

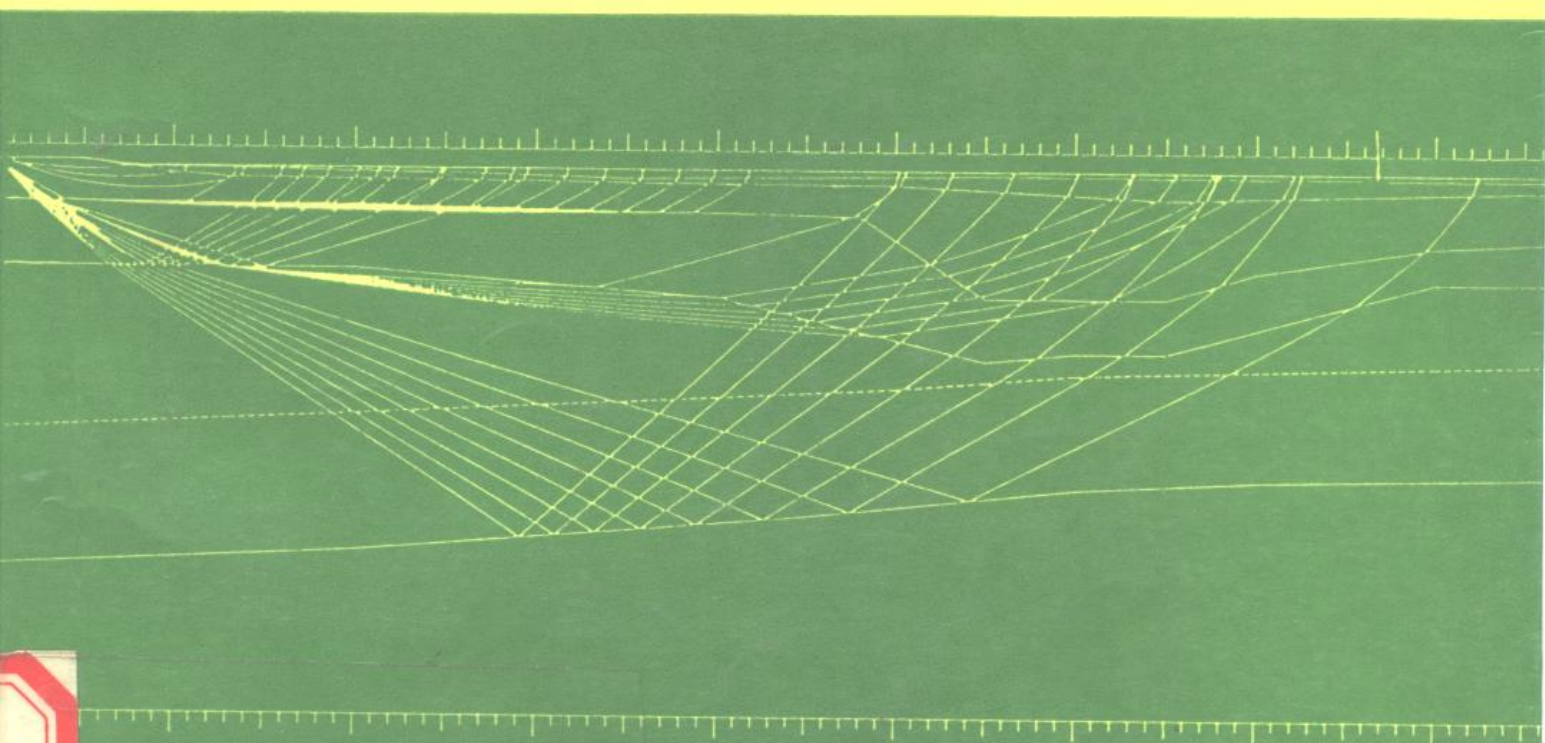
地震波的散射与衰减

(上)

吴如山 [美]安芝敬一 主编

李裕澈 卢寿德 等译

吴建春 刘 洪 校



地震出版社

地震波的散射与衰减 (上)

吴如山 [美]安艺敬一 主编

李裕澈 卢寿德 等 译

吴建春 刘 洪 校

地震出版社

1993

(京) 新登字 095 号

内 容 提 要

本书为《理论和应用地球物理》杂志的研究专集, 它汇集了地震波散射与衰减理论和实验研究领域最新成果的代表性论文。本书所论述的内容涉及岩石层和地幔非均匀性、地震前兆、油气勘探及油储圈划、地下核爆监测及强地面运动等研究领域。原书为三卷本, 中文版分上、下两册出版, 上册为基本理论方法和现状评述, 共收录了 19 篇有关专家的评述性论文。

本书可供地球物理、地震、物探、地质和工程方面的科研人员阅读, 也可作为地球物理专业大学生和研究生的参考教材。

地震波的散射与衰减

(上)

吴如山 [美]安艺敬一 主编

李裕澈 卢寿德 等 译

吴建春 刘 洪 校

责任编辑: 俸苏华 杨懋源

责任校对: 李 珩

*

地 震 出 版 社 出 版

北京民族学院南路 9 号 邮政编码 100081

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

787×1092 1/16 21 印张 535 千字

1993 年 12 月第一版 1993 年 12 月第一次印刷

印数 001—800

ISBN 7-5028-0926-0/P·575

(1319) 定价: 16.00 元

译 者 的 话

“地震波的散射与衰减”一书是由吴如山教授和安艺敬一教授选择的一批反映该领域最新进展的代表性论文编辑而成。根据吴如山教授的意见，该书的中文版在原英文版的基础上重新进行了选编，并分上、下两册出版。参加上册翻译工作的有：李裕澈、卢寿德、吴建春、张宏卫、孙福梁、韩斌、邢仁泽、熊扬武、赵颖姝、胡中华、章文波，吴建春对全书译稿进行了统稿和初校，刘洪负责全部译稿的二校工作。由于译者水平所限，译文中难免不确之处，敬请读者指正。

在本书的筹划、翻译、出版过程中，得到了吴如山、李幼铭、张先康、朱世龙、杨懋源、俸苏华等人的大力支持，王洋承担了上册译文文字的录入工作，在此一并表示感谢。

译 者

一九九三年九月十日于北京

中文版序

当上个世纪 80 年代初记录到第一张地震图时,地震学家对为什么会记到那样长期的持续振动感到非常困惑不解。这激发了人们对地震波在地球介质中的传播以及地震震源的性质进行广泛的研究,进而取得了长足的进展。自从发明长周期地震仪以后,地震学家对观察到的长周期地震图和弹性波在层状地球介质中传播理论之间的吻合感到非常满意。球对称的层状地球模型可以解释和预言许多观察到的长周期地震图的特征。表面波进而被用来修改和完善这种标准地球模型。人们似乎已把早期那种复杂的短周期地震图抛之脑后,或者干脆认为那些只是“背景噪声”而已。直到本世纪 60 年代,短周期地震图中可用的信息仍主要限于初至时间或从初至开始极短的一段波形。

人们在本世纪 60 年代末,看到第一张月震图时(由阿波罗飞船设置在月球表面的测震仪所记到),对那异乎寻常的震动持续时间(长达两至四个小时)又一次感到困惑。但地震学家很快发现这可以用月球介质的高度不均匀性和极低的吸收系数来解释。这些发现又促使人们对地球的复杂的短周期地震图进行反省,从而在地震界有力地推动了由安艺敬一先生开创的尾波研究。安艺先生早在他 1969 年的经典文章(Aki, 1969)中就提出了用地球介质的三维不均匀性对地震波的散射来解释尾波的形成。由此出发,我们就可以从由散射波组成的尾波中提取许多有用信息,并用来反推地壳和地幔中复杂不均匀体的特性。另一个激起人们对地震波散射研究兴趣的事件是由 Haddon (1972) 提出的用核幔边界附近的非均匀性对 PKP (穿过地幔的波) 的散射波来解释在影区中观测到的 PKIKP (穿过地幔及地核的波) 的前驱波(详见本书中 Bataille 等的文章)。这使人们认识到各种尺度的三维不均匀性不但存在于地壳和上地幔,而且也存在于下地幔(D'区)以及核幔边界上。

目前地震波散射已成为一个非常活跃的研究领域。从 80 年代初到 80 年代末,每年在各种学术刊物上发表的有关地震波散射的文章已翻了三番。关于该方面的研究也举行了多次国际讨论会。例如在第 25 届 IASPEI (国际地震和地球内部物理协会)大会上,“地震波的散射与衰减”讨论会共有 53 篇报告,成为仅次于地震预报(59 篇)和震源参数(55 篇)的第三大专题报告会(详见会议文集)。地震波散射所包括的领域很广。广义地说,任何由地球三维非均匀性引起的地震波的改变都可称为地震波散射。但传统上把那种能用几何光学理论(射线理论)处理的由大尺度非均匀性引起的走时和振幅变化等现象都摒除于散射领域之外。因此本书涉及的是较狭义的地震波散射现象,即由地球三维非均匀性引起的,超越几何光学领域的地震波场畸变现象。地震波散射所涉及的领域非常广泛且具有十分可观的应用前景。因为地球已被证明具有多级次的,多尺度的横向非均匀性;而这些各种尺度的非均匀性大多都处在人们最感兴趣的地方,越是不均匀,就越是使人感到兴趣。对地质和构造学来说,非均匀性意味着更多的地质和构造活动,例如板块俯冲、陆块碰撞、洋脊活动以及地幔对流的边界层等等。对油气和矿产勘探来说,非均匀性往往带来更大的兴趣和希望。不同尺度和不同组成的非均匀性会引起不同形式的地震波散射。反过

来我们也可从这些散射现象来反推这些非均匀性的分布和性质。近些年来，地震波散射的理论和方法已被用在地壳、地幔（特别是上地幔）及核幔边界处非均匀性分布的研究，以尾波特性在大地震前后变化为中心的地震前兆研究，油气勘探以及油储圈划研究，地下核爆监测中的路径效应研究，强地面运动幅度预测及台站场地效应研究，区分非弹性衰减和散射衰减的研究以及由微小尺度非均匀体散射引起的介质等效总体特性变化（包括等效频散及衰减，等效各向异性等）的研究等。虽然地震波散射在某些领域应用的研究已卓见成效，但总的来说它还是近十几年才有较大发展的较新的领域。因此在许多领域的应用才仅仅是开始，深度不够。目前地震波散射理论和方法的研究已有了一定基础，下一步需要结合在各方面的应用逐一突破，以把整个领域推向一个新的高度。同时要 and 地球物理，地学的其它领域和分支学科加强交流。现阶段正是传统的球对称层状地球模型经历剧烈变革和革命的时期。地震波散射是探测三维非均匀性的有力工具，我们期望它能在建立新的三维不均匀地球模型及研究地球内部动力学问题的过程中做出独特的贡献。

我们国内的同行也对这个新领域感到兴趣。事实上有不少中国人对这个领域的发展做出了贡献；安艺敬一教授和我共同主编了《Scattering and Attenuation of Seismic Waves》文集，并通过英文刊物——《Pure and Applied Geophysics》以三本专辑的形式于1988—1990年先后问世。借此中文版出版的机会，我们把原英文文集的文章次序做了调整和删节，改为上、下两册出版。有关基本理论方法以及现状评述的文章都被集中在上册，使它成为一种参考书和手册性质的专著。上册的文章都由国际上有关方面的专家撰写。为了能将一些最新研究成果也介绍给读者，我们还特地增写了一篇有关随机层析成象的评述文章，一并收入该册内。下册收入了经过选择的研究文章，它们代表了各方面的截止于1988年的最新研究成果。我们希望这样分册会有助于研究人员和学生查阅使用。

本书的出版得到傅承义先生的关心、鼓励和支持，并由李幼铭、吴建春等筹划组编而成，在此一并对他们表示感谢。

吴如山

一九九二年三月于圣克鲁斯

目 录

绪论：三维非均匀地球的地震波散射	吴如山, K. Aki (1)
------------------------	-------------------

弹性波散射理论与方法

含小尺度包体或裂纹的复合介质总体特性的推测	J. A. Hudson, L. Knopoff (6)
弹性波散射中的微扰法	吴如山 (29)
弹性波在随机介质中的散射与衰减	V. K. Varadan, Y. Ma, V. V. Varadan (58)
无损检测中的弹性波逆散射	J. H. Rose (78)

尾波理论与方法

研究随机非均匀岩石层中尾波激发和振幅衰减的统一方法	H. Sato (95)
多重散射与尾波包络的时域解	高龙生, 李松林 (119)
利用台阵和三分量处理方法研究尾波	A. M. Dainty (140)

地表及地层散射

近地表地震波散射	A. R. Levander (155)
地层滤波	J. R. Resnick (173)
Lg 波的传播与衰减特性	M. Campillo (184)

深部非均匀性引起的散射

台阵的透射起伏与地壳上地幔的非均匀性	吴如山, S. M. Flatté (198)
联合相干函数与透射波随机成象	谢小碧, 吴如山 (216)
由散射波所揭示的核幔边界附近的非均匀性	K. Bataille, 吴如山, S. M. Flatté (228)

波散射的数值模拟和实验室实验

地震波散射数值实验研究评述	A. Frankel (245)
随机非均匀性散射引起的弹性波衰减和空间起伏的实验室测量	K. Matsunami (278)

其它：有效各向异性，非线性，吸收机制

地壳中的 S 波散射	S. Crampin (291)
非线性情况下的地震波散射与耗散	A. V. Nikolaev (308)
粘弹性材料的衰减特性	M. Qaisar (319)

绪论：三维非均匀地球的地震波散射

吴如山 K. AKI

经典的球对称(或层状结构)地球模型正面临着一场挑战和变革。人们已发现,地球从地壳、地幔到地核,到处都存在横向非均匀性,而且这种非均匀性的尺度范围小至岩石的粒径、大到全球球谐函数的最低阶。图1给出了地球的地壳和地幔内非均匀性的强度和尺度, $\tilde{v}$ 表示地震波(P波或S波)速度微扰指数,其定义为测量区内波速的百分比变化均方根,由地震波揭示的非均匀性尺度(不包括实验室测量的岩石样品)的跨度为8个数量级。这些不同量级的非均匀性对地震波有不同的影响。速度和密度的非均匀性可引起波形变化、相位(或走时)和振幅的起伏以及直达波的视衰减,并导致尾波和前驱波。例如:岩石层非均匀性造成了P尾波、S尾波和Lg尾波,核幔边界附近非均匀性引起了PKIKP的前驱波PKP散射波,源和接收器附近引起的共振和其他效应使地震波形发生变化,粗糙地形或界面将造成体波和面波之间的耦合,地壳内平行排列的裂隙可导致等效的各向异性。当非均匀性与各向异性和非线性相互影响时,情况会变得非常错综复杂。由三维非均匀性引起的地震波变化,都被广义地称为地震波散射。

为了从这样极其复杂的现象中获得某些认识,我们采用类似于物理学其它分支学科对波的分类办法,用传播态式对地震波散射进行分类。为了讨论区域和局部的非均匀性对地震波的影响,即在不同传播态式内的不同散射现象。假设非均匀性的尺度为 a ,强度(微扰指数)为 $\tilde{v}$,这时可以用三个无量纲数来表示波传播态的特征: $ka=2\pi a/\lambda$, L/a 和 $\tilde{v}$,其中 k 为波数, λ 为波长, L 为传播长度或非均匀区域范围。因此, ka 为归一化的波数或归一化波长的倒数, L/a 为归一化的传播长度。图2给出了传播态式的划分和各种近似解析方法的适用区域。

准均匀:当 $ka<0.01$ 时,因非均匀性程度太低,以致无法用波加以鉴别。这种介质可近似看作某种均匀介质。

Rayleigh 散射:当 $ka\ll 1$ (例如 $ka<0.1$)时,散射能量与 k^4 成正比。

广角散射:当 $ka\approx 1$ (例如 $0.1<ka<10$),即非均匀性的尺度与波长差不多时,散射效应最为明显。入射能量向各种方向散射,并与入射方向成大角。亦称其为“共振散射”或“米散射(Mie scattering)”。

小角散射或前向散射:当 $ka\gg 1$ 时,绝大部分散射能量集中在靠近入射波传播的方向。在这种情况下,由于背向散射波很弱而可以忽略不计,可对全波方程采用抛物近似(PA法)来描述单一方向(前向)波的传播。PA法的使用范围常常被扩展到 $ka>1$ 区域(如图2所示),但用在图2中所示的浅灰色区里时可能会出现较大的误差。

对小角散射而言,散射成为一种聚焦、衍射和干涉问题。依据二个参数可把它进一步分成三个亚态(Flatte et al., 1979; Aki and Richards, 1980),这二个参数是:

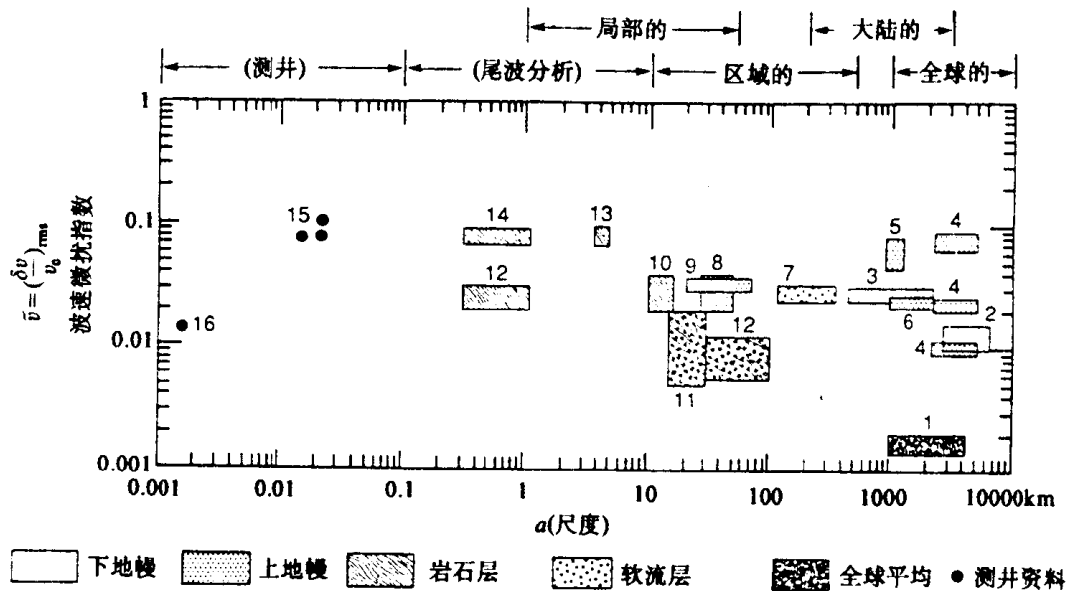


图1 地球内非均匀性的强度-尺度分布。 a 为非均匀性尺度； $\bar{v} = (\delta v / v)_{rms}$ 为非均匀性的速度微扰指数

图中的数字表示及资料来源如下：

- (1) 根据自由振荡波型分裂分析而得到的全球平均 (Sleep, N. H., R. J. Geller, and S. Stein, 1981, BSSA, 71, 183—197);
- (2) 由体波反演得到的下地幔 (球谐函数, $K=4$, $L=6$), (Dziewonski, A. M., 1984, J. Geophys. Res. 89, 5929—5952);
- (3) 由体波层析成像得到的下地幔 ($5^\circ \times 5^\circ$ 单元) (Clayton, R. M. and P. Comer, 1984, Mathematical Geophysics);
- (4) 由面波波形反演得到的上地幔 (Woodhouse, J. H. and A. M. Dziewonski, 1984, J. Geophys. Res. 89, 5953—5986);
- (5) 由面波全波反演得到的上地幔 (太平洋板块) (Rytov 近似) (Yomogida, K. and K. Aki, 1987, Geophys. J. R. Astr. Soc., 88, 161—204);
- (6) 由走时反演得到的 (美国大陆) 上地幔 (Romanowicz, B. A. S., 1979, Geophys. J. R. Astr. Soc., 57, 479—506);
- (7) 由走时反演得到的软流层 (美国中部深125—225km) (Cockerham, U. S., and O. L. Ellsworth, 1979, EOS, Trans. AGU 60, 875 and Railkes, S. A. Geophys. J. R. Astr. Soc., 57, 479—506);
- (8) 由体波层析成像得到的上地幔 (南加利福尼亚) ($30 \times 30 \times 50 \text{ km}^3$ 单元) (Humphreys, E., R. W. Clayton and B. H. Hager, 1984, Geophys. Res. Letter 11, 625—627);
- (9) 由走时反演综合的上地幔 (Aki, K., 1981, Tectonophysics, 75, 31—40);
- (10) 根据LASA台阵透射起伏资料得到的岩石层 (Aki, K., 1973, J. Geophys. Res., 78, 1334—1346 and Capon, J., 1974, BSSA, 64, 235—266);
- (11) 根据NORSAR台阵透射起伏资料得到的岩石层 (Berteussen, K. A., A. Christoffersson, E. S. Husebye, and A. Dahle, 1975, Geophys. J. R. Astr. Soc., 42, 403—417);
- (12) 根据NORSAR台阵透射起伏资料得到的岩石层 (Flatte, S. M. and R. S. Wu, 1988, J. Geophys. Res., 93, 6601—6614);
- (13) 由尾波分析得到的岩石层 (Sato, H., 1984, J. Geophys. Res., 89, 1221—1241);
- (14) 由尾波分析得到的岩石层 (Wu, R. S. and K. Aki, 1985, J. Geophys. Res., 90, 10261—10273);
- (15) 由声波测井资料分析得到的地壳 (Suzuki, H., R. Ikeda, T. Mikoshiba, S. Kinoshita, H. Sato, and H. Takahashi, 1981, Rev. Res. Disast. Prev., 65, 162);
- (16) 由声波测井资料分析得到的地壳 (Wu, R. S. 1982, Geophys. Res. Lett., 9, 9—12)

$$\Lambda = L_F^2 / a^2 = (L/k)a^2 = (L/a)/(ka) \quad (1)$$

$$\Phi = \sqrt{\tilde{v}^2 k^2 L a_L} = \tilde{v} \xi(ka) \sqrt{L/a} \quad (2)$$

式中 Λ 称为衍射参数，它是无量纲平方 Fresnel 半径； $L_F = L/k$ 是沿传播路径 L 的平均 Fresnel 半径； Φ 称为散射强度参数，它近似等于在通过距离 L 时的均方根相位起伏； a_L 为沿传播方向的尺度； $\xi = a_L/a$ 为非均匀性的各向异性比。三个亚态(图 2)是：

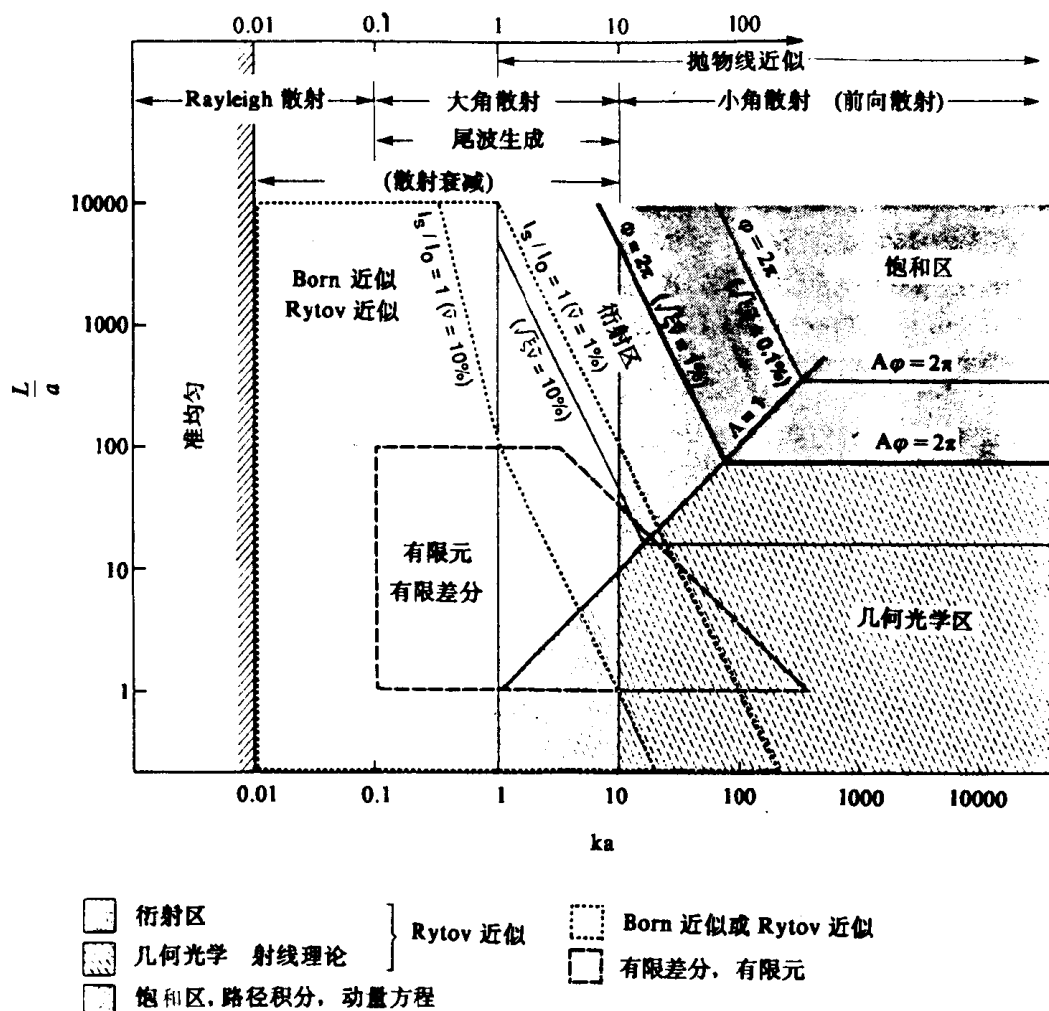


图 2 传播态式的划分和各种近似解析方法的适用区域。 a 为非均匀性尺度； L 为波传播长度； ka 为波数

几何光学态：它被三条线限定，即： $ka > 1$ ， $\Lambda < 1$ 和 $\Lambda\Phi < 2\pi$ 。在这个态内， $\Lambda < 1$ ，沿路径的平均 Fresnel 半径小于非均匀性的横向尺度，所以衍射可以忽略。从式(1)和(2)可知， $\Lambda\Phi = \sqrt{\xi} \tilde{v} (L/a)^{3/2}$ ，因此，射线理论的有效性受到传播长度与扰动强度两者的共同限制。为了利用射线理论（几何光学近似法）必须满足 $\Lambda\Phi < 2\pi$ 。当 $\Lambda\Phi > 2\pi$ 时，射线将分裂成许多微射线(Flatte *et al.*, 1979)，而且这些微射线彼此发生干涉使问题变得更加复杂。

衍射态：它被三条线限定，即： $ka > 1$ ， $\Lambda > 1$ 和 $\Phi < 2\pi$ 。在这个态内，因 $\Lambda > 1$ ，必须考虑衍射的影响。此外， $\Phi < 2\pi$ 的条件也把该态限定于不饱和振幅起伏情况。

在衍射态和几何光学态内，都可采用 Rytov 近似法（或微扰近似法）。

饱和态：它被二条线限定，即： $\Phi > 2\pi$ 和 $\Lambda\Phi > 2\pi$ 。在这个态内，振幅起伏被饱和，射线分裂成许多微射线并且彼此发生干涉。现在还没有合适的确定性解析方法可用来处理这类问题，只有路径积分和矩方程法可用来推导波在这个态内传播的统计特性。

对广角散射和 Rayleigh 散射而言，由于散射场比入射场弱得多，属于弱散射情况，可用 Born 近似法。图 2 给出了当 $\bar{v} = 1\%$ 和 10% 时的 Born 近似法的限定线。在那些线上，散射能量与入射能量之比 $I_s/I_0 \approx 1$ 。当散射较弱的情况下，Rytov 近似法可简化为 Born 近似法。因此，对弱散射来说，两种近似法的适用区域相同。

从上述讨论可以看到，散射现象种类丰富，散射理论在地震学中有广阔的应用领域。有关地震波散射的观测研究始于 20 年前，那时已认识到尾波是岩石层非均匀性引起的背向散射波，PKIKP 的前驱波 PKP 波是核幔边界附近非均匀性引起的散射波。从那之后，对地震波散射的研究受到了越来越多的重视，最近 10 年，有关研究论文的年发表量增长了三倍。从事这个领域工作的许多人感到，现在是总结成果，为将来的新突破作好准备的时候了。这就是编辑这本专集“地震波的散射与衰减”的目的。本专集共收录 19 篇评述和 30 篇专题论文，这些文章的题目涉及地震波散射和衰减方面的广泛领域。它们包括：

- 弱散射的弹性波微扰理论和方法；
- 时间域和空间域的多重散射理论；
- 高频渐近和近似理论及方法；
- 裂纹和楔形散射；
- 尾波生成、尾波包络线衰减和尾波 Q （包括局部和区域相位）；
- 透射波的相位和振幅的起伏；
- 核幔边界的散射；
- 一维散射和地层滤波；
- 台阵数据处理和偏振分析；
- 地震波散射的数值模拟；
- 地震波散射的实验室模型试验；
- 复合介质内的波散射和有效参数；
- 裂纹散射和等效各向异性；
- 散射和非线性；
- 散射衰减及其与本征衰减的区分；
- 岩石样品的实验室 Q 值测定；
- 粘弹性衰减机理；
- 弹性介质全波反演理论（包括衰减）；
- 走时和振幅反演。

在这个正在迅速发展的领域，不能奢望这一本专辑就能包括它的各个方面并准确地总结其科学发展动态。然而，我们希望它能成为大学生和专业人员的入门参考书，并希望再

过 10 年之后来作回顾时，这本专辑不仅是我们过去成就的总结，而且是现今我们对于地球内部非均匀性和地震波散射的贫乏认识的见证。

(李裕澈 译 吴建春 刘 洪 校)

参 考 文 献

Aki, K and P. Richards, 1980 , *Quantitative Seismology*, vol. 2, W. H. Freeman, San Francisco.

Flatte, S. M., R. Dashen, W. J. Munk, K. M. Watson and F. Zachariasen, 1979, *Sound Transmission Through a Fluctuating Ocean*, Cambridge Univ. Press, New York.

含小尺度包体或裂纹的复合介质 总体特性的推测

J. A. Hudson L. Knopoff

一、引言

对具有小尺度物性变化、含有异质包体或布满裂纹的介质，如果激发波长相对结构变化的尺度或包体的体积很大的话，它在力学上的行为就象均匀介质一样。虽然不能直接用长波长激发去观测这些微结构，但所观测到的等效均匀介质的性质以某种方式直接取决于细结构的本身，特别地，有人提出根据介质力学性质的变化可推测微结构的变化。

根据包体和围体的性质来确定复合介质的弹性性质，这一问题在地球物理上具有重要的意义，但在数学处理上有不少困难。目前所采用的方法有两类：一类是找出弹性参数必然所处的上界和下界，另一类是直接计算精确解。倘若后者在所有情形下都成功，则求上下界就毫无意义，不幸的是，现实中存在精确解、甚至是合理近似解的问题非常之少。

一般来说，限定使复合介质变形的应力场波长与包体的尺度相比很长等价于假定问题是一静弹性问题，换言之，无需赘言，我们不可能计算弹性波的衰减，除非设定存在波动。

有关复合介质的性质的早期工作主要集中在预测随机取向的晶堆的平均性质 (Voigt, 1928; Reuss, 1929)。虽然 Voigt 和 Reuss 做了很多假设，但其工作是非常有意义的，因为他们提供了聚合体弹性参数值的上限和下限 (Hill, 1963)，这些结果和其后一些近似结果实际上只适用于那些单个弹性性质几乎各向同性的晶体或晶粒堆（如果晶粒是各向同性，且不存在空隙，则问题是简单的）。最近，这类复合介质的研究工作主要集中在修改弹性参数的界限上，然而有一篇文献讨论了具有固定形状、规则排列并且相互之间无空隙的晶粒组成的物质的性质 (Bonilla and Keller, 1985)。

事实上，对复合介质的总体性质仅发现两个精确解，Hill (1963) 对几何结构任意、但各部分剪切模量完全相同的复合介质的体积弹性模量导出了一个精确的公式；第二个精确解由 Hashin (1962) 得出，他针对一个由一组球体构成的复合介质的体积弹性模量导出了一个公式。复合介质中，球体的半径从一有限的最大值变化至无限小，大球同心地包围小球，层与层之间的介质不同。虽然这两个解没有多少直接的应用价值，但它们可以作为一种参考，与其它方法求得的参数上下界或近似值作比较。

有关含包体或裂纹的物质静态性质的理论主要是在 60 年代发展起来的，其基础是 Eshelby (1957) 的经典论著。Hill (1965) 和 Budiansky (1965) 用自洽方法对 Eshelby 的计算作了一些改善；事实上，后者的方法仅仅适用于 Eshelby 公式中包体松散分布的情

形。Batchelor 和 Green (1972) 将此方法推广到二阶密度分布情况, 这一推广并不简单, 是通过重整化过程实现的。早些时候, Keller (1964) 利用有关波动的散射研究, 把针对含包体物质的动力学模量的各种不同的近似集中到一起, 这些近似是同 Foldy, Lax, Twersky 和其他作者的姓名联系在一起的, Keller 的方法被称为平滑方法, 它实际上是精确的, 但结果常常以分布密度升幂的无限级数形式出现, 这个级数在某一阶段可以通过经验性假设来截断。

将这些结果应用到地震学上的兴趣始于 70 年代。其中的一项工作是测定微结构随位置的变化, 即在地震之前裂纹密度和流体饱和程度的变化 (Nur and Simmons, 1969)。Anderson 等 (1974) 将 Eshelby 的方法应用到含串联椭圆流体裂纹的物质上。大约在同一时期, O'Connell 和 Budiansky (1974) 用自洽方法计算了含干的或流体填充的椭圆状裂纹物质的性质, 椭圆的轴率非常小, 在此情形下, 公式具有相对简单的解析形式。在 Batchelor 和 Green (1972) 的重整化方法基础上, 一种计算含球形包体物质平均模量的方法, 是由 Chatterjee 等 (1978) 完成, 它可精确到二阶密度分布。Hudson (1980) 利用平滑方法给出了针对空的或充满流体的裂纹物质的公式。所有这些方法在一阶密度分布上是吻合的, 对二阶密度分布, 仅有的可靠方法是平滑方法和重整化方法。

通常假定流体填充的裂纹是独立的, 并且在每个裂纹内流体的压力由裂纹的体积决定, O'Connell 和 Budiansky (1977) 给出了如何在物质的总体性质公式中考虑进不同程度的孔隙度, 如果物质是完全孔隙的 (即不存在独立的空穴), 那么可采用 Biot (1956) 的方法。对多孔物质, Biot 方程长期以来被视为标准, 然而公式中含有一些由观测决定的参量, 它们与微结构的关系非常复杂 (见 Burridge and Keller, 1981)。

当波通过线性复合介质时将发生衰减, 首先是因为流体和其它填充物的粘性将导致能量耗散 (O'Connell and Budiansky, 1977), 其次是由于能量散射离开信号方向转变成噪声或尾波。对相对能量的考查表明, 由于散射导致的衰减幅度是散射波本身幅度的二阶量, 所以原则上需要二阶的理论来估计这一类衰减。然而可以证明, 这种衰减可以通过将单独包体的散射截面相加求和来确定 (Hudson, 1980; Waterman and Truell, 1961), 因此也可用一阶理论来计算。这一类的早期的计算是采用 Born 近似进行的, 但这种方法精度更低, 因为它在计算散射截面时采用了弱反差的近似, 而在计算不同形状的散射截面时存在精确的数值和解析表达式。虽然当结构的变化非常不规则, 并且物性的反差很小时, 采用 Born 近似是合理的 (Wu and Aki, 1985), 但在这种条件下使用时应小心从事。我们注意到, 由散射导致的衰减依赖于频率的四次方 (在波长相对于包体的体积很大时), 而由裂纹中的牛顿流体粘性造成的衰减是频率的一次方, 所以在低频情况下, 在裂纹壁上的衰减似乎主要是由散射造成的。

目前对包体高密度分布的介质尚无满意的解释理论, 虽然人们沿着多重散射和辐射传递的思路在求解这一问题方面做了一些尝试 (Wu, 1985), 但迄今成效甚微。

二、理论模型

在计算复合结构或含小尺度不均匀性介质的总体弹性参数方面人们已经提出了有好几种近似方法。Watt 等 (1976) 对此曾做了广泛的回顾, 包括对这个课题有影响的几项研

研究工作进行了总结，目前针对这些介质的宏观行为的理论表达式大部分是建立在两个不同的方法基础上的，第一种是对静态系统的直观的空间平均和对静态和动态系统的集合平均；第二种是应用随机微分方程。

不同的作者常常强调他们自己方法的新颖性，但撇开表面上的区别，他们所用方法的基本过程是相同的。例如在对离散包体介质的性质进行分析时，都要对位于均匀围体中的一个代表性包体的静态或动态响应进行估计。尽管采用的估计方法可能相差很大，例如可以用一个积分方程、也可以用正常振型展开式估计；可能在研究的早期引入，也可能在后期才引入。但不管怎么说，这些方法的基本原则常常是相同的。对最终结果进行评价的重要之处是所涉及的假设和近似。

所谓含非均匀微结构介质的总体或有效响应，我们指的是这种介质在线性尺度同微结构尺度 l 相比非常大的体积内对应力和应变的响应。为了将理论结果同实验相比较，我们假定载荷在与 l 相比很大的面积上是可以被测量的，同时位移和应变也以同样的方法来平均。由此，我们寻求的是平均应力和平均应变之间的关系和一平衡方程或者一包含平均应力和平均位移的运动方程。这里“平均”是在同 l 相比很大的尺度上进行的。我们对平均方法无需给出精确的描述，只要介质本身除了在尺度 l 上的微结构变化之外，其性质在同 l 相比十分大的尺度 L 上随距离变化缓慢。因此我们假定物质在两个尺度 l, L 上变化，从而在一个尺度 d ($l \ll d \ll L$) 上做平均将同这种平均的所有合理的定义一致。当然，还必须做一个附加的假定，即在尺度 l 上外部加载基本上是一个常量，在此假定下，我们指明了可以表达为动力学情形的弹性波波长范围。

以上的假定也是所有连续介质力学研究中的基本假设。在那里，微结构，就是分子和原子，固体、液体或气体力学研究的数学模型，一般是“理想连续介质”。我们同样也把我们的不均匀物质用一相似的理想连续介质代替，从而不考虑微结构。两者的前提是在物理上不能直接计算的、在小尺度或分子结构尺度以下的变化。两种情形的区别是由分子结构预测连续介质的性质十分困难，除了气体的运动学理论之外，还没有取得很大的成功。而从微结构来推导物质的总体性质却有很多成功的例子，这主要是由于微结构本身也遵循连续介质力学定律。

三、空间平均

因此，我们考虑空间体积 V 内的物质， V 同 l 相比很大，但又足够小，以至当微结构被平滑掉以后，物质基本上是均匀的，则 V 内的平均应力是：

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_S x_j t_i dS \quad (1)$$

这里， S 表示 V 的边界， t 是加在 S 上的载荷 ($t_i = \sigma_{ij} n_j$, n 是 S 面的外法向)，如果 S 面比较光滑，那么我们可以将 t 用它的局部平均代替。假设我们对物质加上一平均的载荷 t^* 以产生一均匀的应力场：

$$t_i^* = \sigma_{ik}^* n_k$$

σ_{ik}^* 是一个常数。则由公式 (1) 可得:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^* \quad (2)$$

平均应变为:

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V e_{ij} dV = \frac{1}{2V} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (3)$$

它可以通过将外表面上的平均位移代入这个公式测得。由此可以通过对体积的常规实验 (单轴拉伸或简单剪切等等) 得到平均应力和应变的关系。

由于系统响应是线性的; 甚至在微结构内部也满足线性。则位移 u 将与 t^* 线性相关, 由此, 对某一张量 S 得:

$$\frac{1}{2V} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS = S_{ijkl} \sigma_{kl}^* \quad (4)$$

即

$$\bar{e}_{ij} = S_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (5)$$

S 就是我们想要得到的等效物质的柔性常数张量。

在 V 内的物质的响应是弹性的, 所以:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= s_{ijkl} \sigma_{kl} \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} e_{kl} \end{aligned} \quad (6)$$

这里 s 和 c 分别是对应的柔性常数张量和弹性常数张量, 后者常常被用来简化成弹性模量, 对整个 V 积分可得:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V s_{ijkl} \sigma_{kl} dV \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V c_{ijkl} e_{kl} dV \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在此处可以引入很多的近似来连接式 (7) 中第一等式内的 σ 与 $\bar{\sigma}$, 或第二等式内的 e 与 $\bar{e}$, 具体取决于微结构的特征。最简单的情况是两者相等:

或

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{\sigma} \\ \mathbf{e} &= \bar{\mathbf{e}}\end{aligned}\quad (8)$$

前者给出了 Reuss (1929) 平均:

$$\bar{e}_{ij} = \left[\frac{1}{V} \int_V s_{ijkl} dV \right] \bar{\sigma}_{kl}$$

因此 Reuss 对总体柔性常数张量的近似是对物质柔性常数张量的简单空间平均:

$$S_{ijkl}^R = \frac{1}{V} \int_V s_{ijkl} dV \quad (9)$$

式 (8) 的后一等式给出:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left[\frac{1}{V} \int_V c_{ijkl} dV \right] \bar{e}_{kl}$$

它导出对弹性常数张量的 Vogit (1928) 平均:

$$C_{ijkl}^V = \frac{1}{V} \int_V c_{ijkl} dV \quad (10)$$

尽管精确的柔性常数张量 $\mathbf{S}$ 和弹性常数张量 $\mathbf{C}$ 互相为逆:

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{S}$$

但对近似解 $\mathbf{S}^R$ 和 $\mathbf{C}^V$ 并非如此。当等效物质是各向同性时, 由 Voigt 和 Reuss 近似给出的体积弹性模量和剪切模量组成了相应的正确值的上下界。因此, 有人提出对所有情况, 可用每一个模量的两个近似值的算术平均作为更好的近似 (Hill, 1952), 即:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} [\mathbf{C}^V + (\mathbf{S}^R)^{-1}]$$

或

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{S}^R + (\mathbf{C}^V)^{-1}] \quad (11)$$

体积弹性模量和剪切模量的算术平均被称为 VRH (Voigt, Reuss, Hill) 平均。正如我们已指明的, Voigt 和 Reuss 平均主要用于多晶体聚合体, 因此式 (7) 可写成: