

中国兵器工业
北京兵器出版社

931518·2

实验内弹道学

官汉章 邹瑞荣 编著



兵器工业出版社

1802

弹道学

荣 编著



兵器工业出版社

3 3 1 5 1 8 0 2

TJ 012.1-43

实验内弹道学⁰¹

官汉章 邹瑞荣 编著

HK35/16



兵器工业出版社



C0330517

内容简介

本书比较系统、全面地介绍内弹道测试技术基础及内弹道参数测试两部分内容。基础部分简要地讲述信号分析与处理基础知识和测试系统的基本特性；内弹道参数测试部分重点讲述膛内燃气压力、弹丸运动位移及速度、温度等参数的测试技术。本书还包括内弹道高速摄影和火药内弹道的静态分析等方面的章节。

本书可作为内弹道专业的教科书，并可供从事武器弹药科研、生产、试验的工程技术人员参考和使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

实验内弹道学/官汉章, 邹瑞荣编著. —北京: 兵器工业出版社, 1997. 7
ISBN 7-80132-134-0

I. 实… I. ②官… ③邹… II. 枪炮-内弹道试验-参数-测定 N. TJ012. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 01313 号

兵器工业出版社 出版发行

(北京市海淀区车道沟 10 号)

各地新华书店经销

北京怀柔燕文印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 17.25 字数: 416.52 千字

1997 年 7 月第 1 版 1997 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—1000 定价: 29.80 元

出版说明

遵照国务院国发[1978]23号文件精神,中国兵器工业总公司承担全国高等学校兵工类专业教材的规划、编审、出版的组织工作。自1983年兵总教材编审室成立以来,在广大教师的积极支持和努力下,在国防工业出版社、兵器工业出版社和北京理工大学出版社的积极配合下,已完成两轮兵工类专业教材的规划、编审、出版任务,共出版教材211种。这批教材出版对解决兵工专业教材有无问题、稳定教学秩序、促进教学改革、提高教学质量都起到了积极作用。

为了使兵工类专业教材更好地适应社会主义现代化建设需要,特别是国防现代化培养人才的需要,反映国防科技的先进水平,达到打好基础、精选内容、逐步更新、利于提高教学质量的要求,我们以提高教材质量为主线,完善编审制度、建立质量标准、明确岗位职责,制订了由主审人审查、责任编委复审和教编室审定等5个文件,并根据兵工类专业的特点,成立了十个专业教学指导委员会,以更好地编制兵工类专业教材建设规划,加强对教材的评审和研究工作。

为贯彻国家教委提出的“抓好重点教材,全面提高质量,适当发展品种,力争系统配套,完善管理制度,加强组织领导”的“八五”教材建设方针,兵总教材编审室在总结前两轮教材编审出版工作的基础上,于1991年制订了1991~1995年兵工类专业教材编写出版规划,共列入教材220种。这些教材都是从学校使用两遍以上、实践证明是比较好的讲义中遴选的。专业教学指导委员会从兵工专业教材建设的整体考虑对编写大纲进行了审查,认为符合兵工专业培养人才要求,符合国家出版方针。这批教材的出版必将为兵工专业教材的系列配套,为教学质量的提高、培养国防现代化人才,以及为促进兵工类专业科学技术的发展,都将起到积极的作用。

本教材由陈锦荣主审,经中国兵器工业总公司弹道专业教学指导委员会复查,兵总教材编审室张守中审定。

限于水平和经验,这批教材的编审出版难免有缺点和不足之处,希望使用本教材的单位和广大读者批评指正。

中国兵器工业总公司教材编审室

1996年4月

前 言

本书根据中国兵器工业总公司“八五”高校兵工专业教材规划进行编写,是兵工专业院校内弹道专业讲授内弹道测试技术课的专业教材。

本书共计八章。第一、二章是测试技术中必须熟悉的基础知识,包括信号分析与处理基础知识以及测量系统的特性;第三、四、五、六章是内弹道实验中的基本参量测试技术,包括膛内燃气压力、弹丸运动速度和运动规律以及膛壁、燃气流温度的测试原理、方法和仪器设备;第七章是内弹道高速摄影技术;第八章是火药内弹道的静态分析法。

本书的绪论和第四、五、六、八章由南京理工大学动力工程学院官汉章编写,第一、二、三、七章由南京理工大学动力工程学院邹瑞荣编写。南京理工大学机械工程学院陈锦荣同志负责主审,南京理工大学动力工程学院焦化南同志参加编审,兵器工业总公司教材编审室张守中同志负责审定。

本书在编写和出版过程中,得到兵器工业总公司教材编审室领导和有关同志的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢,并同时感谢主审、编审、审定等同志们的辛勤工作和帮助。

由于编者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,恳请各位专家、读者批评指正。

编著者

1996年3月于南京理工大学

绪 论

一、实验在内弹道学中的地位和作用

从内弹道学发展的历史,我们可以清楚地看到,内弹道学的发展与弹道试验的发展和进步是紧密相连的。

在1930年以前,由于膛压测量只依赖于铜柱法,因此,内弹道理论主要是从已知火炮和弹丸的某些特征量,以及从密闭爆发器实验得到的火药特征量来估算火炮的初速和最大膛压值。尽管当时在理论上也经常讨论膛内 $p-t$ 曲线问题,但只是没有实验的推测而已。这使当时内弹道理论的研究和发展受到了一定的影响。直到1930年左右,用压电测压法,能够完整地测得膛内 $p-t$ 曲线之后,内弹道理论开始以研究射击现象中整个时间过程为主,而不只是研究几个突出的弹道诸元的问题了。

随着新型实验设备和实验方法的诞生,内弹道理论也逐步走向深入。例如50年代和60年代微波干涉仪的出现,从而可以用实验方法测出弹丸在膛内的行程(l)—时间(t)曲线,70年代中期又应用激光速度干涉仪直接测得弹丸在膛内的 $v-t$ 曲线,这对弹丸在膛内的运动阻力研究提供了重要手段。此后,实验技术进一步发展,研制了弹丸内部各种信号的输出和遥测系统,如弹底压力测量、弹丸运动加速度测量等。与此同时,对膛内火药床在发射燃烧过程中的燃烧状况、运动规律等也可以通过放置放射源或用X射线照像等高速摄影法来获得需要的信息。通过这些手段把封闭在身管内部的、转瞬即逝的射击现象从多方面展现在我们面前,内弹道理论也随之取得了长足的进步,开始了研究射击时装药运动规律的新阶段。也就是在平衡态热力学基础上研究内弹道参量平均值变化规律的经典内弹道学,开始转向了以研究膛内弹道学参量分布值变化规律的近代内弹道学。

另一方面,在内弹道理论应用于弹道设计中,所需要的起始参量和符合系数都需要进行一定的弹道试验来获得,而且内弹道理论中的许多基本方程也是以实验为基础的唯一方程。例如描述火药燃烧的几何燃烧定律、燃烧速度定律、气体状态方程和传热方程等都是试验方程。因此,可以说任何一种内弹道理论都是建立在一定的内弹道试验基础之上的。

此外,目前在生产、验收和使用过程中,评价武器的性能优劣、鉴定武器生产是否合格、判断现装备和贮存的武器是否勤用等,其最基本的依据是内弹道试验结果。因此,各兵器研究单位、兵器生产工厂、国家鉴定单位等,都必须具备内弹道试验的手段和能力。

二、内弹道实验的特点和方法

在内弹道学中已经指出,射击现象和弹丸发射过程中,各参量具有量值高、变化幅度大和变化时间短的特点。如膛压、膛内温度、弹丸速度等,都是在几毫秒至十几毫秒的时间内由起始的零值变化为日常少见的很高量值,即通常所说的瞬态过程。这些单次变化剧烈的射击现象,给弹道试验带来一定的困难。从另一方面来说,这些过程的发生许多是在封闭的身管中进行的,这使得观察状态和获取数据都有很多不便之处。因此,内弹道试验所用的方法和手段有一定特殊的要求,如要求能克服身管的屏蔽障碍,能承受高温、高压、高加速度,要有宽的量程和良好的动态频率响应及快速综合处理数据的能力等。由于这些特点,形成了一套独特的弹道试验方法,逐渐形成了实验内弹道学这一门学科。而且随着弹道学的发展,近代内弹道实验的设

备和方法也在不断充实和提高。

内弹道实验方法通常可分为三类：

①机械方法 它是把被测物理量经过机械传递，利用机械运动和机械变形等把被测量记录下来。这种方法出现较早，应用比较简单可靠，但精度往往较差，同时也难于准确地记录信号变化的全过程。但此种方法在内弹道试验中目前仍占有重要地位，例如铜柱（铜球）测压法、弹道摆测推力等。

②非电量电测法 它是把被测物理量转换为电信号，通过记录和处理电信号与被测量的关系，获得快速变化过程的信息。这种方法十分适合于内弹道试验的需要。目前在膛压、膛内温度、弹丸加速度、速度等的测量中，已广泛应用。这种方法能够记录各种参量随时间的变化过程，而且精度较高。它主要是由把各种物理量转换为电量的传感器和信号放大器、记录装置、校准仪器及数据处理设备等部分组成。特别是近些年来数字记录存储设备和微机的应用，为内弹道试验中参量的录取和适时处理提供了有效的手段，大大提高了内弹道实验的可靠性和及时分析各种现象的能力。

③高速摄影法 这是观察在发射过程中炮口各种现象以至膛内各种现象最有效的方法。这种方法最初主要用在炮口各种现象的观察和研究上，观察所用光源有早期的火花隙光源，现在大多使用频闪光源或激光光源等。为了观察膛内的变化过程，有脉冲 X 光摄影法及采用透明身管的高速摄影法，也有人提出利用中子照像法等。这些方法目前都有所应用，但是这些方法都还受到某些条件的限制，使用还不够方便，有待进一步提高。

以上只是对内弹道实验中所用的方法进行了概括的介绍，它只反映了国内外近代内弹道实验的常规方法。近些年来，由于高压、高速火炮的发展和新型发射原理的应用和研究的需要，出现了一些更好的试验设备和方法，但由于这些目前还只是少量的研究应用，因此这里仅作一些简单介绍。

三、实验内弹道学的发展及趋势

1. 弹道装置

随着对火炮初速要求的提高，火炮膛压也越来越高，对一些弹道模拟试验装置的性能要求也大幅度提高。例如：以往测定火药示性数的密闭爆发器装置，常规要求耐压 400MPa 左右，70 年代以后该装置在国外已发展到耐压 2000MPa 以上，在国内此装置耐压已超过 1000MPa。此外，为了研究液体发射药的喷射、雾化状况，使用了开有观察窗的密闭爆发器和燃烧室等装置，国外还较广泛地应用激波管研究压力波的传播和对流换热条件下的火药燃烧规律。为了得到更接近炮膛真实情况下装药燃烧规律，使用了各种口径的弹道模拟器，较逼真地再现了射击时装药燃烧和运动情况。这些装置，不仅可提供我们所期望的某些特定环境，更重要的是可以进行弹道模拟，用小型试验代替大型试验，用静态方法代替动态方法，用较为节省的实验室试验代替实弹射击。

2. 测量系统

由于内弹道过程大都是在毫秒级的范围内，又具有高压、高速的特点，尤其近些年来已进一步深入要求研究内弹道过程中某一个时间间隔内所发生的现象，如要求剖析点火过程、挤进过程、炮口后效期等。这就对测试系统的频率响应、安装和使用条件提出了更高的要求。特别是在一些较新的测试领域，譬如弹底压力信号测量、弹丸加速度直接测量等，需要在弹丸上设置传感器系统，对这些装置既需要能进行正常的信号变换，又要求能承受较大的过载能力。随

着对武器系统要求的提高,这些装置都有待进一步研究和提高。此外,膛内温度参量的测试系统、膛内燃气流速度的测量装置等,目前都还存在一些问题,从测量原理到试验方法都需要进行进一步的探索和研究。

另外,静态、动态标定的问题也是近年来弹道工作者需要努力解决的问题之一。

3. 新领域的探索

随着弹道研究的深入,特别是随着物理气体动力学的发展,应用微观分析法来解释宏观气流参量的工作也在展开。因此弹道测试也开始使用诸如电子扫描显微镜、分析高能物质的质谱仪和各种分光仪等,以此研究火药燃烧过程、反应中间产物、燃烧中分子组成以及离子和自由基含量等问题。使用这些设备的方法和设置将是今后探索研究的一个重要方面。

4. 微机应用

近些年来微机的应用得到了迅速的发展,它除了能够对实验数据进行适时处理、控制测试系统有效可靠地进行试验之外,还能够通过建立弹道模型和实验数据的综合处理,建立新型研究对象的模拟演示,指导新型装备的弹道设计和研究。目前国内外在这方面都有所应用,对今后的弹道研究将起到较大的促进作用。

5. 靶场及其它设施

试验靶场是武器弹道性能检验的最终场所,尽管在研究阶段可以减少实弹射击,但它终究还是弹道试验的基本手段。因此,世界上兵器工业发达国家都建有一些著名靶场,靶场中的各种设施,如通信指挥、观察、测量和各种辅助设备需要不断更新,目前都在向更完备的自动控制的方向发展。

总而言之,弹道试验从历史上来看,一直在不断地发展。随着科学技术的进步和新型武器的需求,对各种弹道实验项目而言,一是完善、提高已有的试验项目,二是开拓、发展需求的试验内容,这是弹道工作者今后的一项重要任务。

目 录

绪论	(1)
第一章 信号分析与处理基础知识	(1)
第一节 信号的分类及描述	(1)
第二节 周期信号与离散频谱	(2)
一、傅里叶级数的三角函数展开式	(3)
二、傅里叶级数的复指数函数展开式	(4)
三、周期信号的强度描述	(6)
第三节 非周期信号与连续频谱	(8)
一、傅里叶变换	(8)
二、傅里叶变换的主要性质	(10)
三、几种典型信号的频谱	(13)
第四节 随机信号	(17)
一、概述	(17)
二、随机信号的主要特征参数	(18)
第五节 信号的数字化处理	(29)
一、信号数字化处理的基本步骤	(29)
二、数字信号的采样与量化	(30)
三、截断、泄漏和窗函数	(32)
四、离散傅里叶变换及其快速算法	(34)
第二章 测试系统的特性	(45)
第一节 概述	(45)
一、对测试系统的基本要求	(45)
二、线性系统及其主要性质	(45)
第二节 测试系统的静态特性	(47)
一、灵敏度	(47)
二、非线性度	(48)
三、回程差	(48)
四、重复性	(49)
第三节 测试系统的动态特性	(49)
一、传递函数	(50)
二、环节的串联和并联	(50)
三、频率响应函数	(51)
四、常见测试系统的传递函数及其频率响应特性	(52)
第四节 测试系统在典型输入下的动态响应	(55)
一、单位脉冲输入和测试系统的脉冲响应函数	(55)
二、一阶和二阶系统对几种典型输入响应	(57)

三、在任意输入作用下测试系统的响应.....	(61)
第五节 实现不失真测试的条件	(63)
第六节 测试系统动态特性的测试	(64)
一、用频率响应法求测试系统的动态特性.....	(64)
二、用阶跃响应法求测试系统的动态特性.....	(65)
第三章 塑性变形测压法	(68)
第一节 铜柱测压法	(68)
一、测压铜柱及铜柱测压器.....	(68)
二、测压铜柱的校准和铜柱压力表的编制.....	(70)
三、铜柱测压的压力换算方法.....	(73)
四、铜柱测压法的误差.....	(75)
五、铜柱变形量压力表的编制与应用.....	(79)
第二节 铜球测压法	(82)
一、测压铜球和铜球测压器.....	(82)
二、测压铜球的动态校准及压力表的编制.....	(83)
三、测压铜球温度影响的修正.....	(84)
第四章 弹性变形测压法	(85)
第一节 概述	(86)
一、应变电阻测压法.....	(86)
二、压电测压法.....	(86)
三、电容测压法.....	(87)
第二节 常用的压力传感器	(87)
一、压力传感器的组成及一般特性.....	(87)
二、应变电阻式压力传感器.....	(88)
三、压电式压力传感器	(100)
四、电容式压力传感器	(106)
五、压阻式压力传感器	(110)
六、传感器的选用原则	(113)
第三节 信号测量与放大.....	(114)
一、测量电桥	(114)
二、直流放大器	(121)
三、电荷放大器	(129)
四、调幅放大器	(130)
五、调频放大器	(132)
第四节 信号记录装置.....	(134)
一、磁带记录仪	(134)
二、瞬态记录仪	(138)
第五节 压力传感器及测量系统的标定.....	(141)
一、概述	(141)

二、静态压力标定	(142)
三、动态压力标定	(144)
第五章 弹丸速度的测量	(147)
第一节 概述	(147)
一、弹丸速度测量的意义	(147)
二、原理和方法	(147)
三、目前状况和前景	(150)
第二节 弹道段区截装置	(151)
一、通断靶	(151)
二、线圈靶	(152)
三、天幕靶	(155)
四、光电靶	(157)
五、误差及分析	(158)
第三节 测量仪器及初速测定	(163)
一、电子测时仪及初速测定	(163)
二、测速仪	(168)
三、炮口初速雷达	(171)
第四节 弹丸运动规律的测量	(172)
一、多普勒测速雷达的基本原理	(172)
二、多普勒测速雷达	(174)
三、内弹道测速雷达	(179)
四、激光速度干涉仪	(184)
第六章 温度测量	(186)
第一节 概述	(186)
一、测温技术的应用范围	(186)
二、温度测量中的基本要求	(186)
三、测温方法的分类	(188)
第二节 温度与温标	(188)
一、温度的概念	(188)
二、温标的概念及各类温标简介	(189)
第三节 热电偶测温	(190)
一、基本原理与结构	(190)
二、热电偶的主要特性	(197)
三、热电偶的分度与检定	(202)
四、测量线路与二次仪表	(204)
五、热电偶测温的应用技术	(206)
第四节 辐射法测温	(211)
一、基本概念和理论基础	(211)
二、光学高温计	(214)

三、光电高温计	(215)
四、全辐射高温计	(215)
五、部分辐射温度计	(216)
六、比色高温计	(218)
七、膛内燃气流温度测量	(220)
第七章 内弹道高速摄影	(222)
第一节 概述	(222)
一、高速摄影在内弹道测试中的应用	(222)
二、内弹道高速摄影的分类	(222)
第二节 闪光摄影	(223)
一、闪光摄影基本原理	(223)
二、闪光光源	(223)
三、闪光摄影快门	(225)
四、高速阴影和纹影技术	(227)
五、脉冲光源多幅摄影	(231)
第三节 脉冲 X 光摄影	(232)
一、X 射线的产生、吸收及性质	(232)
二、脉冲 X 光摄影系统	(235)
三、脉冲 X 光摄影的应用	(241)
第四节 中子摄影	(244)
一、常用中子源	(244)
二、中子摄影的一般原理和特性	(244)
第八章 火药内弹道参量的静态分析	(248)
第一节 概述	(248)
第二节 实验系统	(248)
第三节 火药力及火药气体余容的测定	(250)
一、火药力及火药气体余容的测定方法	(250)
二、压力损失的修正	(252)
三、测压误差对火药力和余容误差的影响	(255)
第四节 燃烧速度定律及压力全冲量的测定方法	(256)
一、燃烧速度定律的整理方法	(257)
二、压力全冲量的确定方法	(259)
第五节 火药烧蚀性的测量方法	(259)

第一章 信号分析与处理基础知识

在生产实践和科学实验中,需要观测大量的物理现象和参数的变化,而且往往是通过测量装置或仪器把待测的量变换成容易测量、记录和分析的物理量——电量,如电压、电流等。这些随时间而变化的物理量(电量)一般称作电信号。一个信号包含着反映被测物理系统的状态或特性的某些有用的信息。它是我们认识客观事物的内在规律、研究事物之间的相互关系、预测未来发展的依据,但是,在这些信号中也必然会夹杂一些无用的干扰因素。因此,只有对信号科学地进行分析与处理,才能去粗取精,去伪存真,从中获取尽可能多的反映客观事物规律的有用信息。这正是进行信号分析与处理的目的所在。

随着电子计算机技术的飞跃发展和普遍应用,信号分析与处理已形成一门新的学科,有许多专著论述可供参考。本章仅介绍信号分析与处理的一些基础知识。

第一节 信号的分类及描述

信号可以分为确定性信号和非确定性信号两大类。确定性信号是指可以用数学关系式或图表来明确描述其关系的信号。例如,集中参数的单自由度振动系统(图 1-1)作无阻尼自由振动时,其位移 $x(t)$ 就是确定性信号。它可以用下式来确定质量的瞬时精确位置:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right) \quad (1-1)$$

式中 x_0, φ_0 ——取决于初始条件的常数;

m ——质量;

k ——弹簧常数;

t ——时间。

另有一类信号具有随机特点,每次观测的结果都不相同,无法用数学式或图表描述其关系,更不能准确预测,只能用概率统计方法由过去估计未来。它们称为非确定性信号或随机信号。

确定性信号又可分为周期信号和非周期信号。随机信号又可分为平稳的和非平稳的两种。

各种信号在数学上可以表示为一个或几个独立变量的函数。信号的数学表示式中的独立变量可以是连续的,也可以是离散的。用连续变量的函数表示的信号称为连续(模拟)信号(图 1-2a)。在离散信号中,独立变量仅取离散值,或以离散图形表示,或以表格记录的数据形式表示,或以数字序列表示(图 1-2b)。

我们直接观测或记录的信号一般是随时间变化的物理量,即以时间作为独立变量,称为信号的时域描述。信号的时域描述只能反映信号的幅值随时间变化的特征,而不能明确揭示信号的频率组成成分。为了研究信号的频率结构和各频率成分的幅值大小,应对信号进行频谱分析,把时域信号通过分析变成频域信号,即对信号作频域描述。简单地说,时域描述是指描述信号的坐标图中横坐标为时间 t ,频域描述的横坐标则为频率 f (或圆频率 ω)。例如,周期方波可

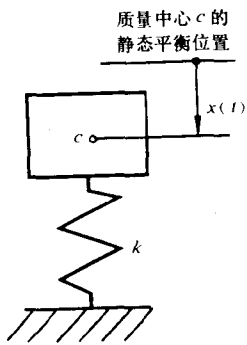


图 1-1 单自由度振动系统

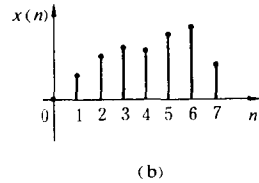
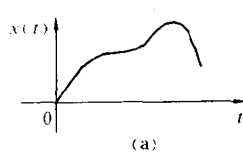


图 1-2 连续信号与离散信号
(a)连续信号; (b)离散信号

以看成是由一系列频率不等的正弦波叠加而成,图 1-3 表示了这一信号的时域和频域两种描述,以及其两者之间的联系。

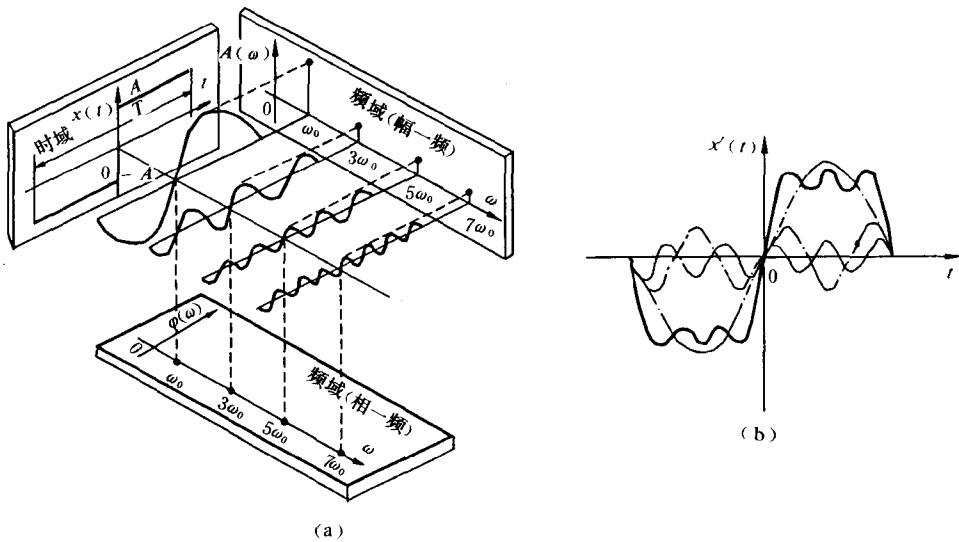


图 1-3 周期方波的描述
(a)时域、频域描述; (b)1,3,5次谐波叠加图形

第二节 周期信号与离散频谱

周期信号是经过一定的时间间隔重复出现的信号,可用周期性的时变函数来表示:

$$x(t) = x(t + nT) \quad (1-2)$$

式中 T ——重复周期(s);
 $n=1,2,3,\dots$ 。

一、傅里叶级数的三角函数展开式

在有限区间上,任何周期函数(信号) $x(t)$ 凡满足狄里赫利条件者都可以展开成傅里叶级数。傅里叶级数的三角函数展开式如下:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-3)$$

式中常值分量 $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (1-4a)$

余弦分量的幅值 $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1-4b)$

正弦分量的幅值 $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-4c)$

T ——周期;

ω_0 ——圆频率, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$;

$n=1, 2, 3, \dots$ 。

将式(1-3)中同频项合并,可以改写成

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1-5)$$

式中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

从式(1-5)可见,周期信号是由一个或几个、乃至无穷多个不同频率的谐波叠加而成。以圆频率为横坐标,幅值 A_n 或相角 φ_n 为纵坐标所作的图称为频谱图(见图 1-3), $A_n - \omega$ 图叫幅频谱, $\varphi_n - \omega$ 图叫相频谱。由于 n 是整数序列,相邻频率的间隔 $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,即各频率成分都是 ω_0 的整数倍,因而谱线是离散的。我们把 ω_0 称为基频,把 n 次倍频成分 $A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$ 称为 n 次谐波。

每一根谱线对应其中一种谐波。频谱就是构成信号 $x(t)$ 的各频率分量的集合。它完整地表示信号的频率结构。

例 1 求图 1-4 中周期性三角波的傅里叶级数。

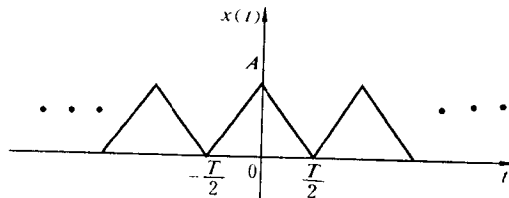


图 1-4 周期性三角波

解 在 $x(t)$ 的一个周期中可表示为

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T}t & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ A - \frac{2A}{T}t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

常值分量:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) dt = \frac{A}{2}$$

余弦分量的幅值:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4A}{n^2 \pi^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{4A}{n^2 \pi^2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

正弦分量的幅值:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

上式是因为 $x(t)$ 为偶函数, $\sin n\omega_0 t$ 为奇函数, 所以 $x(t) \sin n\omega_0 t$ 也为奇函数, 而奇函数积分一个周期之值等于零。这样, 该周期性三角波的傅里叶级数展开式为

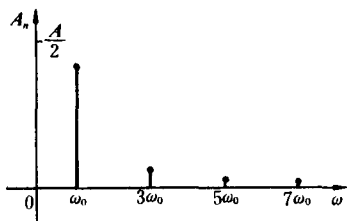


图 1-5 周期性三角波的频谱

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

周期性三角波的频谱图如图 1-5 所示, 其幅频谱只包含常值分量、基波和奇次谐波的频率分量。谐波的幅值以 $\frac{1}{n^2}$ 的

规律收敛。

二、傅里叶级数的复指数函数展开式

傅里叶级数也可以写成复指数函数形式。根据欧拉公式:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (1-6)$$

有

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \quad (1-7)$$

$$\sin \omega t = j \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \quad (1-8)$$

因此式(1-3)可改写为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} \right] \quad (1-9)$$

令 $C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (1-10a)$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (1-10b)$$

$$C_0 = a_0 \quad (1-10c)$$

则 $x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$

或 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-11)$

这就是傅里叶级数的复指数函数形式。将式(1-4)代入式(1-10a),即得

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1-12)$$

在一般情况下 C_n 是复数,可以写成

$$C_n = C_{nR} + jC_{nI} = |C_n|e^{j\varphi_n} \quad (1-13)$$

式中 $|C_n| = \sqrt{C_{nR}^2 + C_{nI}^2} \quad (1-14)$

$$\varphi_n = \arctg \frac{C_{nI}}{C_{nR}} \quad (1-15)$$

C_n 与 C_{-n} 共轭,即 $C_n = C_{-n}^*$; $\varphi_n = -\varphi_{-n}$ 。

因此把周期函数 $x(t)$ 展开成傅里叶级数后也可以分别以 C_n 的实部和虚部与频率的关系作图。在实、虚部频谱图中横坐标(圆频率 ω)是从 $-\infty \sim +\infty$,而不是单边的(ω 从 $0 \sim +\infty$)。与式(1-5)比较有 $|C_n| = \frac{A_n}{2}$,即其幅值为单边频谱的一半。

从式(1-11)和上述实、虚部频谱图上看圆频率 ω 可以出现负数。出现“负”的频率似不好理解,实际上角速度按其旋转方向可以有正有负,一个向量的实部可以看成是两个旋转方向相反的向量在其实轴上投影之和,而虚部则为其在虚轴上投影之差(图 1-6)。

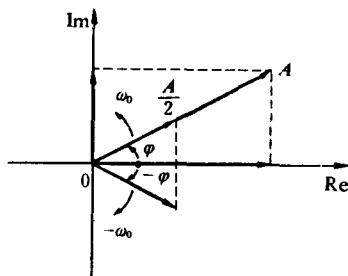


图 1-6 负频率的说明

例 2 画出余弦、正弦函数的实、虚部频谱图。

解 根据式(1-7)和(1-8)有

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})$$

$$\sin \omega t = j \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})$$

故余弦函数只有实频谱图,与纵轴偶对称;正弦函数只有虚频谱图,与纵轴奇对称。图 1-7 是这两个函数的频谱图。