

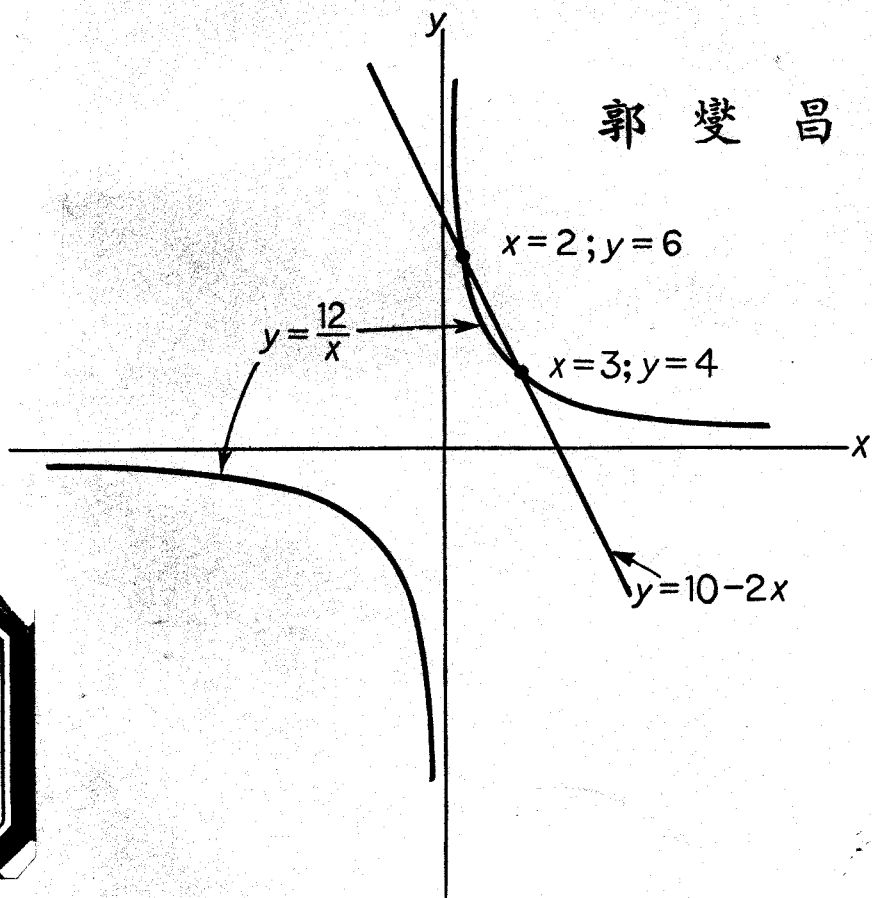
# A First Course in Calculus

by SERGE LANG

2nd ed.

上册

郭變昌譯





---

**版權所有・翻印必究**

中華民國五十八年十一月 初版

中華民國六十三年三月 三版

大學  
用書 **初等微積分** (全二冊)

上冊 定價 新臺幣五十元整

(外埠酌加運費滙費)

譯者 郭 燮 昌  
發行人 卓 鑫 森  
出版者 臺灣東華書局股份有限公司  
臺北市博愛路一〇五號  
印刷者 中 臺 印 刷 廠  
臺中市公園路三十七號

---

內政部登記證 內版臺業字第一〇三一號  
(58027)



---

**版權所有·翻印必究**

中華民國五十九年一月初版  
中華民國六十八年四月三版

大學  
用書 **初等微積分 (全二冊)**

**下冊 定價 新台幣六十元整**

(外埠酌加運費滙費)

著者 郭 燮 昌

發行人 卓 鑫 森

出版者 臺灣東華書局股份有限公司  
臺北市博愛路一〇五號  
電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 中 臺 印 刷 廠  
臺中市公園路三十七號

---

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

(58035)

# 原 序

初等微積分之目的為教給學生導數及積分的基本概念，以及與之有關的基本方法與應用。

目前在美國，係於大學一年級時講授。事實上，應該教給年齡約在十五歲左右正在中學就讀的學生。（我曾與這年齡的一些同學談過，發現他們都能完全瞭解。）

不論在何時講授，我相信效果總是差不多的。對數學領悟力很強而有天份的學生，會很快便想要學習專搞數學的人才瞭解的這一個課程。本書不是為這種人寫的。（雖然我希望他能在年齡較小時便從本書得到很好的啓示。）

我並沒有將此課程寫成我所寫有關特殊題材的高級專文的形式。高級專文總是為自己而寫的，因為作者希望將他對數學某一奇妙部分的看法寫成永久的形式，而並非在於使別人接受，這就像作曲家將他的交響樂寫成音樂符號一樣。

本書是為學生而寫，使他對這個教材能很愉快的立刻接受。在對特殊細節討論過多與對熟悉主題所必要的練習技巧不足之間，我希望我已做了適當的折衷。在任何情形中，善辯的數學家們的某些常規方法對初步課程是不適合的。

這也並不是說要放棄那些所謂的嚴密方法。此課程的數學之邏輯發展由最基本的公理經由下列各過程演進：

集合論

整數

有理數(分數)

數(即實數)

極根

導數

再由此下去

神智健全的人不會提出以集合理論開始一個課程。通常引入主題的最佳起點在極限與導數之間。換言之，任何學生都可直覺的接受數與極限的概念及其基本性質。由於某種原因，現在有種流行的說法認為進入主題的最佳之處在數與極限之間，但經驗告訴我們，學生不具有適當心理基礎來接受這些而會抗拒它。

事實上，可取這兩觀念之長，極限之性質能化爲數的性質而整個自成獨立。就邏輯觀點言之，它應在本課程主題之前，我把它列在附錄中。若任何學生對此感覺需要，可直接參閱並視之爲第0章。在這種情況下，以後的每一細節都如任何數學家所要求的一樣嚴密。（就具有分析性定義之事項而論。）在任何證明中，毋需修改任何字。我希望這對有關所謂嚴密方法的可能爭論有了一個交代。

有些東西有幾何定義，同時亦有物理觀念之應用。在這種情形下，當然需要在物理概念與相關數學間建立一個橋樑。主要的例子有正弦與餘弦函數，及由積分表示的面積。

對於正弦及餘弦，需藉助於平面幾何之概念。若接受了有關平面圖形之標準定理，則我們的證明亦都滿足上述之標準。附錄中說明如何對這些基本性質給以純分析性的定義並加證明。

對於積分，我們首先作了幾何說明。然後用 Riemann 和，證明了用數以闡述所有的定義及證法與這一幾何說法有一個完全互相配合的對照。這樣應使每一個人都會滿意。此外，積分的理論表現於其存在係

依於幾何論證或稍含理論性的探討(上和與下和)。依照學生能力的水準,教師可由其判斷以灌輸理論。

通常人們總不認為教數學的主要困難和教外國語文相似。(中學對此須負責任。在中學裡施以適當的訓練可免去這項困難。)因此,我盡了極大的努力將教材編得使學生感覺口語化,亦即利用適當的數學語言。有些證明被略去,例如,在有關極大極小或增減函數之理論方面,我們僅詳細討論其中的一種情形,其餘的便留作習題。證明中需要改變處很少,只有在某些處的負號,但這些地方卻可使學生瞭解真況並訓練他寫得清楚,這是很有價值的。省略處還可使教師更注重某些主題,若必要時,可把證明過程自行寫出。如同語言之學習,重複練習是重要的工具之一,還有與邏輯思考不同之機械練習亦是有益且必需的。

在解說微積分方面,我並沒有作很大的革新。這也是不可能的,因為微積分自創立至今已有一百餘年之久。但我省略了一些並不屬於此課程的特殊論題。Stirling 公式僅為參考之用,可略去不授或作為練習。Taylor 公式之證明是用積分形式的餘式,而餘式之值則可由此作適當之估計。利用部分積分的證明方法較另一方法(微分某一不知從何而來的複雜式子)要自然得多,且可推廣至多元的形式。我把積分法放在微分法後面,因為不然對於計算積分便沒有適當的方法可用。但就整體而言,每一樣都很合標準。

我將解析幾何的講授減至此課程所必需且足夠的份量。對某些應用照理應該提出得較多些,但這些應用都是專門的。例如,若讀者要知道光學上有關拋物線焦點之特殊性質,那麼他就應該在有關光學的書上找,而不應查閱這個為數學家、物理學家、生物學家、及工程師而寫的普通教材。我認為這許多年來解析幾何中圓錐曲線的受重視是一項不幸的歷史上的意外。重要的在於須徹底瞭解平面上圖形的基本觀

他念及基本例子。其有關橢圓、拋物線及雙曲線的較深奧的性質都應略去。

同時一提的——似乎頗反常理。當我是一個學生時，我並不喜歡微積分及分析。那時我一定不喜歡我現在寫的這本書。直到我成了一個數學工作者後我才開始喜歡微積分之美妙，但我也同時發現了由於歷史的意外，微積分及分析都被過分的強調重視而使代數被忽略。事實上，基本代數課程（包括群及向量空間）很顯然的應在更早時便被用到。從物理、生物及經濟學皆強烈指出在中學階段代數應比現在受到更多的重視。因為代數在邏輯上與微積分無關，有重要的應用，且對某些人它較微積分顯得更具有吸引力些（我就如此）。因此我期望目前的不平衡現象將會很快改變。沒有理由讓學生修一門代數課前一定先要他修微積分，目前這對天份較高的學生尤其正確。

在某一方面討論過多與在另一方面討論過多一樣令人困擾。將舊有的特殊論題換新是沒有意義的，本書不介紹如何將舊的過時的材料換為新的不合時宜的東西（如 Boolean 代數）。至於提到：為什麼要多寫一本微積分？我願回答：因為現在的微積分書都太長了（500 至 600 頁），讀者很容易忽略整體的概念，所以便為固守舊習的論題而犧牲。而我認為這些舊習都是不好的，我希望本書各章的安排法能使讀者得到一完整的觀念。

最後，我個人要提出的：在我寫博士論文那年，曾從 Artin 學如何教此課程，我對本課程的介紹已盡於此。

Serge, Lang

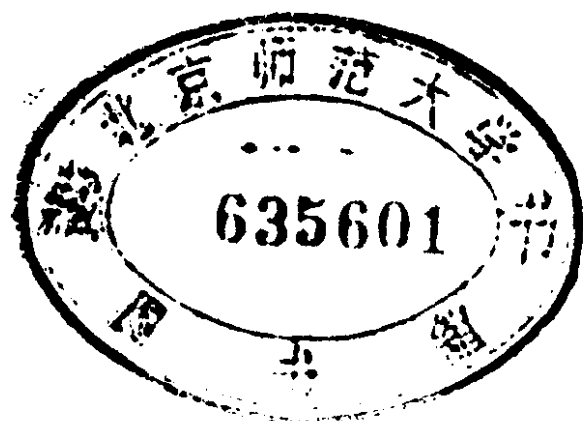
紐約, 1963

# 初等微積分

J211.123/10

下 冊

編 譯 者 郭 燮 昌



東華書局印行



# 初等微積分

## 上册目錄

### 第一章 數與函數

1.1 整數，有理數，實數·····	1
1.2 不等式·····	4
1.3 函數·····	10
1.4 冪·····	13

### 第二章 圖形與曲線

2.1 座標·····	16
2.2 圖形·····	19
2.3 直線·····	25
2.4 兩點間之距離·····	30
2.5 曲線與方程式·····	32
2.6 圓·····	33
2.7 拋物線，座標之變換·····	37
2.8 雙曲線·····	39

### 第三章 導 數

3.1	曲線之斜率	42
3.2	導數	47
3.3	極限	51
3.4	冪	55
3.5	和, 積, 及商	58
3.6	連鎖律	63
3.7	高階導數	70
3.8	變率	71

### 第四章 正弦與餘弦

4.1	正弦函數與餘弦函數	78
4.2	圖形	83
4.3	加法公式	86
4.4	導數	90
4.5	兩個基本的極限	93

### 第五章 中 值 定 理

5.1	極大與極小定理	97
-----	---------	----

5.2	極大值與極小值之存在·····	104
5.3	中值定理·····	108
5.4	增函數與減函數·····	110

## 第六章 曲線之描繪

6.1	當 $x$ 變為很大時之情形·····	122
6.2	曲線之描繪·····	126
6.3	彎曲方向·····	131
6.4	極座標·····	139
6.5	參數曲線·····	143

## 第七章 反 函 數

7.1	反函數的定義·····	148
7.2	反函數之導數·····	151
7.3	反正弦·····	154
7.4	反正切·····	157

## 第八章 指 數 與 對 數

8.1	對數·····	164
-----	---------	-----

8.2	指數函數·····	171
8.3	普通指數函數·····	176
8.4	大小的次序·····	180
8.5	應用·····	185

# 初等微積分

## 下冊目錄

### 第九章 積 分 法

9.1	不定積分	189
9.2	連續函數	193
9.3	面積	194
9.4	基本定理	198
9.5	上和及下和	200
9.6	基本性質	206
9.7	可積分函數	209

### 第十章 積分之性質

10.1	由導數求積分	212
10.2	和	214
10.3	不等式	219
10.4	廣義積分	223

## 第十一章 積分方法

11.1	代入法	230
11.2	部分積分法	234
11.3	三角積分	237
11.4	部分分式	242

## 第十二章 實例數則

12.1	$(n!)^{1/n}$ 值之估計	254
12.2	Stirling 公式	256
12.3	Wallis 乘積	257

## 第十三章 積分法的應用

13.1	曲線長度	259
13.2	極座標中的面積	264
13.3	旋轉體之體積	266
13.4	功	269
13.5	密度與質量	270
13.6	機率	271
13.7	力矩	275

**第十四章 Taylor 公 式**

14.1	Taylor 公式 .....	283
14.2	餘式之估計 .....	287
14.3	三角函數 .....	292
14.4	指數函數 .....	295
14.5	對數 .....	296
14.6	反正切 .....	299
14.7	二項式展開式 .....	300

**第十五章 級 數**

15.1	收斂級數 .....	307
15.2	正項級數 .....	310
15.3	比值檢定法 .....	313
15.4	積分檢定法 .....	315
15.5	絕對收斂及交錯級數 .....	319
15.6	冪級數 .....	322
15.7	冪級數的微分與積分 .....	326

**第十六章 複 數**

16.1	定義 .....	330
------	----------	-----

16.2	極式	334
16.3	複數值函數	337

### 附錄 1. $\epsilon$ 與 $\delta$

A 1.1	最小上界	A 1
A 1.2	極限	A 3
A 1.3	凝聚點	A10
A 1.4	連續函數	A12

附錄 2.	數學歸納法	A16
-------	-------	-----

附錄 3.	正弦與餘弦	A20
-------	-------	-----

附錄 4.	物理與數學	A27
-------	-------	-----



# 第一章

## 數與函數

在研習任何一種數學之初，不能夠對每一件事都加以證明。每當引入一個新觀念時，必須用另一個其意義為已知的觀念來作定義，而欲永遠如此追求下去是不可能的。因之必須選擇一個起點，那些是承認其為已知的，那些是要用這些所承認的事項來加以說明及證明的。

在本章之初，將述及此書中認為已知的一些事項。實際上僅包括極少的部分。概括言之，本書假定讀者已經知道數、加法、減法、乘法、除法（除數不為零），並複習不等式的性質。在少數情況下，數的某些性質（讀者可能未曾經驗而需加證明的）本書中將視為當然之事實。這些性質之證明列於附錄中，俾有興趣的讀者參考閱讀。

### 1.1 整數，有理數，實數

最普通的數是  $1, 2, 3, \dots$  稱為**正整數** (positive integers)。  $-1, -2, -3, \dots$  等數稱為**負整數** (negative integers)。正整數，負整數及零稱為**整數** (integers)。因此整數即為  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$  兩整數之和及積亦是整數。

除整數外尚有**分數** (fractions)。例如  $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{8}, -\frac{101}{27}$ ，