高等学校教学用书

天体力学和天文动力学

郑学塘　倪彩霞　编著

北京师范大学出版社

P13
ZXT

高等学校教学用书

天体力学和天文动力学

郑学塘　倪彩霞　编著

空间科学与应用研究中心
1990.4.2
藏书

北京师范大学出版社

105938

责任编辑　李桂福

高等学校教学用书

天体力学和天文动力学

郑学塘　倪彩霞　编著

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本: 850×1168　1/32　印张: 14.875　字数: 365千

1989年10月第1版　　1989年10月第1次印刷

印数: 1—1 000

ISBN 7-303-00598-6/P·4

定　价: 3.55 元

前　言

本书是根据编著者在北京师范大学为天文系本科生、研究生和进修教师讲授的《天体力学》和《人造天体轨道理论》讲义改编而成的. 它系统地介绍了天体力学和天文动力学中的基本理论和方法；同时还利用这些方法研究了各种自然天体和人造天体的运动.

全书共分九章. 第一章介绍各种天体的引力场位函数的形式. 第二章讲述天体力学和天文动力学中最基本的问题——二体问题. 第三章介绍利用现代观测手段所得到的各种观测资料，计算天体的初始轨道以及作轨道改进的方法. 第四章讲述天体力学中最一般的问题——N体问题. 第五章讲述天体摄动运动方程的建立以及分析解法概要，作为应用和发展还介绍了行星和月球的运动以及天体运动中的相对论效应. 第六章介绍摄动运动方程的各种数值解法. 第七、八、九章属于天文动力学中的基本问题. 第七章介绍人造地球卫星在地球引力、大气阻力、太阳光压和日、月引力等作用下的运动轨道以及它的位置预报. 第八章讲述天体力学中常用的分析解法——正则变换理论和中间轨道理论，并利用这些理论来讨论人造卫星的运动. 第九章介绍月球火箭和行星际火箭在各种摄动力的作用下于地月空间和行星际空间中的运动轨道. 在编写过程中，我们注意到尽可能地反映天体力学和天文动力学近年来国内、外最新的研究成果.

本书第一、五(第7、8、9和10节)、七、八、九章由郑学塘副教授编写，其余各章节均由倪彩霞副教授编写. 北京天文馆名誉馆长陈晓中教授仔细审阅了全部书稿，并给于我们热情的鼓励和支持，北京师范大学出版社编辑和有关同志为本书的出版做了许多工作，笔者在此表示真诚的感谢.

编者

1987年8月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　天体引力场位函数

天体引力场位函数是反映天体引力场情况的量．利用它可以得到天体在这个引力场中的运动情况．因此天体引力场位函数的形式是天体力学和天文动力学中一个重要而又基本的问题，本章首先给出位函数的定义并介绍天体引力场位函数的几种基本形式；然后具体讨论地球引力场，盘和环状天体引力场位函数的形式．

§1　位函数的定义

我们任选一个惯性坐标系 xyz，如图 1-1 所示．质量为 m_i 的质点 P_i 对空间中任一质点 P 具有引力．根据牛顿第二运动定律和万有引力定律，可以得到 P 在 P_i 的引力作用下的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -Gm_i\frac{\boldsymbol{\Delta}_i}{\Delta_i^3}. \tag{1.1}$$

其中 G 是万有引力常数，$\boldsymbol{\Delta}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i$ 是 P 相对 P_i 的位置矢．

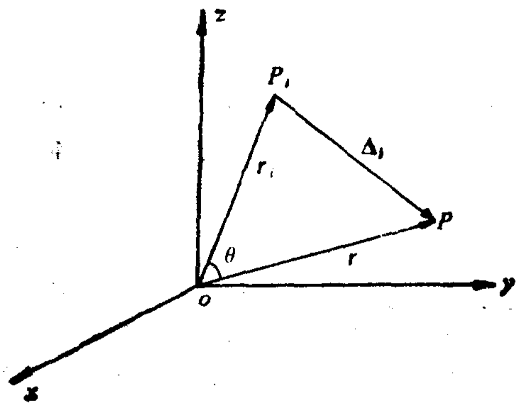

图　1-1

如果有 n 个质点 P_1、P_2、……、P_n，它们的质量分别为 m_1、m_2、……m_n，则 P 点在这 n 个质点的引力作用下的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\sum_{i=1}^{n} Gm_i \frac{\boldsymbol{\Delta}_i}{\Delta_i^3}. \tag{1.2}$$

为了方便起见，我们可以引入一个记号

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{Gm_i}{\Delta_i}. \tag{1.3}$$

采用哈密顿（Hamilton）算子，数量 $\frac{1}{\Delta_i}$ 的梯度是 $\nabla\left(\frac{1}{\Delta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\Delta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}\left(\frac{1}{\Delta_i}\right) = -\frac{\boldsymbol{\Delta}_i}{\Delta_i^3}$. 利用 (1.3) 式，可将 (1.2) 式改写为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \nabla V. \tag{1.4}$$

由 (1.3) 式所定义的 V 称为这 n 个质点对 P 点的位函数，从 (1.4) 式可以看出位函数对 P 点坐标的梯度就是它的引力加速度.

对于具有一定形状和大小的天体，我们可以把它划分为许多小体元，每个体元都能视为一个质点. 设任一小体元的质量是 dM，它与 P 点的距离为 ρ，则由 (1.3) 式可得该天体对 P 点的位函数应当是:

$$V = \iiint \frac{G\,dM}{\rho}. \tag{1.5}$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别为 P 点与体元 dM 相对于坐标原点(通常取天体的质心为坐标原点)的位置矢，体积分是对整个天体进行的.

由 (1.3) 式可以看出某质点系对 P 点的位函数只与各个质点的质量和它们到 P 点的距离有关而与坐标系的选择无关. 同样由 (1.5) 式可以看出一个天体对 P 点的位函数只与这个天体的质量和它到 P 点的距离以及天体的形状、内部密度分布有关，而与坐标系的选择无关. 如果我们知道了某个天体引力场的位函数，则由

(1.4) 式可以得出它所产生的引力加速度． 因此位函数是一个反映引力场情况的量．

根据理论力学知识有：

(1) 均匀球壳对其外一点的位函数与把球壳质量集中在球心的质点对该点的位函数一样，因此均匀球壳对其外产生的引力场可以认为把球壳质量集中在球心的质点所产生的引力场．

(2) 均匀正球体对其外一点的位函数与把球体质量集中在球心的质点对该点的位函数一样，因此均匀正球体对其外产生的引力场可以认为把球体质量集中在球心的质点所产生的引力场．

(3) 等密度面为同心球层的正球体对其外一点的位函数与把球体质量集中在球心的质点对该点的位函数一样．因此这种正球体对其外产生的引力场可以认为把球体质量集中在球心的质点所产生的引力场．

(4) 均匀球壳对其内任一点的位函数都是常数，因此它对其内任一点所产生的引力加速度为零．

§2　天体引力场位函数

上节已经得到了天体对其外一点的位函数，我们不难证明由 (1.5) 式所定义的天体引力场位函数是满足拉普拉斯 (Laplace) 方程的．

事实上根据 (1.5) 式有：

$$\mathrm{d}V=\frac{G\mathrm{d}M}{\rho}. \tag{1.6}$$

$\frac{1}{\rho}$ 的梯度是 $\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$，再对它求散度结果是 $\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right)=\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}+\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho^3}\right)=\frac{3}{\rho^3}-\frac{3}{\rho^3}=0$，故将 (1.6) 式二边求梯度后再求散度的结果为

$$\nabla^2\mathrm{d}V=\nabla\cdot\nabla\mathrm{d}V=G\mathrm{d}M\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)=0. \tag{1.7}$$

(1.7) 式对天体内任何体元都成立.

在 (1.5) 式中，积分是对整个天体进行的，因此积分仅与体元的位置 $\boldsymbol{r}'$ 有关而与 P 点的位置 $\boldsymbol{r}$ 无关. 但是算符 ∇^2 是对 $\boldsymbol{r}$ 进行的，它与 $\boldsymbol{r}'$ 无关. 根据积分号下求微商的法则可以对易这二种运算秩序，结果可得：

$$\nabla^2 V = \nabla^2 \iiint \mathrm{d}V = \iiint \nabla^2 \mathrm{d}V = 0. \tag{1.8}$$

上式说明天体对其外一点的位函数 V 是满足拉普拉斯方程的，它是一个调和函数. 另外，也反映了天体的引力场是一种保守场，它既无沟也无源. 很自然，在这种引力场中运动的质点应当具有能量积分和动量矩积分.

由于天体引力场位函数是满足拉普拉斯方程的，因此我们可以通过求解拉普拉斯方程得到它的具体形式.

设有曲面坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)，它与直角坐标 (x, y, z) 的关系为

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

我们可得在这空间中的线元的平方是：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\mathrm{d}\xi_i \mathrm{d}\xi_j. \tag{1.9}$$

其中

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i}\frac{\partial x}{\partial \xi_j} + \frac{\partial y}{\partial \xi_i}\frac{\partial y}{\partial \xi_j} + \frac{\partial z}{\partial \xi_i}\frac{\partial z}{\partial \xi_j}. \tag{1.10}$$

它被称为该空间的度规张量. 如果该曲面坐标系是正交的话，则有

$$g_{ij} = 0. \quad (i \neq j)$$

根据矢量分析，可以得到在正交曲面坐标系中拉普拉斯方程的形式是：

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{ii}}\frac{\partial V}{\partial \xi_i}\right) = 0. \tag{1.11}$$

其中 $g = \|g_{ij}\| = g_{11}g_{22}g_{33}$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

在天文上，我们常用的正交曲面坐标系有三种：球面坐标系、柱面坐标系和椭球坐标系.下面分别求出在这三种曲面坐标系中，天体引力场位函数的具体形式。

(1) 球面坐标系 (r, φ, λ).

这时取 $\xi_1 = r$，$\xi_2 = \varphi$，$\xi_3 = \lambda$，它们与直角坐标关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\lambda \\ y &= r\cos\varphi\sin\lambda \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{1.12}$$

这时的度规张量为

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

相应的 $g = r^4\cos^2\varphi$. 由(1.11)式可得球面坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} = 0. \tag{1.13}$$

(1.13)式是有三个自变量 (r, φ, λ) 的二阶偏微分方程，一般采用分离变量法求解. 为此令

$$V(r, \varphi, \lambda) = R(r)\Phi(\varphi)\Lambda(\lambda). \tag{1.14}$$

将它代入(1.13)式后，可将偏微分方程化为三个二阶常微分方程：

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0. \tag{1.15}$$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dP}{d\mu} + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-\mu^2}\right]P = 0. \tag{1.16}$$

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + k^2\Lambda = 0. \tag{1.17}$$

其中 n, k 都是正整数，$\mu = \sin\varphi$，$P(\mu) = \Phi(\varphi)$.

(1.15) 式是欧拉 (Euler) 方程，其通解为

$$R(r)=\begin{Bmatrix} r^{n} \\ r^{-(n+1)} \end{Bmatrix}. \tag{1.18}$$

(1.16)式是缔合(或连带)勒让德(Associate Legendre)方程，其解为

$$\Phi(\varphi)=P_n^k(\sin\varphi). \tag{1.19}$$

其中 $P_n^k(\sin\varphi)$ 是以 $\sin\varphi$ 为引数的 n 阶 k 级缔合勒让德函数.

(1.17) 式是简谐振动方程，通解为

$$\Lambda(\lambda)=\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}. \tag{1.20}$$

将(1.18)—(1.20)式代入(1.14)式后，可得在球面坐标系中，天体引力场位函数的形式是:

$$V(r,\varphi,\lambda)=P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r^{n} \\ r^{-(n+1)} \end{Bmatrix}. \tag{1.21}$$

式中 $Y(\varphi,\lambda)=P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}$ 称为球面函数或简称球函数，$Y(\varphi,\lambda)\begin{Bmatrix} r^{n} \\ r^{-(n+1)} \end{Bmatrix}$ 称为球体函数. 通常天体引力场位函数应满足边界条件: 当 $r\to\infty$ 时，$V\to 0$，故(1.21)式变为

$$V(r,\varphi,\lambda)=r^{-(n+1)}P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}. \tag{1.22}$$

(2) 柱面坐标系 (r,λ,z).

这时取 $\xi_1=r$，$\xi_2=\lambda$，$\xi_3=z$，它们与直角坐标关系为

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\lambda \\ y&=r\sin\lambda \\ z&=z \end{aligned}\right\}. \tag{1.23}$$

相应的度规张量及行列式的值分别是:

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad g=r^2.$$

拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{1.24}$$

同样令

$$V(r,\lambda,z)=R(r)\Lambda(\lambda)Z(z). \tag{1.25}$$

可将 (1.24) 式化为三个二阶常微分方程:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(\omega^2-\frac{k^2}{r^2}\right)R=0\\&\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\lambda^2}+k^2\Lambda=0\\&\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}-\omega^2Z=0\end{aligned}\right\}. \tag{1.26}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\left(\omega^2+\frac{k^2}{r^2}R\right)=0\\&\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\lambda^2}+k^2\Lambda=0\\&\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+\omega^2Z=0\end{aligned}\right\}. \tag{1.27}$$

其中 k 和 ω 都是正整数.

在 (1.26) 式中令 $\rho=\omega r$, 在 (1.27) 式中令 $\rho=i\omega r$, 则都可将它们的第一式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(1-\frac{k^2}{\rho^2}\right)R=0. \tag{1.28}$$

(1.28) 式是贝塞尔 (Bessel) 方程,它的解为

$$R(\rho)=J_k(\rho). \tag{1.29}$$

式中 $J_k(\rho)$ 是以 ρ 为引数的 k 阶第一类贝塞尔函数或简称为贝塞尔函数. 若 $\rho=i\omega r$ 时 $J_k(\rho)=J_k(i\omega r)=I_k(\omega r)$, 这里的 $I_k(\omega r)$ 是以 ωr 为引数的 k 阶第一类虚宗量贝塞尔函数. 于是可得在柱面坐标系中,天体引力场位函数的形式为

$$V(r, \lambda, z) = J_k(\omega r)\begin{Bmatrix}\cos k\lambda \\ \sin k\lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{\omega z} \\ e^{-\omega z}\end{Bmatrix}. \tag{1.30}$$

或者

$$V(r, \lambda, z) = I_k(\omega r)\begin{Bmatrix}\cos k\lambda \\ \sin k\lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos \omega z \\ \sin \omega z\end{Bmatrix}. \tag{1.31}$$

如果考虑到它应满足边界条件：当 $z \to \infty$ 时，$V \to 0$，这时天体引力场位函数应为

$$V(r, \lambda, z) = e^{-\omega z}J_k(\omega r)\begin{Bmatrix}\cos k\lambda \\ \sin k\lambda\end{Bmatrix} \tag{1.32}$$

(3) 椭球坐标系 (λ, μ, ν)。

这时取 $\xi_1 = \lambda$，$\xi_2 = \mu$，$\xi_3 = \nu$，它们与直角坐标关系为

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{aligned}\right\}. \tag{1.33}$$

式中 a、b、c 是椭球的三个半轴，有 $a > b > c$；λ、μ、ν 的变化范围为 $\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$。

相应有

$$g_{ij} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{A(\lambda)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{A(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{A(\nu)} \end{pmatrix}$$

和

$$g = -\frac{(\lambda-\mu)^2(\lambda-\nu)^2(\mu-\nu)^2}{64A(\lambda)A(\mu)A(\nu)}.$$

其中 $A(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$，$A(\mu)$ 和 $A(\nu)$ 是将

其中的自变量 λ 分别改为 μ 和 ν。

这时的拉普拉斯方程为

$$(\mu-\nu)\sqrt{A(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{A(\lambda)}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)$$
$$+(\lambda-\nu)\sqrt{-A(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{-A(\mu)}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)$$
$$+(\lambda-\mu)\sqrt{A(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{A(\nu)}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)=0. \quad (1.34)$$

同样令

$$V(\lambda,\mu,\nu)=\Lambda(\lambda)M(\mu)N(\nu). \quad (1.35)$$

可将 (1.34) 式化为三个二阶常微分方程

$$\left.\begin{aligned}
&4\sqrt{A(\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sqrt{A(\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right)-[n(n+1)\lambda+c]\Lambda=0\\
&4\sqrt{-A(\mu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sqrt{-A(\mu)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}\right)+[n(n+1)\mu+c]M=0\\
&4\sqrt{A(\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\sqrt{A(\nu)}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu}\right)-[n(n+1)\nu+c]N=0
\end{aligned}\right\}. \quad (1.36)$$

其中 n, c 为正整数. (1.36) 式是三个形式相似的方程，它们称为拉梅 (Lamé) 方程，其解为

$$\Lambda(\lambda)=E_n^m(s). \quad (1.37)$$

式中 $E_n^m(s)$ 是以 s 为引数的第一类拉梅函数. 其中 $m=-n$, $-n+1,\cdots,0,\cdots,n-1,n$; $s=\dfrac{a^2+\lambda}{a^2-b^2}$.

为了方便起见将 $E_n^m(s)$ 简记为 $E_n^m(\lambda)$，则类似有 $M(\mu)=E_n^m(\mu)$, $N(\nu)=E_n^m(\nu)$，只是将 s 中的 λ 相应改为 μ 和 ν. 于是可得在椭球坐标系中，天体引力场位函数的形式为

$$V(\lambda,\mu,\nu)=E_n^m(\lambda)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu). \quad (1.38)$$

在自然界中，绝大多数天体的形状都接近于正球体，故最常用的位函数形式是 (1.22) 式. 但是天体都有自转，有些自转角速度还比较大，它们的形状更接近于椭球体，因此也有采用位函数的形

式是(1.38)式的．例如苏联的杜波申（Дубошин）曾利用它讨论人造卫星在地球引力场中的运动．自然界中也还有些天体或者系统呈环状或者盘状，可能采用位函数的形式为(1.32)式更好些。对于不同的研究对象应当采用不同的位函数形式。

§3 地球引力场位函数

在下章§5中，我们将会证明下面一个定理：设 $f(y)$ 和 $\phi(y)$ 在某区域内和边界上是解析的，对于域内任一点都有关系式 $y=x+\alpha\phi(y)$ 成立，其中 α 是参变量，ϕ 是 y 的已知函数，则能将 y 的任意函数 $f(y)$ 展开为 α 的幂级数，其系数仅含有 x。具体形式为

$$F(y)=F(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\phi^n(x)\frac{dF(x)}{dx}\right]. \tag{1.39}$$

这个定理称为拉格朗日（Lagrange）定理，(1.39)式称为拉格朗日级数。

下面利用这个定理得出距离倒数的展式。

设 P 点相对体元的位置矢 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，于是 $\rho^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta$，其中 θ 为 P 点和体元相对原点的张角．欲令 $\frac{r'}{r}=\alpha<1$，$\cos\theta=\mu$，则距离 ρ 的倒数为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}(1-2\mu\alpha+\alpha^2)^{-1/2}. \tag{1.40}$$

在(1.39)式中取 $\phi(y)=\frac{1}{2}(y^2-1)$，则有 $y=x+\frac{\alpha}{2}(y^2-1)$。由此可以解出 $y=\frac{1}{\alpha}(1-\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2})$，得到 $\frac{dy}{dx}=(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-1/2}$．令 $f(y)=y$，则 $f(x)=x$，$\phi(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$，利用(1.39)式可得：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com