高等学校教材

数学物理方法

（第三版）

梁昆淼　编

高等教育出版社

高等学校教材

数学物理方法

（第三版）

梁昆淼　编
刘　法　缪国庆　修订

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/梁昆淼编. —3版(修订本). —北京:
高等教育出版社,1998
ISBN 7-04-005906-1

Ⅰ.数… Ⅱ.梁… Ⅲ.数学物理方法 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第02240号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京朝阳北苑印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数 440 000
1960年6月第1版
1998年6月第3版 1998年6月第1次印刷
印数 0 001—13 066
定价 16.10元

内容简介

本书系在第二版的基础上，根据当前的教学实际修订而成的. 全书包括复变函数论、数学物理方程两部分，以数学物理中的偏微分方程定解问题的建立和求解为中心. 本书保持了前两版数学紧密联系物理、讲解流畅的特点，并对内容作了适度精简.

本书可作为综合大学、高等师范院校物理类各专业"数学物理方法"课程的教材，亦可供高等工科院校有关专业选用.

第三版序言

本书第二版面世业已十多年.在这十多年里,物理类各专业"数学物理方法"课程的教学要求和学时数发生了变化.针对这一情况,特约请刘法、缪国庆副教授对本书进行修订.他们两位多年来分别在南京大学物理系和电子系讲授数学物理方法.

前两版数学紧密联系物理、讲解流畅的特点,在这次修订中力求延续下来.

不少学校的"高等数学"课程已讲述了傅里叶级数.因此,在这一版中,"傅里叶级数和傅里叶积分"不再单独作为一篇,而在"复变函数论"篇下设"傅里叶变换"章,与"拉普拉斯变换"章并列."傅里叶变换"章以傅里叶级数的概述作为起始的一步,未曾学过傅里叶级数的读者也可通过此概述掌握它.

格林函数方法原来分散在两处,此次修订将它集中到专门的一章之中.

为了适应不同的专业要求和不同的学时数,我们把某些可选讲的内容加上标记*或用小字排印.原来的想法是首先考虑精简小字排印内容,进一步精简可考虑标有*的内容.不过,事实上很难区分得如此清楚,而且归根结底,只有任教的老师才能决定怎样的精简最适合他(她)的学生.

此次修订还修改了个别地方的提法、讲法,精简了某些过多的例题,删除了附录中关系不很密切的部分.

修订工作的具体分工是,缪国庆负责第1～6章和第12～15章,刘法负责第7～10章,我和刘法共同负责第11章.修订过程中三人多次集体讨论.

修订稿承武汉大学梁家宝先生提出许多宝贵意见,特此致谢.本书第一、二版也得到过许多先生的宝贵意见和帮助,我愿藉此机

会一并表示感谢.

本书的不妥当处以及错误缺点,切盼读者诸君批评指正.

梁昆淼谨识

1995年7月

第二版序言(摘录)

这一版,调整并增加了较多的例题,还配置了习题,附录的篇幅也有较多增加.为了顾及物理各专业,某些章节的例子、例题、习题涉及的面较广,数量也多了一些,教学中可根据实际情况加以挑选.习题答案,虽经核算,由于时间匆促,仍然难免有误.

1978年6月

第一版序言(摘录)

本书是为综合大学物理专业编写的.它包含三个部分:复变函数论、傅里叶展开和数学物理方程.

对于物理专业来说,我们认为,“数学物理方法”不宜单纯作为数学课程来进行讲授与学习.它既是数学课程,又是物理课程.在这样一门课程中,固然不应该将数学的谨严性弃置不顾,另一方面却也不宜在数学谨严上作过多的要求.虽然在复变函数、傅里叶展开和数学物理方程方面已有不少著名的优秀专门著作,我们仍然感到,在数学理论上不花费过多力量,以鲜明的思路引导读者迅速掌握这些数学工具并应用于物理问题,这样一份教材还是很需要的.本书就以此作为努力目标.

第一篇复变函数论,除基本原理外,着重谈到共轭调和函数、留数定理、拉普拉斯变换等方面的应用.

第二篇傅里叶展开是为第三篇数学物理方程的分离变数法作准备的.当然,傅里叶展开的应用并不限于分离变数法,它是分析许多物理过程的有力工具.

第三篇数学物理方程是全书的中心内容.它研究各种各样的物理过程.其第一个环节在于将物理问题“翻译”为数学问题,一般往往没有加以重视,本书加强了这一环节.其第二个环节则是求解从物理问题翻译出来的数学问题.在各种解法中,本书突出了最基本的重要方法——分离变数法,系统地讨论了各种不同情况下如何运用分离变数法.我们认为,这样有利于学生熟练地用分离变数法去解数学物理问题.特别是特殊函数与分离变数法熔为一体,从分离变数法引起特殊函数,研究了特殊函数之后又回到分离变数法.在特殊函数的教学中,目的性比较鲜明,也有利于培养学生运用特殊函数解决问题的能力.

泛定方程为非齐次的情况下(强迫振动、有源的导热或扩散问题、有电荷的电场等),我们从物理的推理引出解题的线索,也是本书特色之一.

1959年10月

责任编辑　张　立
封面设计　王　喆
责任绘图　陈淑芳
版式设计　焦东立
责任校对　马静如
责任印制　宋克学

目　　录

第一篇　复变函数论

第二篇　数学物理方程

第一篇　复变函数论

第一章　复 变 函 数

§1.1　复数与复数运算

(一) 复数的基本概念

一个复数 z 总可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 $\mathrm{i}y$ 的和，

$$z=x+\mathrm{i}y, \tag{1.1.1}$$

这叫作复数的**代数式**，x 和 y 则分别叫作该复数的**实部**和**虚部**，并分别记作 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$.

如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标(图 1-1)，复数 z 就跟平面上的点一一对应起来. 这个平面叫作**复数平面**，两个坐标轴分别叫作**实轴**和**虚轴**.

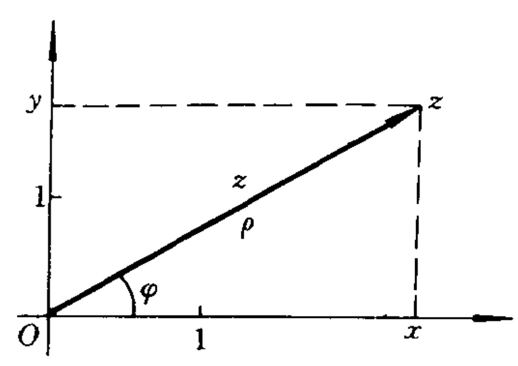

图 1-1

如果把 x 和 y 当作矢量的直角坐标分量(图 1-1)，复数 z 还可以用复数平面上的矢量来表示.

改用极坐标 ρ 和 φ(图 1-1)代替直角坐标 x 和 y，

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}(y/x);\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}\tag{1.1.2}$$

则复数 z 可表为**三角式**或**指数式**，即

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),\tag{1.1.3}$$

或

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.\tag{1.1.4}$$

ρ 叫作该复数的**模**，记作 $|z|$. φ 叫作该复数的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}z$.

一个复数的辐角值不能唯一地确定，可以取无穷多个值，并且彼此相差 2π 的整数倍. 通常约定，以 $\arg z$ 表示其中满足条件

$$0\leqslant \mathrm{Arg}z<2\pi$$

的一个特定值，并称 $\arg z$ 为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，或 z 的**主辐角**. 于是有

$$\varphi=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi.\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

复数"**零**"(即实部 x 和虚部 y 都等于零的复数)的辐角没有明确意义.

一个复数 z 的共轭复数 z^*，指的是对应的点对实轴的反映，即

$$z^*=x-\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}.\tag{1.1.5}$$

(二) 无限远点

前面我们将模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来，在复变函数论中，通常还将模为无限大的复数也跟复数平面上的一点相对应，并且称这一点为**无限远点**. 关于无限远点，可作如下理解. 把一个球放在复数平面上，球以南极 S 跟复数平面相切于原点，如图 1-2 所示. 在复数平面上任取一点 A，它与球的北极 N 的联线跟球面相交于 A'. 这样，复数平面上的有限远点跟球面上 N 以外的点一一对应了起来. 这种对应关系叫作**测地投影**，这个球叫作**复数球**，设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远移动，对应的点 A'就沿着一根子午线(经线)向北极 N 逼近. 如果 A 沿着另一根通过原点的直线向无限远移动，则 A'沿着另一根子午线向北极 N 逼近. 其实，不管 A 沿着什么样的曲线向无限

远移动，A'总是相应地沿着某种曲线逼近于 N. 因此，可以把平面上的无限远看作一点，即通过测地投影而跟复数球上北极 N 相应的那一点. 我们把无限远点记作∞，它的模为无限大，它的辐角则没有明确意义.

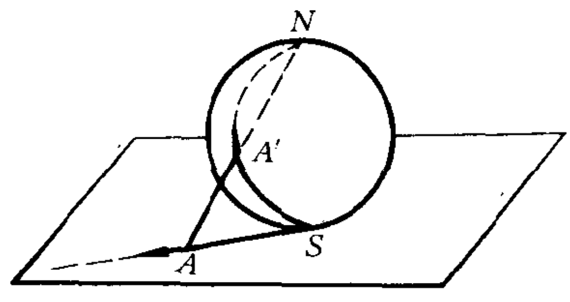

图 1-2

（三）复数的运算

现在再来说说复数的运算.

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的**和** z_1+z_2 的定义是

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2). \tag{1.1.6}$$

由此明显可见加法的**交换律**和**结合律**成立. 从对应的矢量来看，两个复数的和对应于两个矢量的合矢量. 从而可以知道

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.1.7}$$

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的**差** z_1-z_2 被定义为 z_1 与 $-z_2=-x_2-\mathrm{i}y_2$ 的和，即

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.1.8}$$

从而可以知道

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \tag{1.1.9}$$

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的**积** z_1z_2 的定义是

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.1.10}$$

从这个定义出发，很容易验证，乘法的**交换律**、**结合律**与**分配律**都成立. 这样，定义(1.1.10)可以理解为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=x_1x_2+\mathrm{i}y_1x_2+\mathrm{i}x_1y_2+\mathrm{i}^2y_1y_2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$