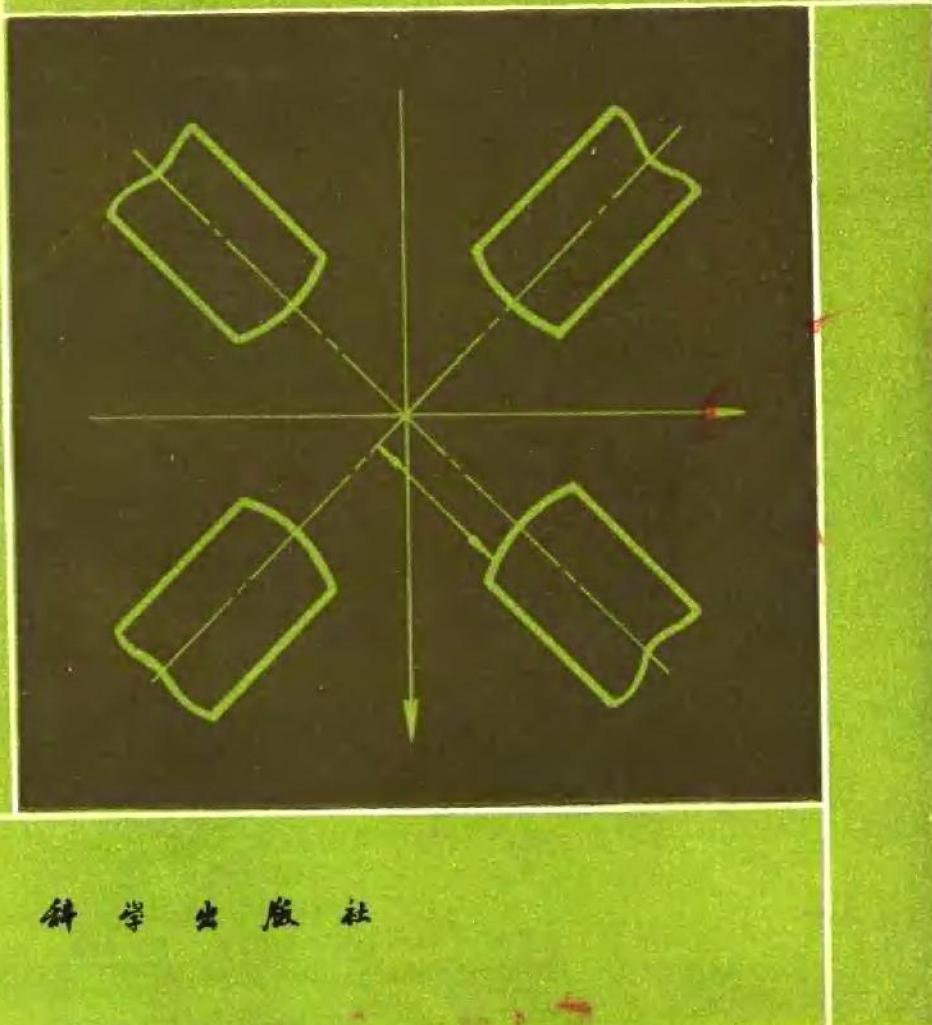


实验物理学丛书

# 电子和离子光学原理 及象差导论

西门纪业 著



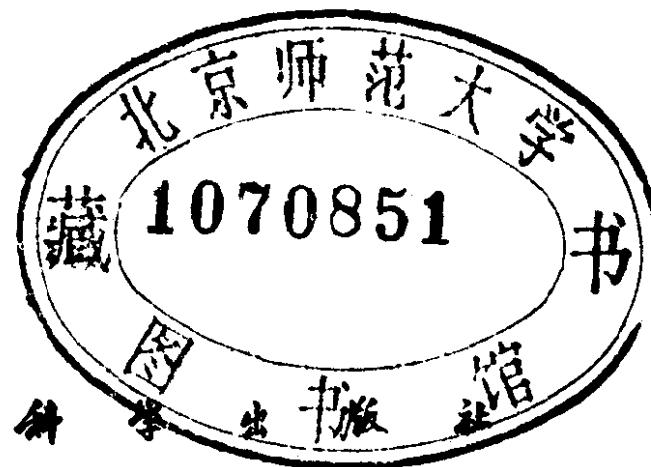
科学出版社

实验物理学丛书

# 电子和离子光学原理 及象差导论

西门纪业 著

JY11115/20



1983

## 内 容 简 介

电子和离子光学是研究带电粒子在电磁场中聚焦、成象和偏转等规律的一门学科，利用这些规律可以设计制造各种电子和离子光学器件、仪器和装置，因而在电子学、电子显微学、质谱学、表面物理、高能物理、等离子体物理等领域有着广泛应用。本书是全面阐述这一学科基本理论的一本专著，重点介绍电子和离子光学象差的基本概念、基本理论和计算方法，并讨论了典型的电子和离子光学系统的象差图象，以及测量和矫正象差的方法。

本书可供物理和电子学有关方面的科技人员，电子和离子光学器件、仪器和装置的设计和使用人员以及高等院校有关专业的师生参考。

实验物理学丛书  
**电子和离子光学原理**

及象差导论

西门纪业 著  
责任编辑 王鸣阳

科学出版社出版  
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1983年1月第一版 开本：850×1168 1/32  
1983年1月第一次印刷 印张：10  
印数：0001—5,000 字数：258,000

统一书号：13031·2128  
本社书号：2907·13—3

定 价：1.85 元

## 《实验物理学丛书》编委会

主 编 钱临照

副主编 王淦昌 王大珩 柯 俊 洪朝生 管惟炎

编 委 王之江 王业宁 王守觉 王华馥 王祝翔 许顺生

华中一 葛清泉 何寿安 吴自勤 张志三 汤定元

杨 楷 杨顺华 项志遴 姜承烈 徐其昌 徐叙瑢

章 综 郭可信 龚祖同 黄兰友 梅镇岳 程晓伍

薛鸣球 魏荣爵

# 序

1979年，作者曾与葛肇生合作编写出版过《电子显微镜的原理和设计》一书，在那本书中曾涉及到电子光学的一些内容，但由于侧重点不同，没有对电子和离子光学作系统深入的论述。1979年至1980年，作者曾在北京大学对有关专业研究生讲授电子和离子光学课程，为此编写的一套讲义曾少量铅印过，供研究生和一些教师以及科技人员参考。由于一些同志的鼓励，也由于《实验物理学丛书》编委会特别是主编钱临照教授的促进，作者花了一年多时间把原讲义加以修改和重新整理，编写成本书。

作者在本书中试图系统地论述电子和离子光学的各个方面，阐明旋转对称电子光学系统、电磁偏转系统、电磁多极系统和离子光学系统的基本原理和象差理论，以及计算机辅助设计方法。书中运用变分原理处理电子和离子光学中的聚焦、成象、偏转和象差等问题，并用矢量描写轨迹，用矩阵表示象差，从而形成了比较完整的理论体系。作者这样做，是希望向研究生和有关科技人员提供一本论述电子和离子光学的比较详尽的专门著作。

本书也是作者从事电子和离子光学研究工作和教学工作的一个阶段性总结，其中除了综述国内外有关的文献资料外，还写进了自己的一些体会和研究结果，它们大多在国内外科技期刊上发表过，或者在国内外学术会议上报告过。这些结果主要是：磁透镜的非旋转对称微扰象差，高斯光学参量线性变换对象差的影响（第一章）；磁透镜、静电透镜与磁偏转器复合系统的性质和象差理论，根据高斯轨迹参量线性变换性质引进象差生成函数来描写它的象差（第二章）；采用傅里叶展开方法将空间三维问题化为一系列二维问题来求解电磁多极场（第三章）；重叠的环形电场和非均匀磁场的二级离子轨迹和象差的分析和计算（第四章）等。

目前全面介绍电子和离子光学的著作尚不多见，在国内无论著作或翻译，都尚未出版过。因此，本书在某种意义上说也是一种尝试。作者诚恳地希望广大读者对本书提出批评意见。

作 者

1981年1月于北京大学

# 目 录

<b>绪论</b> .....	1
0-1 电子和离子光学的发展 .....	2
0-2 电子和离子光学的基础知识和基本方程 .....	4
<b>第一章 电子光学成象系统及其象差</b> .....	10
1-1 基本原理 .....	10
1-1-1 旋转对称电磁场 .....	10
1-1-2 静场中带电粒子的轨迹 .....	15
1-1-3 高斯光学性质 .....	18
1-1-4 电子透镜 .....	27
1-2 旋转对称电子光学系统的几何象差 .....	35
1-2-1 几何象差的概念和计算公式 .....	35
1-2-2 几何象差的图象 .....	45
1-3 色差、非旋转对称象差和衍射象差 .....	53
1-3-1 色差 .....	53
1-3-2 非旋转对称象差 .....	56
1-3-3 衍射象差 .....	61
1-4 象差的测量和矫正 .....	69
1-4-1 象差的测量 .....	69
1-4-2 象差的矫正 .....	74
1-5 旋转对称透镜的渐近象差 .....	75
1-5-1 渐近象差的概念及其计算 .....	75
1-5-2 多透镜系统象差的传递性质 .....	81
1-6 高斯轨迹参量的线性变换及其对象差的影响 .....	87
参考文献 .....	90
<b>第二章 电磁偏转系统及其象差</b> .....	92
2-1 磁偏转系统的基本原理 .....	92

2-1-1	磁偏转系统的结构和磁场分布 .....	92
2-1-2	变分原理和轨迹方程 .....	95
2-1-3	高斯偏转性质 .....	96
2-2	磁偏转系统的三级象差 .....	98
2-2-1	三级象差公式和象差系数 .....	98
2-2-2	三级象差的分类和图象 .....	101
2-2-3	磁偏转象差的测量 .....	107
2-3	静电偏转系统的基本原理和象差 .....	109
2-3-1	静电偏转系统的结构和电场分布 .....	109
2-3-2	变分原理和轨迹方程 .....	111
2-3-3	三级象差的分类和图象 .....	112
2-4	磁透镜与磁偏转器的复合系统及其象差 .....	113
2-4-1	磁场和变分函数的普遍展开式 .....	113
2-4-2	高斯轨迹和三级象差方程 .....	116
2-4-3	磁复合系统的三级象差: $-\frac{\partial F_{4C}}{\partial V}$ 所代表的部分 .....	120
2-4-4	磁复合系统的三级象差: $-\frac{\partial F_{4D}}{\partial V}$ 所代表的部分 .....	123
2-5	静电透镜与磁偏转器的复合系统及其象差 .....	126
2-5-1	电场和变分函数的展开式, 轨迹方程 .....	127
2-5-2	静电复合系统的三级象差 .....	128
2-6	复合系统理论的应用 .....	130
2-6-1	存在预偏转的复合系统的象差 .....	131
2-6-2	扫描束电子光学系统中使用的可动物镜系统 .....	133
参考文献	.....	134
<b>第三章 电磁多极系统及其象差</b>	.....	136
3-1	电场和磁场的普遍表达式 .....	136
3-1-1	非旋转对称电场中电位的级数展开式 .....	136
3-1-2	非旋转对称磁场中磁标位和磁矢位的级数展开式 .....	140
3-2	电磁多极场的分析和计算 .....	144
3-2-1	圆柱坐标系中电位和磁标位的普遍表达式 .....	144
3-2-2	电磁多极场的分析和计算 .....	147
3-3	电磁多极系统的电子光学性质和几何象差 .....	149

3-3-1	普遍的变分函数及其展开式 .....	149
3-3-2	高斯轨迹方程和高斯光学性质 .....	153
3-3-3	象差方程和实在的象差系数(球差和畸变) .....	157
3-3-4	球差和畸变的象差图象 .....	160
3-4	四极透镜的渐近象差 .....	162
3-5	电磁多极系统的色差 .....	166
3-6	电磁多极系统的应用——矫正象差 .....	169
3-6-1	固定束电子光学系统象差的矫正 .....	170
3-6-2	扫描束电子光学系统象差的矫正 .....	173
3-7	多极系统加工装配误差及其象差 .....	176
3-7-1	四极透镜磁标位分布和一级近似轨迹方程 .....	176
3-7-2	象差方程和象差系数 .....	180
	参考文献 .....	181
	<b>第四章 离子光学系统及其象差 .....</b>	<b>183</b>
4-1	基本原理 .....	184
4-1-1	离子光学系统的场分布 .....	184
4-1-2	变分原理和轨迹方程 .....	192
4-2	离子透镜及其高斯光学性质 .....	197
4-2-1	垂直出入射时扇形场的高斯光学 .....	197
4-2-2	倾斜出入射时扇形场的高斯光学 .....	203
4-2-3	双聚焦质谱仪器的一级理论 .....	206
4-3	离子光学的二级象差理论 .....	212
4-3-1	圆柱电容器静电场中的二级离子轨迹和象差 .....	212
4-3-2	环形电容器静电场中的二级离子轨迹和象差 .....	216
4-3-3	均匀磁场中的二级离子轨迹和象差 .....	220
4-3-4	非均匀磁场中的二级离子轨迹和象差 .....	223
4-3-5	重叠的环形电场和非均匀磁场中的二级离子轨迹和象 差 .....	227
4-4	离子光学二级象差理论的推广 .....	235
4-4-1	离子光学的矩阵表示方法 .....	238
4-4-2	倾斜出入射的情况 .....	242
4-4-3	曲线边界的情况 .....	248

4-4-4	边缘场的效应 .....	250
4-4-5	刘维定理及其推论 .....	258
4-5	双聚焦质谱仪器的发展 .....	261
	参考文献 .....	265
<b>第五章</b>	<b>电子和离子光学系统的计算机辅助设计方法 .....</b>	<b>267</b>
5-1	计算电磁场的有限差分法 .....	268
5-1-1	基本原理和计算公式 .....	268
5-1-2	逐次超张弛迭代过程 .....	270
5-1-3	电位、等位线和场强的计算 .....	272
5-2	计算多极场的傅里叶展开法 .....	276
5-2-1	多极场的傅里叶展开式 .....	276
5-2-2	多极场的边界类型和边界条件 .....	277
5-2-3	用逐次张弛法求解多极场的电(磁)位 .....	281
5-2-4	等位线和力线的描绘 .....	282
5-3	计算电磁场的有限单元法 .....	284
5-3-1	磁透镜标位的计算 .....	284
5-3-2	磁透镜整个磁路的计算 .....	288
5-3-3	存在磁饱和的透镜磁路的计算 .....	291
5-4	带电粒子轨迹的计算 .....	292
5-4-1	问题的提法 .....	292
5-4-2	龙格-库塔法 .....	294
5-4-3	哈明方法 .....	297
5-5	电子光学系统高斯光学参量和象差的计算 .....	299
5-5-1	高斯轨迹方程的计算 .....	300
5-5-2	高斯光学参量的计算 .....	301
5-5-3	象差系数的计算 .....	304
	参考文献 .....	306

## 绪 论

电子和离子光学是研究带电粒子在电磁场中聚焦、成象、偏转等规律的一门学科。为了研究和阐明这些规律，必须以经典力学、经典电动力学和光学作为理论基础，依据电子和离子在电磁场中的运动与光线在光学介质中传播之间的相似性，采用类似于光学的方法和概念（如变分原理、光程函数、折射率、射线、透镜和象差等），建立电子和离子光学的完整理论体系。

电子和离子光学的发展趋势在目前有几个值得注意的特点。第一，它正深入渗透到许多科学技术领域中去，引起越来越多的有关科技人员的注意。例如，在无线电电子学、电子显微学、质谱学、表面物理、材料科学、高能物理、等离子体物理等领域中，凡是涉及到产生、控制和利用带电粒子束的问题，都要广泛地用到这门学科的成果。第二，十几年来，这门学科在理论计算和实验方法上都有不少新的突破。从六十年代后期以来，由于采用了计算机，可以对各种电子和离子光学系统进行严格的和准确的计算和设计，这门学科取得了很大进展。在实验方法上，对电子和离子光学的一些基本参量的测量和象差的矫正（包括高斯光学参量测量，球差、色差、轴上象散的测定和矫正，分辨率的测定等），其精度也有了很大提高。第三，这门学科与生产实践的联系日益密切，并互相促进。从事设计、研制、生产和改进电子和离子光学器件（电子束器件和离子束器件）、仪器（电子显微镜和质谱仪）和装置（电子束曝光机和离子注入机）时，人们需要更多地运用这门学科的原理来指导自己的实践。与此同时，新器件、新仪器和新装置的出现，又为电子和离子光学开拓了一些新的研究方向，进一步促进了它的发展。

