高等学校试用教材

高等几何

朱德祥 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是按高等师范院校《高等几何》教学大纲的内容，根据作者多年的教学经验在原讲义的基础上修改而成的。为了兼顾高等师范专科数学科的需要，又增添了一章几何基础简介.

全书共九章. 分别为：仿射几何的基本概念，欧氏平面的拓广，一维射影几何学，代沙格定理、四点形与四线形，射影坐标系和射影变换，二次曲线的射影性质，二次曲线的仿射性质，二次曲线的度量性质，几何基础简介。

本书可供高等师范学校数学系、师专数学科、教育学院等师生作为教材和教学参考书.

高等学校试用教材

高 等 几 何

朱德祥 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张6.375 字数153,000

1983年9月第1版 1984年3月第1次印刷

印数 00,001—45,000

书号 13010·0918 定价0.74元

前　　言

高等师范院校数学专业的高等几何，按教学大纲主要讲射影几何．为了兼顾高等师范专科学校高等几何的教学大纲，我在原讲义的八章修改之后新添了第九章几何基础简介．

今年四月在南通师专审稿会议上提到用公理法建立平面射影几何．考虑到数学科的大纲上没有这样要求，数学系的大纲把它放在带有 * 号可以删减的内容中，因此放在第九章标上 * 号．至于第九章其它内容，数学系没有讲授的义务．9.7 节罗巴切夫斯基几何对于师专按大纲也是可删减的内容，带有 * 号．6.7 节二次曲线束及其在解联立方程方面的应用，对于数学系和数学科都是可删减的内容，标有 * 号．带 * 号的习题是与带 * 号的内容配合的．

中国幅员广大，人口众多，历史给我们留下的不平衡状态，一刀切的办法是行不通的．师院数学系、师专数学科、教育学院、函授大学等，都有使用过这本讲义的，这对我们是莫大的支持和鼓舞，十分感激．使用本教材的单位，希望按各自教学大纲和客观现实，实事求是地对本教材作适当增、删、改，着重基础，培养能力，以期符合实际，多收实效。

高等几何是师范系统数学专业重要的基础课之一，它跟初等几何、解析几何、高等代数等课程有紧密的联系；它对未来中学数学教师在几何方面基础的培养、观点的提高、思维的灵活、方法的多样起着重要作用，从而大有助于中学数学教学质量的提高和科研能力的培养．

教学大纲规定，讲授本课程兼用综合法和代数法．这既符合射影几何发展的历史规律，又符合师范系统开设本课程的目的．在

这里我们是讲几何，所以尽量从几何的概念出发，运用活生生的几何直观开发智力，运用代数这个有力工具，作为简化思维过程加以高度概括总结的武器，确认空间形式的本质．经验证明，学了射影几何之后，学生对代数的作用和兴趣也提高了．

联系和指导中学数学教学，这是本书的着重点之一．这方面的工作可说是个无底洞，希望使用教材的同志着意丰富。

本书所讲的二次曲线，系数全部是实的，在此统一声明．实系数二次曲线未必有实轨迹．

本书的出版首先要感谢兄弟院校的支持，他们大量使用我们的讲义，在他们印行的教材中采用我们的一些内容．同时要感谢昆明师院函授处和数学系几何教研组全体同志的热情支持．

本书承蒙曾如阜教授主审；麦兆娴、李忠映、胡连三、熊德群、李云普、秦炳强、吕嘉钧等同志参加审查；南通师专主持审稿会；特于此致谢！

限于本人水平，疏漏错误之处一定不少，请广大读者指教，以便改进。

朱德祥

1983年5月于昆明师院

目　　录

几何基础

射影几何学

第一章 仿射几何学的基本概念

本课程主要研究射影几何，在第一章我们介绍仿射几何的基本概念，作为从欧氏几何过渡到射影几何的桥梁.

1.1 平行射影与仿射对应

我们来考虑同一平面内直线 a 到直线 a' 的平行射影（图 1. 1）. 设 l 为平面上一直线，与 a 及 a' 都不平行. 通过直线 a 上诸点 $A, B, C, D, \cdots$ 作 l 的平行线，交 a' 于 $A', B', C', D', \cdots$，这样便定义了直线 a 到直线 a' 的一个映射，称为平行射影或透视仿射. a 上的点是原象点，a' 上的对应点是映象点，l 是平行射影的方向. 记这个透视仿射为 T，则写 $A'=T(A), \cdots$. 明显地，平行射影和方向有关，方向变了，就得出另外的透视仿射.

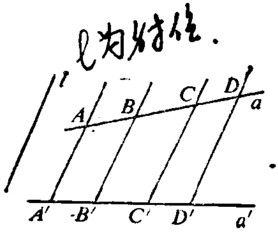

图 1.1

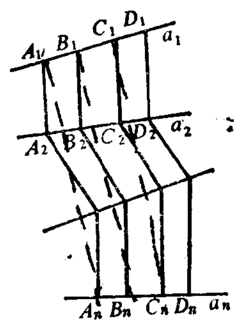

图 1.2

现设同一平面内有 n 条直线 a_1，$a_2, \cdots$，a_n（图 1. 2），用 T_1，

$T_2, \cdots, T_{n-1}$ 顺次表示 a_1 到 a_2, a_2 到 $a_3, \cdots$, a_{n-1} 到 a_n 的透视仿射，经过这一串平行射影，a_1 上的点和 a_n 上的点建立了一个一一对应，称为 a_1 到 a_n 的仿射或仿射变换 T; $T = T_{n-1} \cdots T_2 T_1$, T 称为 $T_1, T_2, \cdots$, T_{n-1} 按这个顺序的乘积. $T(A_1) = T_{n-1} \cdots T_2 T_1(A_1) = T_{n-1} \cdots T_2(A_2) = \cdots = A_n$, $T(B_1) = B_n$, 等等. 注意书写的顺序跟平行投影的先后顺序是相反的. 仿射是由有限回的平行射影组成的，所以仿射是透视仿射链或平行射影链. 透视仿射是最简仿射. 要断定一个仿射是否是透视仿射，只要看原象点和映象点的联线是否都平行.

仿此可以定义平面 π 到平面 π' 的平行射影或透视仿射 T, 平行射影的方向 l 要求既不与 π 又不与 π' 平行. 射影方向改变了就得出另外的从 π 到 π' 的透视仿射. 若 $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$, 且 A, B, C 共线，则易见 A', B', C' 也共线. 设以 a 表直线 ABC, 以 a' 表直线 $A'B'C'$(图 1.3), 则写 $T(a) = a'$.

所以二平面间的平行射影将一平面上的点映射为第二平面上的点，将一平面上的直线映射为第二平面上的直线. 我们说透视仿射保留同素性(即几何元素点与线保持原先的种类).

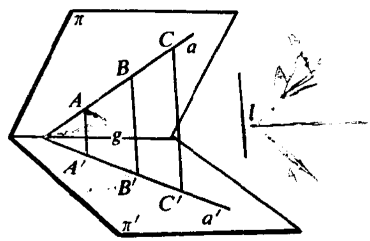

图 1.3

直线与直线间的透视仿射有一个自对应点（如果这两线相交），即两线的公共点. 同样，在平面到平面的透视仿射下，若两平面相交，则交线 g 为自对应点的轨迹，称为对应轴，对应直线 a 与 a' 或相交于轴上，或都与轴平行. 点在直线上，称为点与直线相接合(或结合或关联). 对于原象，点 A 与直线 a 接合，对于映象，点 A' 与直线 a' 接合，我们说透视仿射保留接合性.

仿照直线到直线的仿射，平面到平面的仿射是由有限回的平

2回 3回

行射影组成的，或者说，仿射是透视仿射链.

1.2 仿射不变性与不变量

经过一切透视仿射不改变的性质和数量，称为仿射不变性和仿射不变量. 经过仿射变换它们是不改变的. 经过任何仿射变换不改变的图形、性质和数量，称为仿射图形、仿射性和仿射量. 由以上所述可知，同素性、接合性是仿射不变性. 由此推知，仿射变换将共线点映射为共线点，将共点线映射为共点线. 现在证明：

定理 1 二直线间的平行性是仿射不变性.

证明 设 a, b 是平面 π 内的两条平行线，a'，b' 是它们在平面 π' 内的仿射映象，因此只要求证 $a' \parallel b'$.

若 a' 与 b' 不平行而相交于一点 P'(图 1.4)，且设 P 为 P' 的原象点，那末由于仿射保留接合性，点 P 应该既在 a 上又在 b 上，即是说 a 和 b 是相交而不平行了. 所以反证了 $a' \parallel b'$.

图 1.4

系 平行四边形是仿射不变图形.

定义 设 A, B, C 为共线三点，这三点的简比 (ABC) 定义为下述有向线段的比：

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}.$$ "有向".

C 在线段 AB 上时，简比 $(ABC)<0$，在 AB 的延长线上时，$(ABC)>0$.

在解析几何中讲过线段的定比分割，若点 C 分割线段 AB 的分割比记为 λ，则

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{AC}{-BC}=-(ABC).$$

所以简比 (ABC) 等于点 C 分割线段 AB 的分割比的相反数。

定理 2 共线三点的简比是仿射不变量.

证明 首先注意，对于透视仿射，即对于一回平行射影，这由初等几何是明显的(图 1.1 和 1.3 节). 因此，经过透视仿射链，简比也保持不变.

定理 3 两条平行线段之比是仿射不变量.

证明 可由上述定理推得，设 AB 与 CD 是平面 π 内的平行线段，$A'B'$ 与 $C'D'$ 是它们在平面 π' 内的仿射象 (图 1.5). 由定理 1，$C'D' /\!/ A'B'$.

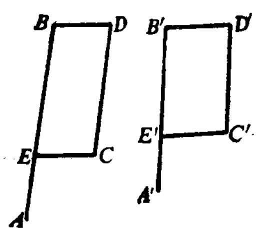

图 1.5

在平面 π 内，过点 C 作 $CE /\!/ DB$ 交 AB 于 E，在平面 π' 内过点 C' 作 $C'E' /\!/ D'B'$ 交 $A'B'$ 于 E'. 容易看出 E' 是 E 的仿射象. 由定理 2，$(AEB)=(A'E'B')$，即

$$\frac{AB}{EB}=\frac{A'B'}{E'B'},\quad 或\quad \frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

定理 4 一直线上任两线段之比是仿射不变量.

请读者自证.

注意：我们证明了，共线或平行二线段之比经过仿射变换不变，但任意二线段之比在仿射变换下并不保留.

现在我们来证明二图形的面积之比也是仿射不变量. 我们先引进下述引理:

引理：在透视仿射下，任何一对对应点到对应轴的距离之比是一个常数。

证明 设 A 与 A'，B 与 B' 是两对透视仿射对应点（图 1.6），从而 $AA' /\!/ BB'$. 由这些点向对应轴作垂线 $AA_0, A'A'_0, BB_0, B'B'_0$；若 AB，$A'B'$ 与轴 g 平行，引理是明显的；设 AB 与 $A'B'$ 相交于轴 g 上一点 X，由相似三角形得

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{AX}{BX}, \quad \frac{A'A'_0}{B'B'_0}=\frac{A'X}{B'X}.$$

但

$$\frac{AX}{BX}=\frac{A'X}{B'X},$$

故有

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A'_0}{B'B'_0},$$

交换比例外项得

$$\frac{A'A'_0}{AA_0}=\frac{B'B'_0}{BB_0}=\text{常数 } k,$$

这常数 k 随给定的透视仿射而定.

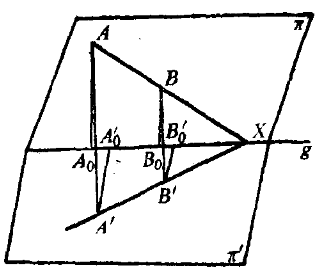

图 1.6

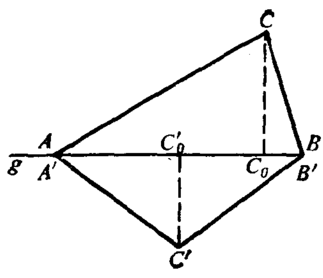

图 1.7

利用这引理，我们证明：

定理 5 在仿射变换下，任何一对对应三角形面积之比等于常数．换句话说，任意两个三角形面积之比是仿射不变量.

证明 先对透视仿射证明这个定理，再推广到一般仿射．证

明分为两步.

第一步：设对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 有两对对应顶点 A 和 A', B 和 B' 重合在透视仿射对应轴 g 上(图 1.7).

由第三对对应顶点 C 和 C' 在两个三角形各自的平面上向对应轴 g 作垂线 CC_0 和 $C'C'_0$，则

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{C'C'_0}{CC_0}.$$

由引理，等式右端为一常数 k，所以 $\triangle A'B'C'=k\triangle ABC$.

第二步：一般情况.

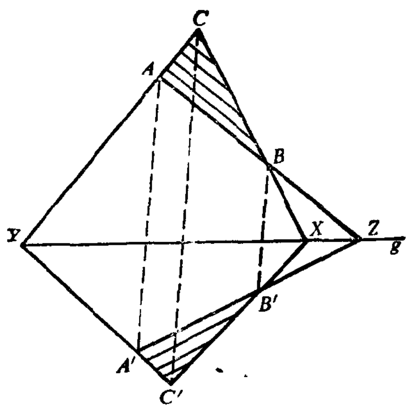

图 1.8

如图 1.8 所示，$\triangle ABC$ 与其透视仿射对应三角形$\triangle A'B'C'$中，三对对应边相交于对应轴 g 上. 由第一步证明得

$$\begin{aligned}\triangle A'B'C'&=\triangle C'YX+\triangle B'XZ-\triangle A'YZ\\&=k\triangle CYX+k\triangle BXZ-k\triangle AYZ\\&=k(\triangle CYX+\triangle BXZ-\triangle AYZ)\\&=k\triangle ABC.\end{aligned}$$

当$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有一对对应边例如 AB 和 $A'B'$ 与 g 平行时，点 Z 不存在，但易见定理仍成立.

对于一回平行射影即透视仿射证明了定理，我们进一步对于一般仿射证明这定理.

设平面 π_1 上的三角形 $\triangle_1$ 经过透视仿射 T_1 变换为平面 π_2 上的三角形 $\triangle_2$. $\triangle_2$ 经过透视仿射 T_2 变换为平面 π_3 上的三角形 $\triangle_3$, 以下类推，直至最后变换为平面 π_n 上的三角形 $\triangle_n$. 同样平面 π_1 上的三角形 σ_1 施用同一串透视仿射变换为 π_n 的三角形 σ_n. 设引理中所说的常数顺次为 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$, 于是按已证部分，若置 $k_1k_2\cdots k_{n-1}=k$(常数)，则有

$$\triangle_2=k_1\triangle_1,\ \triangle_3=k_2\triangle_2,\ \cdots,\ \triangle_n=k_{n-1}\triangle_{n-1},$$

从而有 $\triangle_n=k\triangle_1$; 同理有 $\sigma_n=k\sigma_1$.

所以有
$$\frac{\triangle_1}{\sigma_1}=\frac{\triangle_n}{\sigma_n}.$$

系 1 在仿射变换下，任何一对对应多边形面积之比等于常数. 换句话说，任意两个多边形面积之比是仿射不变量.

为了证明，只要把多边形分解成三角形之和.

系 2 在仿射变换下，任意两条封闭凸曲线所围成的面积之比是仿射不变量.

为了证明，用 A 和 A' 表示在仿射变换下一对对应的封闭曲线所围成的面积，S_n 和 S'_n 是这一对封闭曲线的内接 n 边形的面积，它们是相互对应着的. 在 $n\to\infty$ 并且各边趋于零的条件下，

$$A=\lim_{n\to\infty}S_n,\qquad A'=\lim_{n\to\infty}S'_n;$$

但已证

$$S'_n=kS_n,$$

取极限得

$$A'=kA.$$

仿此用 B' 和 B 表示另外一对对应的封闭曲线所围成的面积，则 $B'=kB$. 所以有

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}.$$

1.3　平面到自身的透视仿射

设 T_1 为从平面 π 到 π_1 的透视仿射，射影方向为 l_1；T_2 为从平面 π_1 到 π 的透视仿射，射影方向为 l_2（图 1.9）．T_1 将 π 上一点 A 映射为 π_1 上的点 A_1，$AA_1 /\!/ l_1$；T_2 将 π_1 上的点 A_1 射回为 π 上一点 A'，$A_1A' /\!/ l_2$．所以透视仿射变换 T_1 和 T_2 的乘积 $T=T_2T_1$ 将 π 上的点 A 变换为本身上的点 A'．同样，设 $T_1(B)=B_1$，$T_2(B_1)=B'$．于是仿射变换 T 具有这样的性质，它将 π 上的点变为 π 上的点：$T(A)=A'$，$T(B)=B'$，它还将 π 上的直线 $a=AB$ 变为 π 上的直线 $a'=A'B'$，即是说，T 保留同素性和结合性．

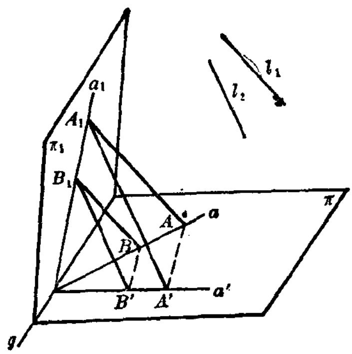

图 1.9

T_1 将 π 上的相交直线 a 和 b 变换为 π_1 上的相交直线 a_1 和 b_1，T_2 把 π_1 上这两相交直线 a_1 和 b_1 变回为 π 上两相交直线 a' 和 b'，因而 T 将 π 上的相交直线 a 和 b 变为 π 自身上的相交直线 a' 和 b'．

同样，T 将 π 上的平行线变为 π 自身上的平行线．

由于 T_1 和 T_2 保留简比，所以 T 保留简比．

由于 $AA_1 /\!/ l_1 /\!/ BB_1$，$A_1A' /\!/ l_2 /\!/ B_1B'$，所以平面 $AA_1A' /\!/$ 平面 BB_1B'．这两平行平面和 π 的交线 AA' 和 BB' 于是平行，即是说，在变换 T 下，对应点的联线 AA'，BB' 具有固定的方向．

显然 π 和 π_1 的交线 g 上每一点经过 T 不变．

我们称T为平面π到自身的透视仿射，它将点变为点，直线变为直线，保留接合性，保留平行性，保留简比，保留平行线段的比，保留两图形面积的比，并且对应点的联线相平行，还有一条直线g，它上面的每一点为自对应点。

g称为平面到自身的透视仿射对应轴，AA'给出透视仿射的方向。

一对对应直线或者相交在对应轴上，或都与对应轴平行。

定理 平面内的透视仿射由对应轴与一对对应点完全决定。

证明 设已知对应轴g与一对对应点A，A'. B为平面上任一已知点，我们要证明B的透视仿射象B'可以唯一地确定。

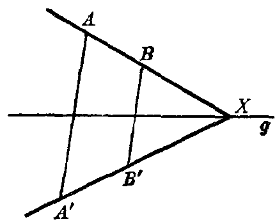

图 1.10

联直线AB，设与对应轴相交于点X，联X与A'，则AX与$A'X$是一对对应直线。过B引AA'的平行线，与B对应的点B'就只能是这直线与$A'X$的交点，所以是唯一确定的。

请读者自行考虑，当$AB /\!/ g$或B在AA'上时，B'如何确定？

1.4 平面内的一般仿射

平面到自身的有限回透视仿射链组成平面内的仿射或仿射变换。凡平面到平面的仿射所具备的性质，平面到自身的仿射也具备。

定理 给定平面内的两个三角形，至多利用三回透视仿射可使一个三角形变为另一三角形。

证明 把$\triangle ABC$(图 1.11)平移到$\triangle A'B_1C_1$使顶点A落在A'上。我们把平移看作透视仿射的特例，记作T_1，因为这时对应轴

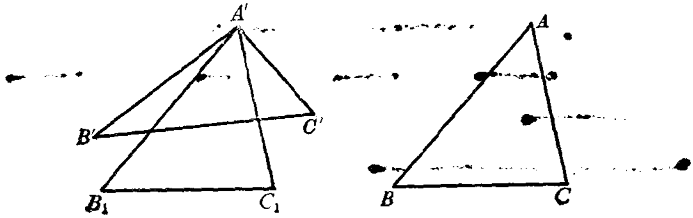

图 1.11

虽不存在(对应边相互平行),但对应顶点的联线是相互平行的. 然后以直线 $A'B_1$ 作为透视仿射对应轴, 以 $C_1\to C'$ 作为一对对应点确定一个透视仿射 T_2. 最后以 $A'C'$ 为对应轴, 以 $B_1\to B'$ 作为一对对应点确定一个透视仿射 T_3. 这样,

$$T_1(ABC)=A'B_1C_1,\qquad T_2(A'B_1C_1)=A'B_1C',$$
$$T_3(A'B_1C')=A'B'C'.$$

置 $T=T_3T_2T_1$, 则 T 为仿射变换, 且 $T(ABC)=A'B'C'$.

如果两三角形有一对顶点重合, 那末利用两回透视仿射就够了, 如果有两对顶点重合, 利用一回透视仿射就够了.

经过仿射变换可以互相转换的图形称为仿射等价的, 所以任两三角形是仿射等价的.

平面仿射几何基本定理　设 P_1, P_2, P_3 是平面内不共线的任意三点; P_1', P_2', P_3' 也是不共线的任意三点. 那末存在一个也只一个仿射变换 T, 使 $T(P_i)=P_i'\ (i=1,2,3)$. 换句话说, 三对对应点(原象不共线, 映象也不共线)决定唯一仿射变换.

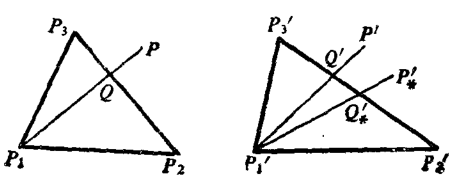

图 1.12