全国高等师范专科学校教材

解析几何

主编 帅绪之

华中师范大学出版社

解 析 几 何

主编　帅绪之

主审　伍家德

编写组成员（按姓氏笔划为序）：

帅绪之　孙厚雄　宋美善

李世泽　杨继绪　程平孙

华中师范大学出版社

内 容 简 介

本书是按照国家教育委员会《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及师专解析几何教学大纲，作为师范专科学校数学专业的教材而编写的。

主要内容为：空间直角坐标系与矢量代数；平面与空间直线；柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面；二次曲线的一般理论；二次曲面的一般理论。

本书阐述了《解析几何》的基本理论和方法，通俗易懂，故亦可作为教育学院有关专业的教材和中学教师进修用书，也适合于自学青年阅读。

全国高等师范专科学校教材

解 析 几 何

主编 帅绪之

主审 伍家德

*

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所发行

华中师范大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.8125 字数 304 千字

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

ISBN 7-5622-0516-7/O·57

印数：1—6000 定价：2.20元

出版说明

党的十一届三中全会以来，师范专科教育有了很大的发展，但是，作为师专教学三大基本建设之一的师专教材建设，却始终没有得到很好的解决。长期以来，师范专科教材基本上是借用本科的教材，不但借用师范本科教材，而且还借用综合大学的本科教材，不适合师范专科的特点，影响了师范专科的教学质量. 近几年来，有的地区和学校为了改变这种状况，也零星地编写了一些师专教材，可是，不成套，有的科甚至编写了几种，质量参差不齐. 虽对师专无教材的局面有了部分改变，但终因没有一套全国统一的、较高质量的教材而限制了师专办学效益的提高，也给师专的教学管理和评估工作带来了许多困难.

为了进一步发挥师专的办学效益，彻底改变师专没有适合自己特色的教材的局面，国家教育委员会师范司在1987年制订了《二年制师范专科学校八个专业教学计划》；继之又约请了全国有教学经验的专家、教授编写了这八个专业的《教学大纲》；1988年7月在长春市东北师范大学又召开了全国二年制师专教材编写出版规划会议，会上研究制订了《1988～1990年二年制师专八个专业教材编写出版规划》. 八个专业是：中文、历史、政治教育、数学、物理、化学、生物和地理. 同时，还准备组织编写二年制音乐、美术、体育和英语专业教材.

在国家教育委员会师范司的统一部署、各省市自治区教委的大力帮助和出版社的积极组织下，聘请了一些长期从事师专教学工作、具有丰富的教学实践经验和较高学术水平的教授或副教授担任各科主编. 各位主编根据国家教育委员会师范司拟定的《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及各科《教学大

纲》的精神，组织编者收集资料，综合研究，争取编出一套具有师专自身特色的教材，以适应师专教育的迫切需要．

现在，在各方面的大力支持下，经过主编和各位编写人员的努力和辛勤劳动，这套教材将陆续面世．我们热忱地欢迎师专的广大师生使用它，并在使用过程中，多提宝贵意见，使之不断完善，不断提高，以保证与当代科学和师专教育实践的同步发展．

1989年1月

目　录

第一章　空间直角坐标系与矢量代数

解析几何是用代数方法研究几何图形的一门基础课程．其主要内容包括平面上的直线、二次曲线和空间中的直线、平面及二次曲面等．

在平面上建立了直角坐标系以后，就使得平面上的点与有序实数对之间建立了一一对应的关系，从而使得用数表示点成为可能；然后，再建立起曲线与方程之间的对应关系，从而通过方程的讨论和研究，得到曲线的几何性质，这就是平面解析几何的基本思想和方法．

本书的主要内容是空间解析几何。在空间解析几何中，我们仍然采用平面解析几何中的思想方法来研究空间几何问题，不过所用到的工具除直角坐标系以外,还要用到矢量代数的基础知识．

在这一章里，我们将首先建立空间直角坐标系，使空间的点和有序的三元实数组之间建立起一一对应关系；然后，再引进矢量概念，介绍矢量运算及其有关性质；最后，我们还利用矢量这一工具，对我们所熟悉的几何图形，进行一些讨论和研究．

§ 1.1　空间直角坐标系

空间直角坐标系是平面直角坐标系的一种自然推广．

一　空间直角坐标系的规定

在空间中，任取一点 O 并从点 O 画出三条互相垂直的轴，把这三条轴排定一个次序，依次记为 Ox、Oy 和 Oz；再取一线段作为三轴测量长度的共同单位，这样就建立了一个空间直角坐标系，记为 $O\text{-}xyz$。点 O 称为**原点**，三条轴 Ox、Oy、Oz 称为