## 0-1 电子和离子光学的发展

早在十七世纪，费马便确立了光线传播的最短光程原理。以后，在1744—1748年，莫培督(Maupertuis)和欧拉在经典力学中又确立了粒子运动的最小作用原理。1834年，哈密顿揭示了力学和光学的相似性，提出了哈密顿原理。1864年，麦克斯韦建立了电磁理论。所有这些理论，都为电子和离子光学的建立作了理论上的准备。1897年，汤姆孙测定了电子的荷质比，肯定了电子的存在，并证实了阴极射线是一种电子流。到本世纪二十年代，德布罗意发现了粒子的波动性，从而揭示了电子的波动性及其与光波的相似性。

电子和离子光学理论正是在上述理论和实验基础上逐步建立起来的。1926年，布许(Busch)发表了关于磁聚焦的论文，指出旋转对称场可以使电子束折射，如同光学透镜对光线的作用一样。1932—1937年，德国的格拉叟(Glaser)和谢尔赤(Scherzer)发表了一系列讨论电子光学的理论文章。1934年，赫佐格(Herzog)发表了关于扇形场离子透镜的文章。所有这些工作，为电子和离子光学奠定了理论基础。

近半个世纪来，电子和离子光学的发展取得了丰硕的成果。下面分别介绍电子显微镜、质谱仪器和电子束器件等方面的发展，以说明理论与实践相互联系的过程。

第一台实验用的电子显微镜是1932—1933年间由德国的克诺尔(Knoll)和鲁斯卡(Ruska)制成的，在1934年它的分辨率就达到了500埃。1942年，英国制成了第一台实验用的扫描电子显微镜，到1965年有了商品出售。现代的高性能透射电子显微镜，点分辨率优于3埃，而晶格条纹分辨率已达到1—2埃，能够观察到重金属原子和大分子的图象，而且能直接拍摄到晶体的点阵象和结构象。目前，电子显微镜已广泛应用于冶金、矿物、地质、生物、医学、物理、化学等各个方面，并取得了许多重要成果。从六十年

代发展起来的超高压电镜(加速电压从一百万到三百万伏)，已能观察微米级厚度的金属和固体材料。扫描电镜的分辨率目前也已达到30—50埃，而且放大率连续可调，景深长，视场大，富于立体感，试样制备也比较方便。总之，由于电子显微镜结构的不断完善和分辨率不断提高，目前它已成为观察与研究物质微观结构的强有力工具。

另一种电子和离子光学仪器是质谱仪。虽然这种仪器的第一台实验样机早在1910年便已制成，然而一直到1935年，马托奇(Mattauch)和赫佐格制成了双聚焦质谱仪器，才标志着实用的质谱仪器问世。近十几年来，随着电子学、磁性材料、高真空技术以及精密加工技术的迅速发展，质谱仪器也有了很大的进展。

质谱仪器的主要特点是分析范围广泛，可用于分析气态、液态和固态，导体、绝缘体和半导体中的各种成分。这种仪器的分辨率最高已达百万，绝对灵敏度一般为 $10^{-10}$ — $10^{-13}$ 克/秒，相对灵敏度为 $10^{-6}$ — $10^{-9}$ 。试样的制备也比较简单，而且分析效率很高。目前，质谱仪器和质谱分析方法在物理、化学、地质、半导体物理、冶金、空间科学、医药卫生、原子能、石油化工、环境保护以及工农业生产各个方面，都已得到了广泛的应用。

在电子显微镜和质谱仪的基础上，从七十年代以后，人们又陆续研制成功各种多用途的综合分析仪器，如低能电子衍射仪、能量损失谱仪、离子探针、二次离子质谱仪、光电子谱仪以及场电子显微镜等。也有人把几种仪器结合起来使用，例如扫描电镜与X射线微区分析仪结合，通常的透射电镜与扫描电镜结合，以及俄歇电子谱仪与扫描电镜结合等。这些新的分析仪器是表面分析、微区分析和结构分析的重要手段，而它们的研制和改进，都有赖于电子和离子光学理论的指导。

第一只示波管是1897年由布劳恩制成的，它是电子束管的雏形，也是近代电子束器件的先驱。其中应用最广泛的是电视摄像管和显象管，例如现代的彩色显象管采用单枪三束直列式电子枪和自会聚偏转线圈，性能优良，偏转角可达 $110^{\circ}$ 。另两种电子束器

件高频示波管(频率达1000—2000兆赫)和高分辨率微光点管，则广泛应用于科学仪器的快速信号显示。此外还有用于微光夜视的各种变象管和象增强管，用于地面和卫星通信中的各种微波管。显然，在这些电子束管的电子枪、聚焦系统和偏转系统的设计中，都会大量涉及到电子光学的问题。

在八十年代，电子和离子光学分析仪器的分辨率和灵敏度将不断提高，有可能直接观察单个原子，在探索微观世界方面发挥更大作用。在大规模集成电路中，采用直径为微米和亚微米的电子束加工技术，将有助于研制出超高速、超大容量的电子计算机。同时，电子束管的发展也必将引起电视、通信和光电技术的革新，使无线电电子学呈现出新的面貌。此外，运用电子和离子光学的成就，将设计和制造出更加新型的高能加速器和同步辐射器，为研究基本粒子和物质结构提供更为有力的手段。可以预料，电子和离子光学必将在科学技术中继续发挥更大的作用，并从中获取推动力而得到更大的发展。

## 0-2 电子和离子光学的基础知识和基本方程

在这一节中，我们介绍电子和离子光学的基础知识和基本方程，这些内容在本书以后的讨论中会经常引用到。

在电子和离子光学系统中电子和离子束的聚焦、成象、偏转和传播，是由系统中的电场和磁场决定的。因此，电子和离子光学的首要任务，就是要确定电磁场的分布。在电子和离子光学中，在考虑电磁场分布时通常作如下假定：场与时间无关(即静场)；真空中的场；场中不存在自由的空间电荷或空间电流分布，即忽略电子束或离子束本身的空间电荷与空间电流分布对场的影响。

真空中静电磁场的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (0-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f / \epsilon_0, \quad (0-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_f, \quad (0-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (0-4)$$

其中  $\mathbf{E}$  是电场强度,  $\mathbf{B}$  是磁感应强度,  $\rho_f$  和  $\mathbf{j}_f$  分别是自由空间电荷密度与自由空间电流密度,  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别是真空中的介电常数和磁导率.

静电场和静磁场是相互独立的, 我们可以分别加以讨论.

我们首先讨论静电场. (0-1) 式表示静电场是无旋的, 所以可以引进电位  $\varphi$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (0-5)$$

这里  $\varphi$  确定到可以加一个任意常数. 因此, 我们可以适当选取  $\varphi$  的零点, 使之满足一定的附加条件. 将 (0-5) 式代入 (0-2) 式, 得到

$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon_0. \quad (0-6)$$

由此可见, 静电场电位满足泊松方程. 如果按上述假定忽略电子束或离子束本身的电荷, 即令  $\rho_f = 0$ , 则 (0-6) 式简化为拉普拉斯方程:

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (0-7)$$

由上式看出, 没有自由空间电荷的静电场是无散无旋的.

下面再考虑静磁场. (0-4) 式表明静磁场是无散的, 所以可以引进矢位  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (0-8)$$

这里  $\mathbf{A}$  确定到可以加一个任意梯度. 因此, 我们可以对  $\mathbf{A}$  加以适当的规范化, 使之满足一定的附加条件; 通常令  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . 将 (0-8) 式代入 (0-3) 式, 得到

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}_f. \quad (0-9)$$

这就是静磁场矢位满足的非齐次二阶偏微分方程. 同样, 如果按上述假定忽略电子束或离子束本身的电流, 即令  $\mathbf{j}_f = 0$ , 则 (0-9) 式简化为齐次方程:

$$\nabla^2\mathbf{A} = 0. \quad (0-10)$$

由上式看出, 没有自由空间电流的静磁场仍是无散无旋的.

对于电子束或离子束, 我们通常作如下假定: 它们是由具有相

同电荷的单一粒子(电子或离子)组成的(这与完全电离的等离子体不同); 束中电子或离子作为单个粒子在电磁场中运动, 亦即一般不讨论带电粒子之间的相互作用和统计性质; 束中的电子或离子具有相等的能量, 亦即可以忽略束中电子或离子的能量分散.

根据这些基本假定, 电子或离子在电磁场中的运动方程可以由洛伦兹力公式给出:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}); \quad (0-11)$$

其中  $m$  是粒子的质量,  $e$  是粒子的电荷(例如对于电子,  $e < 0$ ), 而  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  和  $\ddot{\mathbf{r}}$  分别是运动粒子的位置、速度和加速度矢量. 由此, 我们可以写出粒子在电磁场中的能量守恒定律如下:

$$\frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 + e\varphi = \text{常数}; \quad (0-12)$$

或者改用记号  $|\dot{\mathbf{r}}| = v$ , 有

$$\frac{1}{2} mv^2 + e\varphi = \text{常数}. \quad (0-13)$$

式中  $v$  是粒子运动速度的绝对值. 为了方便起见, 通常都是把粒子轨迹上动能为零的点选作电位  $\varphi$  的零点. 这样规定的电位称为规范化电位. 采用规范化电位后(除特别声明外, 今后均采用规范化电位), 能量守恒定律公式 (0-13) 中的常数为零, 于是得到

$$\frac{1}{2} mv^2 = -e\varphi. \quad (0-14)$$

此式表明, 粒子在其轨迹上各点的位能在数值上等于该点的动能, 但符号相反.

以上的讨论是非相对论性的. 如果计入相对论修正, 这时质量  $m$  应为

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (0-15)$$

同 (0-14) 式对应的公式应是

$$m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = -e\varphi, \quad (0-16)$$

从而有

$$mv = \left\{ -2m_0e\varphi \left( 1 - \frac{e\varphi}{2m_0c^2} \right) \right\}^{1/2}; \quad (0-17)$$

式中  $m_0$  是粒子的静止质量.

按照德布罗意假设, 电子波的波长  $\lambda$  为

$$\lambda = h/mv, \quad (0-18)$$

式中  $h$  是普朗克常数. 在非相对论情形下, 我们得到

$$\lambda = h/\sqrt{-2m_0e\varphi} \text{ 或 } \lambda = 12.26/\sqrt{\varphi} \text{ (埃);} \quad (0-19)$$

式中  $\varphi$  以伏特为单位. 在相对论情形下, 我们有

$$\lambda = h/\sqrt{-2m_0e\varphi \left( 1 - \frac{e\varphi}{2m_0c^2} \right)},$$

或

$$\lambda = 12.26 \sqrt{\varphi \left( 1 - \frac{e\varphi}{2m_0c^2} \right)} \text{ (埃).} \quad (0-20)$$

根据光学中的费马原理, 光线在折射率为  $n$  的介质中由  $P_0$  点传播到  $P_1$  点的路径是光程取极值的路径, 即有

$$\int_{P_0}^{P_1} n ds \rightarrow \text{极值}, \quad (0-21)$$

其中  $ds$  是光线传播路径的微元,  $nds$  是光程微元.

经典力学中的最小作用原理要求, 粒子在保守力场中由  $P_0$  点运动到  $P_1$  点的轨迹, 是作用量取极值的轨迹, 即有

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow \text{极值} \quad \text{或} \quad \int_{P_0}^{P_1} \left( \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds \rightarrow \text{极值;} \quad (0-22)$$

式中  $\mathbf{P}$  是粒子的广义动量, 而  $d\mathbf{r}$  和  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  分别是粒子运动轨迹的微元及其切线方向的单位矢量.

比较费马原理 (0-21) 式和最小作用原理 (0-22) 式可以看出, 带电粒子在保守力场中运动的广义动量沿运动轨迹切线方向的分量  $\left( \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)$  同光线在介质中传播的折射率  $n$  相当, 因此我们可以在电子和离子光学中定义一个折射率  $\mu$  如下: