

高等学校教材

数学物理方法

(第三版)

梁昆森 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学物理方法

(第三版)

梁昆森 编

刘 法 缪国庆 修订

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/梁昆淼编. —3版(修订本). —北京:
高等教育出版社, 1998
ISBN 7-04-005906-1

I. 数… I. 梁… III. 数学物理方法 IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 02240 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京朝阳北苑印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数 440 000

1960 年 6 月第 1 版

1998 年 6 月第 3 版 1998 年 6 月第 1 次印刷

印数 0 001—13 066

定价 16.10 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

内 容 简 介

本书系在第二版的基础上,根据当前的教学实际修订而成的.全书包括复变函数论、数学物理方程两部分,以数学物理中的偏微分方程定解问题的建立和求解为中心.本书保持了前两版数学紧密联系物理、讲解流畅的特点,并对内容作了适度精简.

本书可作为综合大学、高等师范院校物理类专业“数学物理方法”课程的教材,亦可供高等工科院校有关专业选用.

第三版序言

本书第二版面世已十多年.在这十多年里,物理类专业“数学物理方法”课程的教学要求和学时数发生了变化.针对这一情况,特约请刘法、缪国庆副教授对本书进行修订.他们两位多年来分别在南京大学物理系和电子系讲授数学物理方法.

前两版数学紧密联系物理、讲解流畅的特点,在这次修订中力求延续下来.

不少学校的“高等数学”课程已讲述了傅里叶级数.因此,在这一版中,“傅里叶级数和傅里叶积分”不再单独作为一篇,而在“复变函数论”篇下设“傅里叶变换”章,与“拉普拉斯变换”章并列.“傅里叶变换”章以傅里叶级数的概述作为起始的一步,未曾学过傅里叶级数的读者也可通过此概述掌握它.

格林函数方法原来分散在两处,此次修订将它集中到专门的一章之中.

为了适应不同的专业要求和不同的学时数,我们把某些可选讲的内容加上标记*或用小字排印.原来的想法是首先考虑精简小字排印内容,进一步精简可考虑标有*的内容.不过,事实上很难区分得如此清楚,而且归根结底,只有任教的老师才能决定怎样的精简最适合他(她)的学生.

此次修订还修改了个别地方的提法、讲法,精简了某些过多的例题,删除了附录中关系不很密切的部分.

修订工作的具体分工是,缪国庆负责第1~6章和第12~15章,刘法负责第7~10章,我和刘法共同负责第11章.修订过程中三人多次集体讨论.

修订稿承武汉大学梁家宝先生提出许多宝贵意见,特此致谢.本书第一、二版也得到过许多先生的宝贵意见和帮助,我愿藉此机

会一并表示感谢。

本书的不妥当处以及错误缺点，切盼读者诸君批评指正。

梁昆森谨识

1995年7月

第二版序言(摘录)

这一版,调整并增加了较多的例题,还配置了习题,附录的篇幅也有较多增加.为了顾及物理各专业,某些章节的例子、例题、习题涉及的面较广,数量也多了一些,教学中可根据实际情况加以挑选.习题答案,虽经核算,由于时间匆促,仍然难免有误.

1978年6月

第一版序言(摘录)

本书是为综合大学物理专业编写的. 它包含三个部分: 复变函数论、傅里叶展开和数学物理方程.

对于物理专业来说, 我们认为, “数学物理方法”不宜单纯作为数学课程来进行讲授与学习. 它既是数学课程, 又是物理课程. 在这样一门课程中, 固然不应该将数学的谨严性弃置不顾, 另一方面却也不宜在数学谨严上作过多的要求. 虽然在复变函数、傅里叶展开和数学物理方程方面已有不少著名的优秀专门著作, 我们仍然感到, 在数学理论上不花费过多力量, 以鲜明的思路引导读者迅速掌握这些数学工具并应用于物理问题, 这样一份教材还是很需要的. 本书就以此作为努力目标.

第一篇复变函数论, 除基本原理外, 着重谈到共轭调和函数、留数定理、拉普拉斯变换等方面的应用.

第二篇傅里叶展开是为第三篇数学物理方程的分离变数法作准备的. 当然, 傅里叶展开的应用并不限于分离变数法, 它是分析许多物理过程的有力工具.

第三篇数学物理方程是全书的中心内容. 它研究各种各样的物理过程. 其第一个环节在于将物理问题“翻译”为数学问题, 一般往往没有加以重视, 本书加强了这一环节. 其第二个环节则是求解从物理问题翻译出来的数学问题. 在各种解法中, 本书突出了最基本的重要方法——分离变数法, 系统地讨论了各种不同情况下如何运用分离变数法. 我们认为, 这样有利于学生熟练地用分离变数法去解数学物理问题. 特别是特殊函数与分离变数法融为一体, 从分离变数法引起特殊函数, 研究了特殊函数之后又回到分离变数法. 在特殊函数的教学中, 目的性比较鲜明, 也有利于培养学生运用特殊函数解决问题的能力.

泛定方程为非齐次的情况下(强迫振动、有源的导热或扩散问题、有电荷的电场等),我们从物理的推理引出解题的线索,也是本书特色之一.

1959年10月

责任编辑	张立
封面设计	王喆
责任绘图	陈淑芳
版式设计	焦东立
责任校对	马静如
责任印制	宋克学

目 录

第一篇 复变函数论

第一章 复变函数	(1)
§ 1.1 复数与复数运算	(1)
§ 1.2 复变函数	(6)
§ 1.3 导数	(9)
§ 1.4 解析函数	(13)
§ 1.5 平面标量场	(18)
* § 1.6 多值函数	(23)
第二章 复变函数的积分	(28)
§ 2.1 复变函数的积分	(28)
§ 2.2 柯西定理	(30)
§ 2.3 不定积分	(33)
§ 2.4 柯西公式	(35)
第三章 幂级数展开	(40)
§ 3.1 复数项级数	(40)
§ 3.2 幂级数	(42)
§ 3.3 泰勒级数展开	(47)
§ 3.4 解析延拓	(52)
§ 3.5 洛朗级数展开	(54)
§ 3.6 孤立奇点的分类	(60)
第四章 留数定理	(65)
§ 4.1 留数定理	(65)
§ 4.2 应用留数定理计算实变函数定积分	(71)
* § 4.3 计算定积分的补充例题	(82)
第五章 傅里叶变换	(88)
§ 5.1 傅里叶级数	(88)

§ 5.2	傅里叶积分与傅里叶变换	(93)
§ 5.3	δ 函数	(104)
第六章	拉普拉斯变换	(114)
§ 6.1	符号法	(114)
§ 6.2	拉普拉斯变换	(115)
§ 6.3	拉普拉斯变换的反演	(122)
§ 6.4	应用例	(128)

第二篇 数学物理方程

第七章	数学物理定解问题	(133)
§ 7.1	数学物理方程的导出	(135)
§ 7.2	定解条件	(153)
§ 7.3	数学物理方程的分类	(161)
§ 7.4	达朗贝尔公式 定解问题	(170)
第八章	分离变数(傅里叶级数)法	(180)
§ 8.1	齐次方程的分离变数法	(180)
§ 8.2	非齐次振动方程和输运方程	(203)
§ 8.3	非齐次边界条件的处理	(216)
§ 8.4	泊松方程	(219)
§ 8.5	小结	(223)
第九章	二阶常微分方程级数解法 本征值问题	(226)
§ 9.1	特殊函数常微分方程	(226)
§ 9.2	常点邻域上的级数解法	(237)
§ 9.3	正则奇点邻域上的级数解法	(243)
§ 9.4	施图姆-刘维尔本征值问题	(261)
第十章	球函数	(273)
§ 10.1	轴对称球函数	(273)
§ 10.2	连带勒让德函数	(297)
§ 10.3	一般的球函数	(308)
第十一章	柱函数	(325)
§ 11.1	三类柱函数	(325)

§ 11.2	贝塞尔方程	(328)
§ 11.3	柱函数的渐近公式	(347)
§ 11.4	虚宗量贝塞尔方程	(355)
§ 11.5	球贝塞尔方程	(362)
* § 11.6	可化为贝塞尔方程的方程	(372)
第十二章	格林函数 解的积分公式	(374)
§ 12.1	泊松方程的格林函数法	(374)
§ 12.2	用电像法求格林函数	(381)
§ 12.3	含时间的格林函数	(388)
§ 12.4	用冲量定理法求格林函数	(391)
§ 12.5	推广的格林公式及其应用	(397)
第十三章	积分变换法	(406)
§ 13.1	傅里叶变换法	(406)
§ 13.2	拉普拉斯变换法	(418)
第十四章	保角变换法	(423)
§ 14.1	保角变换的基本性质	(423)
§ 14.2	某些常用的保角变换	(426)
第十五章	近似方法简介	(459)
§ 15.1	作为近似方法的变分法	(459)
§ 15.2	模拟法	(462)
§ 15.3	有限差分法	(462)
附 录	(468)
一、	傅里叶变换函数表	(468)
二、	拉普拉斯变换函数表	(471)
三、	高斯函数和误差函数	(474)
四、	勒让德方程的级数解(9.2.7)和(9.2.8)在 $x = \pm 1$ 发散	(475)
五、	连带勒让德函数	(476)
六、	贝塞尔函数表	(477)
七、	诺伊曼函数	(480)
八、	虚宗量贝塞尔函数 虚宗量汉克尔函数	(483)
九、	球贝塞尔函数	(484)

十、埃尔米特多项式	(487)
十一、拉盖尔多项式	(490)
十二、方程 $x + \eta \operatorname{tg} x = 0$ 的前六个根	(491)
十三、 Γ 函数(第二类欧拉积分)	(492)
习题答案	(499)
人名对照表	(529)

第一篇 复变函数论

第一章 复变函数

§ 1.1 复数与复数运算

(一) 复数的基本概念

一个复数 z 总可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 iy 的和,

$$z = x + iy, \quad (1.1.1)$$

这叫作复数的**代数式**, x 和 y 则分别叫作该复数的**实部**和**虚部**, 并分别记作 $\operatorname{Re}z$ 和 $\operatorname{Im}z$.

如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标(图 1-1), 复数 z 就跟平面上的点一一对应起来. 这个平面叫作**复数平面**, 两个坐标轴分别叫作**实轴**和**虚轴**.

如果把 x 和 y 当作矢量的直角坐标分量(图 1-1), 复数 z 还可以用复数平面上的矢量来表示.

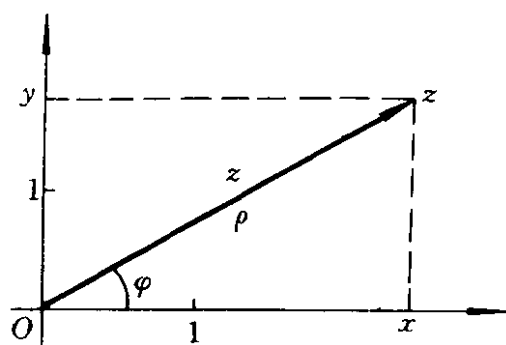


图 1-1

改用极坐标 ρ 和 φ (图 1-1)代替直角坐标 x 和 y ,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan(y/x); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

则复数 z 可表为三角式或指数式, 即

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1.1.3)$$

或
$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.1.4)$$

ρ 叫作该复数的模, 记作 $|z|$. φ 叫作该复数的辐角, 记作 $\text{Arg}z$.

一个复数的辐角值不能唯一地确定, 可以取无穷多个值, 并且彼此相差 2π 的整数倍. 通常约定, 以 $\arg z$ 表示其中满足条件

$$0 \leq \text{Arg}z < 2\pi$$

的一个特定值, 并称 $\arg z$ 为 $\text{Arg}z$ 的主值, 或 z 的主辐角. 于是有

$$\varphi = \text{Arg}z = \arg z + 2k\pi. \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

复数“零”(即实部 x 和虚部 y 都等于零的复数)的辐角没有明确意义.

一个复数 z 的共轭复数 z^* , 指的是对应的点对实轴的反映, 即

$$z^* = x - iy = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}. \quad (1.1.5)$$

(二) 无限远点

前面我们将模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来, 在复变函数论中, 通常还将模为无限大的复数也跟复数平面上的一点相对应, 并且称这一点为无限远点. 关于无限远点, 可作如下理解. 把一个球放在复数平面上, 球以南极 S 跟复数平面相切于原点, 如图 1-2 所示. 在复数平面上任取一点 A , 它与球的北极 N 的连线跟球面相交于 A' . 这样, 复数平面上的有限远点跟球面上 N 以外的点一一对应了起来. 这种对应关系叫作测地投影, 这个球叫作复数球, 设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远移动, 对应的点 A' 就沿着一根子午线(经线)向北极 N 逼近. 如果 A 沿着另一根通过原点的直线向无限远移动, 则 A' 沿着另一根子午线向北极 N 逼近. 其实, 不管 A 沿着什么样的曲线向无限

远移动, A' 总是相应地沿着某种曲线逼近于 N . 因此, 可以把平面上的无限远看作一点, 即通过测地投影而跟复数球上北极 N 相应的那一点. 我们把无限远点记作 ∞ , 它的模为无限大, 它的辐角则没有明确意义.

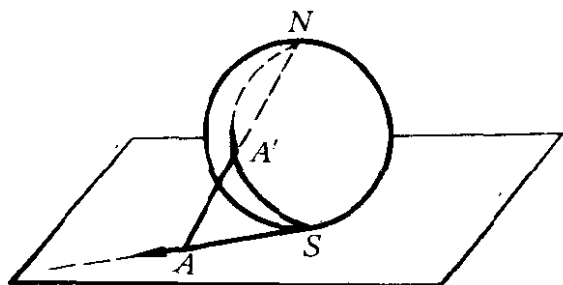


图 1-2

(三) 复数的运算

现在再来说说复数的运算.

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的和 $z_1 + z_2$ 的定义是

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.1.6)$$

由此明显可见加法的交换律和结合律成立. 从对应的矢量来看, 两个复数的和对应于两个矢量的合矢量. 从而可以知道

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.1.7)$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的差 $z_1 - z_2$ 被定义为 z_1 与 $-z_2 = -x_2 - iy_2$ 的和, 即

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.1.8)$$

从而可以知道

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|. \quad (1.1.9)$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的积 $z_1 z_2$ 的定义是

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.1.10)$$

从这个定义出发, 很容易验证, 乘法的交换律、结合律与分配律都成立. 这样, 定义(1.1.10)可以理解为

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$