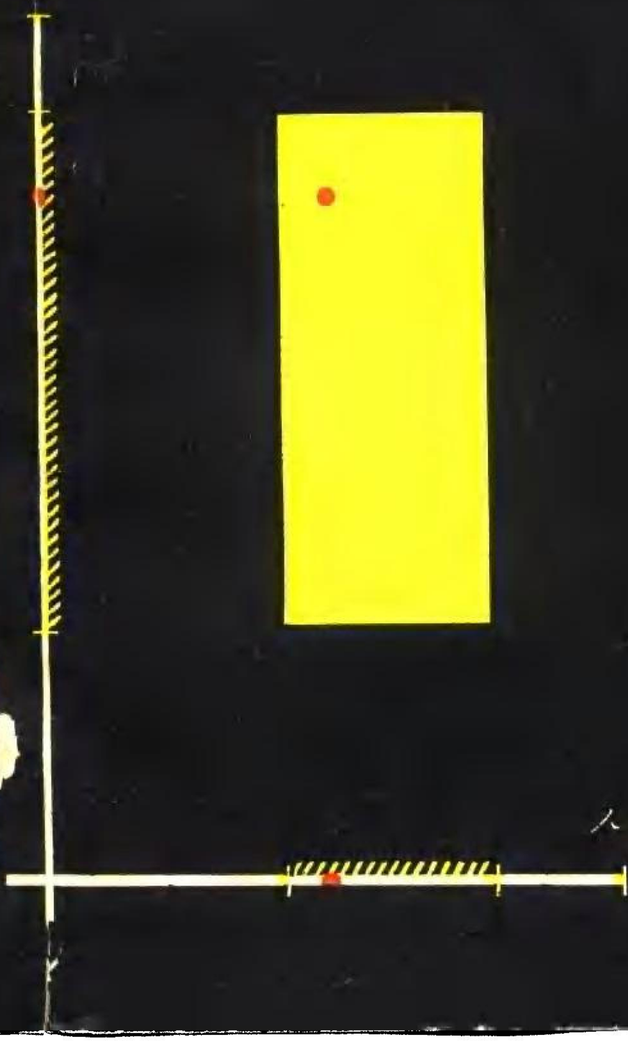
〔美〕RICHARD R·GOLDBERG 著

实分析方法

侯德润 译

下册



人民教育出版社

实分析方法

下　册

[美] Richard R. Goldberg 著

侯德润 译

人民教育出版社

原书供读完初等微积分课程的学生作为一学年高等分析教程用的.作者以严格的方式介绍了分析学中的基本概念如函数、极限、连续性、导数和积分、序列和级数等等,还以较多的篇幅讨论了度量空间和勒贝格积分等论题,以期为读者学习现代分析和拓扑学提供一个良好的基础. 此书立论严谨,说理详尽,各节均配有足够数量的习题.

中译本分上、下两册出版. 上册内容包括:集与函数、实数序列、实数级数、极限与度量空间、度量空间上的连续函数、连通性、完全性和紧性, 还有一个附录阐述了实数的代数公理和顺序公理. 下册内容包括: 微积分、初等函数、泰勒级数、函数序列和级数、三条著名定理、勒贝格积分和傅里叶级数.

本书可供高等学校数学专业师生和研究生及有关科技工作者参考.

实分析方法

下 册

〔美〕Richard R.Goldberg 著

侯德润 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

山东新华印刷厂德州厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 230,000

1981年7月第1版 1982年3月第1次印刷

印数 00,001—11,500

书号 13012·0639 定价 0.87 元

目　　录

第七章　微　积　分

第八章　初等函数，泰勒级数

第九章　函数序列和函数项级数

第十章 三条著名定理

第十一章 勒贝格积分

第十二章 傅里叶级数

第七章　微　积　分

§7.1　零测度集

下一节我们定义黎曼积分——初等微积分教程中所考察的积分. 我们将看到, 一个有界函数 f 可以黎曼积分, 如果 f 在"几乎每一"点上是连续的. "几乎每一"一词的严格意义将利用下列零测度集的概念来定义.

若 J 是一实数区间, 则以 $|J|$ 表示 J 的长度.

7.1A. **定义**　R^1 的子集 E 称为零测度集, 如果对于每一 $\varepsilon>0$, 存在有限或可数个开区间 $I_1, I_2, \cdots$ 使得 $E\subset\bigcup_n I_n$ 和 $\Sigma_n|I_n|<\varepsilon$.

因此 E 是零测度集, 如果任给 $\varepsilon>0$, E 能够被开区间的并所覆盖, 这些开区间的长度加起来小于 ε. 显而易见, 由一点组成的集有零测度.

下列结果非常有用.

7.1B. **定理**　若 R^1 的子集 E_1, $E_2, \cdots$ 中的每一个测度为零, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 测度也为零.

证: 固定 $\varepsilon>0$. 由于 E_n 有零测度, 对于每一 $n\in I$, 存在有限或可数个开区间覆盖 E_n, 其长度加起来小于 $\varepsilon/2^n$. 于是所有这些开区间的并(对于所有的 $n\in I$)覆盖了 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 并且所有这些(可数多个*)区间的长度加起来 $<\varepsilon/2+\varepsilon/2^2+\cdots=\varepsilon$. 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 有零

* 我们用到了 1.5F.

测度.

由于单点集测度为零，所以有下列推论.

7.1C. **推论** R^1 的每一可数的子集都有零测度.

事实上，甚至于存在 R^1 的不可数子集有零测度. 在第 11 章我们将能够证明 1.6D 中的康托尔集(是不可数集)测度为零. 另一方面，一个非空开区间(不管多小)绝不会测度为零. (参看习题 3.)

现在我们来把“几乎每一”精确化.

7.1D. **定义** 一个陈述叫做在$[a, b]$上几乎每一点(或者$[a, b]$中几乎处处)成立，如果在$[a, b]$中使该陈述不成立的点的集测度为零.

因此，“f 在$[a, b]$上几乎每一点连续”这句话的意思和“若 E 是$[a, b]$中使 f 不连续的点的集，则 E 测度为零”是一样的，我们也可以说“f 在$[a, b]$中几乎处处连续.”

习题 7.1

1. 若 A 测度不为零，$B \subset A$，而 B 测度为零，证明：$A-B$ 测度不为零.
2. 若 $a<b$，证明：$[a, b]$不能被有限多个开区间所覆盖，这些开区间的长度加起来小于 $b-a$.
   利用$[a, b]$的海因-波莱尔性质推证$[a, b]$测度不为零.
3. 若 $a<b$，证明：(a, b) 测度不为零.
4. (a) 试证所有有理数的集测度为零.
   (b) 试证所有无理数的集测度不为零.
5. 判断下列命题真还是不真：若 f 在 $[0, 1]$ 上连续，并且在几乎每一点 $x \in [0, 1]$ 上 $g(x)=f(x)$，则 g 在$[0, 1]$中几乎处处连续.

§7.2 黎曼积分的定义

在整个这一章的其余部分中，我们只考虑实值函数.

7.2A. **定义** 设$\mathscr{G}$为任一有界的实数区间，并设 f 为$\mathscr{G}$上的一个有界(实值)函数. 我们定义 $M[f;\mathscr{G}]$, $m[f;\mathscr{G}]$和 $\omega[f;\mathscr{G}]$为

$$M[f;\mathscr{G}]=\underset{x\in\mathscr{G}}{\text{l. u. b.}}\, f(x),$$

$$m[f;\mathscr{G}]=\underset{x\in\mathscr{G}}{\text{g. l. b.}}\, f(x),$$

$$\omega[f;\mathscr{G}]=M[f;\mathscr{G}]-m[f;\mathscr{G}].$$

(因此，除去现在我们不需要$\mathscr{G}$是开集以外，$\omega[f;\mathscr{G}]$的定义和 5.6B 中完全一样.)若 a 是$\mathscr{G}$中一点，我们定义 $\omega[f;a]$为

$$\omega[f;a]=\text{g. l. b. }\omega[f;J],$$

这里的 g. l. b. 是在$\mathscr{G}$的满足 $a\in J$ 的所有开子区间 J 上取的.* (这一点也和 5.6B 一致.)

7.2B. **定义** 所谓闭有界区间$[a,b]$的一个剖分，是指$[a,b]$的一个有限子集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，它满足 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 若 σ 和 τ 是$[a,b]$的两个剖分，我们称 τ 是 σ 的加细，如果 $\sigma\subset\tau$. (这就是说，τ 是 σ 的加细，是指在剖分 σ 中增加更多的"分点"便可得到剖分 τ.")

若 $\sigma=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是$[a,b]$的一个剖分，则称闭区间 $I_1=[x_0,x_1]$, $I_2=[x_1,x_2]$, $\cdots$, $I_n=[x_{n-1},x_n]$为 σ 的支区间.

7.2C. **定义** 设 f 为闭有界区间$[a,b]$上的有界函数，并设 σ 为$[a,b]$的任一剖分. 我们定义 $U[f;\sigma]$为**

$$U[f;\sigma]=\sum_{k=1}^{n}M[f;I_k]\cdot|I_k|,$$

它叫做 f 对应于 σ 的上和，此处 $I_1,\cdots,I_n$ 是 σ 的支区间. 同样，定义下和 $L[f;\sigma]$为

---

* 例如我们记得，$\left[0,\frac{1}{2}\right)$是$[0,1]$的一个开子区间.

** 对于任意的有界区间 J, $|J|$表示 J 的长度.

$$L[f;\sigma]=\sum_{k=1}^{n}m[f;I_k]\cdot|I_k|.$$

显然,$U[f;\sigma]\geqslant L[f;\sigma]$.注意若 f 在$[a,b]$上连续并有非负值,则 $U[f;\alpha]$是 n 个矩形面积的和,每一矩形以一个 I_k 为底,它的高等于 $\max\limits_{x\in I_k}f(x)$.这就是说,$U[f;\alpha]$是微积分教科书中所述的"外接矩形"面积之和.同样地,$L[f;\alpha]$是"内接矩形"面积之和.这一几何解释使得下列结果看来确应为真.(至少对连续函数来说是如此.)

7.2D. 引理　设 f 为$[a,b]$上的有界函数.则 f 的每一上和大于或等于 f 的每一下和.即如果 σ 和 τ 是$[a,b]$的任意两个剖分,则 $U[f;\sigma]\geqslant L[f;\tau]$.

证: 我们将证明,如果 σ^* 是 σ 的任一加细,则

$$U[f;\sigma]\geqslant U[f;\sigma^*].\tag{1}$$

对此,只要证明σ^* 是从 σ 只加上一个剖分点以后得到的情况就够了.(因为以后就能应用归纳法.)因此我们可以假定σ 有支区间 $I_1,\cdots,I_k,\cdots,I_n$,而 σ^* 有支区间 $I_1,\cdots,I_k^*,I_k^{**},\cdots,I_n$,此处 $I_k=I_k^*\cup I_k^{**}$ 且 $|I_k|=|I_k^*|+|I_k^{**}|$.由于 $I_k^*\subset I_k$,我们有 $M[f;I_k^*]\leqslant M[f;I_k]$.同样地,$M[f;I_k^{**}]\leqslant M[f;I_k]$.因此

$$U[f;\sigma^*]=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}M[f;I_j]\cdot|I_j|+M[f;I_k^*]\cdot|I_k^*|$$

$$+M[f;I_k^{**}]\cdot|I_k^{**}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}M[f;I_j]\cdot|I_j|$$

$$+M[f;I_k](|I_k^*|+|I_k^{**}|)=U[f;\sigma].$$

这就证明了(1)式.同样,若 τ^* 是 τ 的任一加细,可以证明

$$L[f;\tau]\leqslant L[f;\tau^*].\tag{2}$$

但由于 $\sigma\cup\tau$ 是 σ 和 τ 二者的加细,从(1)和(2)式即可推得

$$U[f;\sigma]\geqslant U[f;\sigma\cup\tau]\geqslant L[f;\sigma\cup\tau]\geqslant L[f;\tau].$$

引理得证.

7.2E. 根据上述引理可以推得

$$\text{g.l.b.}\,U[f;\sigma]\geqslant \text{l.u.b.}\,L[f;\sigma] \tag{1}$$

这里的 g.l.b. 和 l.u.b. 都是在$[a,b]$的所有剖分σ上取的. 因为如果τ是$[a,b]$的任一剖分, 则上述引理证明了$L[f;\tau]$是所有上和$U[f;\sigma]$的集的一个下界. 因而对每一剖分τ,

$$L[f;\tau]\leqslant \text{g.l.b.}\,U[f;\sigma].$$

但这就是说 g.l.b.$U[f;\sigma]$是所有下和$L[f;\tau]$的集的一个上界. 因而

$$\underset{\tau}{\text{l.u.b.}}\,L[f;\tau]\leqslant \underset{\sigma}{\text{g.l.b.}}\,U[f;\sigma]$$

这和(1)式等价. 不等式(1)指出了函数的上积分和下积分之间的一个重要关系.

定义 设f是闭有界区间$[a,b]$上的有界函数, 我们定义f在$[a,b]$上的上积分

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

为

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\text{g.l.b.}\,U[f;\sigma],$$

这里的 g.l.b. 是在$[a,b]$的所有剖分σ上取的. 类似地, 我们定义f在$[a,b]$上的下积分

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

为

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\text{l.u.b.}\,L[f;\sigma].$$

为简单计, 有时我们把f的上积分和下积分表示成

$$\underline{\int_a^b} f \quad 和 \quad \underline{\int_a^b} f.$$

注意，这里我们并未对单个的 dx 赋予任何意义．从不等式(1)我们看到，

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f. \tag{2}$$

我们不久将证明对于连续函数 f(以及某些其它函数)来说，

$$\underline{\int_a^b} f \quad 和 \quad \overline{\int_a^b} f$$

相等．然而，存在这样的 f，使得

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f.$$

例如，若 χ 是[0, 1]中有理数的特征函数，则对任一区间 $J\subset[0,1]$，

$$M[\chi, J]=1, \quad m[\chi, J]=0.$$

因此，对于任一剖分 σ，我们有 $U[\chi;\ \sigma]=1$，$L[\chi;\sigma]=0$．由此推得

$$\underline{\int_0^1} \chi=0, \quad 但 \quad \overline{\int_0^1} \chi=1.$$

7.2F．定义 若 f 是闭有界区间$[a,\ b]$上的有界函数，我们称 f 在$[a,b]$上是黎曼可积的，如果

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

此时我们定义 $\int_a^b f(x)dx$(或 $\int_a^b f$)为

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

我们用 $\mathscr{R}[a,b]$表示$[a,b]$上所有黎曼可积的函数 f 的类．

例如，7.2E 中的函数 χ 在[0, 1]上不是黎曼可积的．另一方面，在闭有界区间$[a,b]$上的任一常函数显然在$[a,b]$上是黎曼可

积的．下一节我们将明确说明哪些函数属于$\mathscr{R}[a, b]$．下列定理将是有用的．

7.2G. **定理** 设 f 是闭有界区间$[a,b]$上的有界函数．则当且仅当对每一 $\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$的一个剖分 σ, 使得

$$U[f;\sigma]<L[f;\sigma]+\varepsilon \tag{1}$$

时，才有 $f\in\mathscr{R}[a,b]$．

证: 首先假定对给定 $\varepsilon>0$, 存在 σ 使得(1)式成立．于是由于

$$\overline{\int_a^b} f\leqslant U[f;\sigma] \qquad \text{和} \qquad \underline{\int_a^b} f\geqslant L[f;\sigma],$$

我们有

$$\overline{\int_a^b} f<\underline{\int_a^b} f+\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，故可推得

$$\overline{\int_a^b} f\leqslant\underline{\int_a^b} f,$$

因而根据 7.2E 中的(2)式，

$$\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f.$$

这就证明了 $f\in\mathscr{R}[a,b]$．

反之，假定 $f\in\mathscr{R}[a,b]$．于是

$$\overline{\int_a^b} f=\underset{\sigma}{\text{g.l.b.}}\, U[f;\sigma]=\underset{\tau}{\text{l.u.b.}}\, L[f;\tau]=\underline{\int_a^b} f.$$

给定 $\varepsilon>0$, 我们可以(由 g.l.b. 的定义)选取一个剖分 σ, 使得

$$\overline{\int_a^b} f+\frac{\varepsilon}{2}>U[f;\sigma].$$

类似地，我们可以选取一个剖分 τ, 使得

$$\underline{\int_a^b} f-\frac{\varepsilon}{2}<L[f;\tau].$$

因此,

$$L[f;\tau]+\frac{\varepsilon}{2}>U[f;\sigma]-\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是由 7.2D 的(1)和(2)式, 我们有

$$L[f;\sigma\cup\tau]+\frac{\varepsilon}{2}>U[f;\sigma\cup\tau]-\frac{\varepsilon}{2}.$$

此即(1)式(以 $\sigma\cup\tau$ 代替 σ).

习题 7.2

1. 设 $f(x)=x\,(0\leqslant x\leqslant 1)$. 设 σ 为 $[0,1]$ 的剖分 $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$. 计算 $U[f;\sigma]$ 和 $L[f;\sigma]$.
2. 对于每一 $n\in I$, 设 σ_n 为 $[0,1]$ 的剖分 $\{0,1/n,2/n,\cdots,n/n\}$. 试对上题中的函数 f 计算
$$\lim_{n\to\infty}U[f;\sigma_n].$$
3. 对于上题中的 σ_n, 试就函数 $f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 计算
$$\lim_{n\to\infty}L[f;\sigma_n].$$
[要用到公式
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad(n\in I).]$$
4. 若 $f\in\mathscr{R}[0,1]$, $\sigma_n=\{0,1/n,2/n,\cdots,n/n\}$, 并有
$$\lim_{n\to\infty}U[f;\sigma_n]=\lim_{n\to\infty}L[f;\sigma_n]=A.$$
证明: $\int_0^1 f(x)dx=A$.
5. 对于 $f(x)=\sin x\,(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$ 和 $\sigma_n=\{0,\pi/2n,2\pi/2n,\cdots,n\pi/2n\}$, 计算 $U[f;\sigma_n]$.
利用 3.8D 中的恒等式(令 $x=\pi/2n$)证明
$$U[f;\sigma_n]=\frac{\pi/4n}{\sin(\pi/4n)}\left[\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)\right],$$
然后证明:
$$\lim_{n\to\infty}U[f;\sigma_n]=\cos 0-\cos\frac{\pi}{2}=1.$$

6. 设 f 为$[a,b]$上的连续函数. 补充下列证明 $f\in\mathscr{R}[a,b]$的细节.

(a) 函数 f 在$[a,b]$上一致连续.

(b) 给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\qquad(|x-y|<\delta;\ x,y\in[a,b]).$$

(c) 对于这个 $\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$的一个剖分 σ, 满足: 若 I_k 是 σ 的任一支区间, 则

$$M[f;I_k]-m[f;I_k]<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

(d) 对于这个 σ,

$$U[f;\sigma]-L[f;\sigma]<\varepsilon.$$

(e) 所以 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

7. 若 f 在 $[0,1]$ 上连续, $\sigma_n=\{0,\ 1/n,\ 2/n,\cdots,\ n/n\}$, 并且 x_k^* 是区间 $[(k-1)/n,k/n]$ $(k=1,\cdots,n)$ 中的任意一点, 试证:

$$L[f;\sigma_n]\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\leqslant U[f;\sigma_n].$$

然后证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)=\int_0^1 f.$$

(这一结果在初等微积分中多次用到.) (提示: 利用 f 的一致连续性证明, 对于大的 n,

$$U[f;\sigma_n]-L[f;\sigma_n]<\varepsilon.$$

再推断对于大的 n,

$$U[f;\sigma_n]-\int_0^1 f<\varepsilon,$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}U[f;\sigma_n]=\int_0^1 f.$$

同样地, 证明

$$\lim_{n\to\infty}L[f;\sigma_n]=\int_0^1 f.\ )$$

8. 若 f 在$[0,1]$上连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f.$$

9. 求下列极限值:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{3/n}+e^{6/n}+\cdots+e^{3n/n})$.

10. 证明: 对于"区间"$[a, a]$上的任意函数 f, $\int_a^a f=0$.

11. 判断下列命题真还是不真: 若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(g)dg.$$

§7.3 黎曼积分的存在性

7.3A. 定理 设 f 为闭有界区间$[a, b]$上的有界函数, 则当且仅当 f 在$[a,b]$中的几乎每一点连续时, 才有 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

证: 首先假定 $f\in\mathscr{R}[a,b]$. 我们希望证明, 在$[a,b]$中使得 f 不连续的点的集 E 测度为零. 由5.6C, 当且仅当 $\omega[f;x]>0$ 时, 才有 $x\in E$. 因此, $E=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m$, 此处 E_m 是满足 $\omega[f;x]\geqslant 1/m$ 的所有 $x\in[a,b]$的集. 要证明 E 的测度为零, 据 7.1B, 只要证明每一 E_m 的测度为零就够了. 现在我们就来证明这一点.

固定 m. 由于 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, 给定 $\varepsilon>0$, 由 7.2G, 存在$[a,b]$的一个剖分 σ, 使得 $U[f;\sigma]-L[f;\sigma]<\varepsilon/2m$. 因此如果 I_1, $\cdots$, I_n 是 σ 的(闭)支区间, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega[f;I_k]\cdot|I_k|=\sum_{k=1}^{n}M[f;I_k]\cdot|I_k|-\sum_{k=1}^{n}m[f;I_k]\cdot|I_k|$$
$$=U[f;\sigma]-L[f;\sigma].$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega[f;I_k]\cdot|I_k|<\frac{\varepsilon}{2m}. \tag{1}$$

现设 $E_m=E_m^*\cup E_m^{**}$，此处 E_m^* 是 E_m 中属于剖分 σ 的点构成的集，而 $E_m^{**}=E_m-E_m^*$. 显然，$E_m^*\subset J_1\cup\cdots\cup J_p$，此处 J_i 是满足 $|J_1|+\cdots+|J_p|<\varepsilon/2$(因为只有有限多个属于剖分的点)的开子区间. 但是如果 $x\in E_m^{**}$，则 x 是某个 I_k 的一个内点. 因此，$\omega[f;I_k]\geqslant\omega[f;x]\geqslant 1/m$. 如果我们用

$$I_{k_1},\cdots,I_{k_r}$$

表示那些包含 E_m^{**} 的点(于其内部)的 σ 的支区间，我们有

$$\frac{1}{m}(|I_{k_1}|+\cdots+|I_{k_r}|)\leqslant\omega[f;I_{k_1}]\cdot|I_{k_1}|+\cdots$$
$$+\omega[f;I_{k_r}]\cdot|I_{k_r}|.$$

因此由(1)式，

$$\frac{1}{m}(|I_{k_1}|+\cdots+|I_{k_r}|)<\frac{\varepsilon}{2m},$$

$$|I_{k_1}|+\cdots+|I_{k_r}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 E_m^{**} 被 $I_{k_1},\cdots,I_{k_r}$ 的内部所覆盖，并且由于 E_m^* 被 $J_1,\cdots,J_p$ 所覆盖，由此推得 $E_m=E_m^*\cup E_m^{**}$ 的测度为零，这就是我们想要证明的.

为了证明其逆，我们需要一条引理.

引理 若对于闭有界区间 J 中的每一点 x，$\omega[f;x]<a$，则有一个 J 的剖分 τ 满足

$$U[f;\tau]-L[f;\tau]<a|J|. \tag{2}$$

证: 对于每一 $x\in J$，有一个包含 x 的开子区间 I_x 满足 $\omega[f;\bar{I}_x]<a$. 由于 J 是紧集，所以有限多个这样的 I_x 就能覆盖 J (由6.5G). 设 τ 为这些 I_x 的端点的集. 若 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 是 τ 的支

区间，我们有 $\omega[f;I_k]<\alpha(k=1,\cdots,n)$，因而容易推得(2)式.

现在让我们假定 f 在$[a,\ b]$上几乎每一点连续. 我们希望证明 $f\in\mathscr{R}[a,b]$. 给定 $\varepsilon>0$，选取 $m\in I$，使得 $(b-a)/m<\varepsilon/2$. 若 E_m 的定义象证明第一部分一样，则根据假定，E_m 的测度为零. 因此 $E_m\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，此处每一 I_n 是$[a,b]$的一个开子区间，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\frac{\varepsilon}{2\omega[f;[a,b]]}.^{*}$$

但是由 5.6D，E_m 在 R^1 中是闭的. 从而 E_m 是$[a,\ b]$的一个闭子集，因而是紧的. 所以有有限多个 I_n——例如说 $I_{n_1},\ \cdots,I_{n_k}$——覆盖了 E_m. 因为

$$[a,b]-(I_{n_1}\cup\cdots\cup I_{n_k})$$

是闭区间 $J_1,\cdots,J_p$ 的并. 这就是说，

$$[a,b]=I_{n_1}\cup\cdots\cup I_{n_k}\cup J_1\cup\cdots\cup J_p.$$

由于没有一个区间 $J_i(i=1,\cdots,\ p)$包含 E_m 中的点，因此根据引理，存在 J_i 的一个剖分 τ_i 满足 $U[f;\tau_i]-L[f;\tau_i]<|J_i|/m$. 现在定义$[a,\ b]$的剖分 σ 为 $\sigma=\tau_1\cup\cdots\cup\tau_p$. 于是 σ 的支区间是 $\tau_1,\cdots,\tau_p$ 的支区间再加上 $\bar{I}_{n_1},\cdots,\bar{I}_{n_k}$. 从而

$$U[f;\sigma]-L[f;\sigma]=\sum_{i=1}^{p}\{U[f;\tau_i]-L[f;\tau_i]\}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\{M[f;\bar{I}_{n_i}]-m[f;\bar{I}_{n_i}]\}|\bar{I}_{n_i}|<\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{p}|J_i|$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\omega[f;\bar{I}_{n_i}]\cdot|\bar{I}_{n_i}|\leqslant\frac{b-a}{m}+\omega[f;[a,b]]\sum_{i=1}^{k}|I_{n_i}|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\omega[f;[a,\ b]]\cdot\frac{\varepsilon}{2\omega[f;[a,b]]}=\varepsilon.$$

---

* 我们可以假定 $\omega[f;[a,b]]>0$.