.

解：将5个有理数两两的乘积由小到大排列，得

$$-6000<-15<-12.6<-12<0.168<0.2<0.21<80<84<100.$$

因为5个有理数的两两乘积中有4个负数且没有0，所以这5个有理数中有1个负数和4个正数，或1个正数和4个负数.

(1) 若这5个有理数是1负4正，不妨设为 $x_1<0<x_2<x_3<x_4<x_5$，则 $x_1x_5<x_1x_4<x_1x_3<x_1x_2<0<x_2x_3<x_2x_4<\begin{matrix}x_2x_5\\x_3x_4\end{matrix}<x_3x_5<x_4x_5$(其中 x_2x_5 与 x_3x_4 的大小关系暂时不能断定). 所以

$$x_1x_5=-6000,x_1x_4=-15,x_4x_5=100,$$

三式相乘，得

$$(x_1x_4x_5)^2=9\times10^6,$$

又

$$x_1<0,x_4>0,x_5>0,$$

解得

$$x_1x_4x_5=-3000,$$

所以

$$x_1=-30,x_4=0.5,x_5=200.$$

再由 $x_1=-30$，$x_1x_2=-12$，$x_1x_3=-12.6$，得

$$x_2=0.4,x_3=0.42.$$

经检验，$x_1=-30$，$x_2=0.4$，$x_3=0.42$，$x_4=0.5$，$x_5=200$ 符合题意.

(2) 若这5个有理数是4负1正，不妨设为 $x_1<x_2<x_3<x_4<0<x_5$，则 $x_1x_5<x_2x_5<x_3x_5<x_4x_5<0<x_3x_4<x_2x_4<\begin{matrix}x_1x_4\\x_2x_3\end{matrix}<x_1x_3<x_1x_2$(其中 x_1x_4 与 x_2x_3 的大小关系暂时不能断定). 所以

$$x_1x_5=-6000,x_2x_5=-15,x_1x_2=100,$$

三式相乘，得

$$(x_1x_2x_5)^2=9\times10^6,$$

又

$$x_1<0,x_2<0,x_5>0,$$

解得

$$x_1x_2x_5=3000,$$

所以

$$x_5=30,x_1=-200,x_2=-0.5.$$

再由 $x_5=30$，$x_3x_5=-12.6$，$x_4x_5=-12$，得

$$x_3=-0.42,x_4=-0.4.$$

经检验，$x_1=-200$，$x_2=-0.5$，$x_3=-0.42$，$x_4=-0.4$，$x_5=30$ 符合题意.

所以满足题设的5个有理数是

$$-30,0.4,0.42,0.5,200,\text{或}-200,-0.5,-0.42,-0.4,30.$$

三、习题

(一) 选择题

1. 若 a 是有理数，观察下列式子：

①$-a^{22}+1$.　②$a^{22}+1$.　③$(a+1)^2$.　④$-(a+1)^2$.

其中，值可以等于 0 的是(　　)

(A)①②③.　(B)①③④.　(C)①②④.　(D)②③④.

第 22 届(2011 年)初一培训题

2. 若 a,b,c 三个数互不相等，则在 $\frac{a-b}{b-c},\frac{b-c}{c-a},\frac{c-a}{a-b}$ 中，正数一定有(　　)

(A)0 个.　(B)1 个.　(C)2 个.　(D)3 个.

第 22 届(2011 年)初一培训题

3. 若 a 的负倒数的相反数是 8，b 的相反数的负倒数也是 8，则(　　)

(A) $a=b$.　(B) $a<b$.　(C) $a>b$.　(D) $ab=1$.

第 22 届(2011 年)初一第 1 试

4. 计算：$1+(-2)^2-\frac{-4\times(-1)^2}{4}=$ (　　)

(A) -2.　(B) -1.　(C) 6.　(D) 4.

第 23 届(2012 年)初一第 1 试

5. 若 $M-(-1)^2+\frac{-1\times(-1)^3-2}{2\times(-1)+1}=2$，则 $M=$ (　　)

(A) -2.　(B) -1.　(C)1.　(D)2.

第 24 届(2013 年)初一培训题

6. 计算：$\frac{a^2+244\times395-151}{244+395\times243-(-a^2)}=$ (　　)

(A) 1.　(B) 1.2.　(C) 1.8.　(D) 2.

第 21 届(2010 年)初一培训题

7. 若 $a=\frac{19951995}{19961996},b=\frac{19961996}{19971997},c=\frac{19971997}{19981998}$，则(　　)

(A) $a<b<c$.　(B) $b<c<a$.

(C) $c<b<a$.　(D) $a<c<b$.

第 8 届(1997 年)初一第 1 试