坐标轴，并依次称为x轴、y轴和z轴．由每两条轴所确定的平面称为坐标平面，按照坐标平面所包含的坐标轴，分别称为xOy坐标面、yOz坐标面和zOx坐标面．它们依次垂直于z轴、x轴和y轴．

设P为空间任意一点，过点P分别作平行于yOz面、zOx面和xOy面的平面，它们分别交x轴、y轴和z轴于点A、B和C（图1-1），设x、y和z分别是有向线段$\overline{OA}$、$\overline{OB}$和$\overline{OC}$的数量，我们就得到了一个有序的三元实数组，记为（x、y、z），这样一来，对于空间任意一点P，就有唯一的一个三元数组和它相对应．反过来，如果有一个三元数组

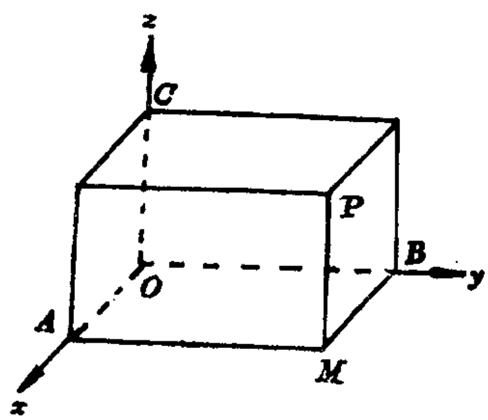

图 1-1

（x,y,z），我们可以把x看成是x轴上一条有向线段$\overline{OA}$的数量，从而确定了x轴上的一个定点A；同理，由y和z可分别确定y轴和z轴上的定点B和C；然后由A、B和C分别作x轴、y轴和z轴的垂直平面，这三平面的交点P就和三元数组相对应，这也就是说，任何一个三元数组可以确定空间唯一的一点．这样，空间中的点与三元数组之间就建立了一一对应关系．因此，把三元数组（x,y,z）称为点P关于空间直角坐标系$O\text{-}xyz$的坐标，并将坐标是x、y、z的点P简记作$P(x,y,z)$．把三个坐标分量x、y和z分别称为点P的横坐标（简称横标）、纵坐标（简称纵标）和立坐标（简称立标）．

如果x轴、y轴和z轴的正向恰好为右手的拇指，食指和中指所指的方向（图1-2），这样的坐标系称为右旋坐标系，简称为右手系．如果x轴、y轴和z轴的正向恰好为左手的拇指、食指和中指所指的方向（图1-3），这样的坐标系称为左旋坐标系，简称为左手系．在本书中，我们将一律采用右手系．

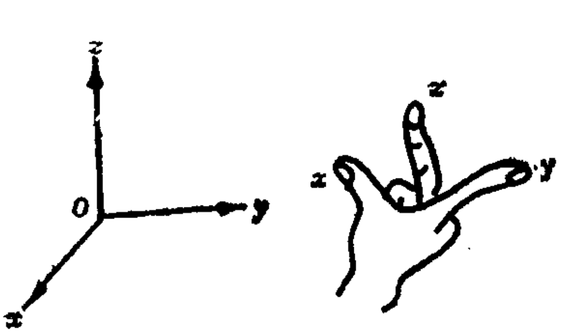

图 1-2

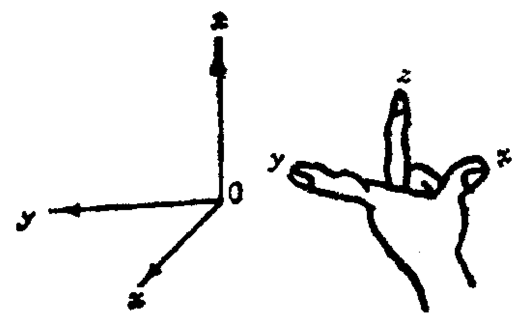

图 1-3

为了直观，通常在画直角坐标系时，总是把 y 轴画为水平的，并规定从左到右为正向；把 z 轴画为铅直的，从下到上为正向；把 x 轴画为指向左下方，且它的正向与 y 轴的正向的夹角为 $135°$．y 轴和 z 轴上的单位线段取等长线段，而 x 轴上的单位线段则取为 y 轴上单位线段的一半．

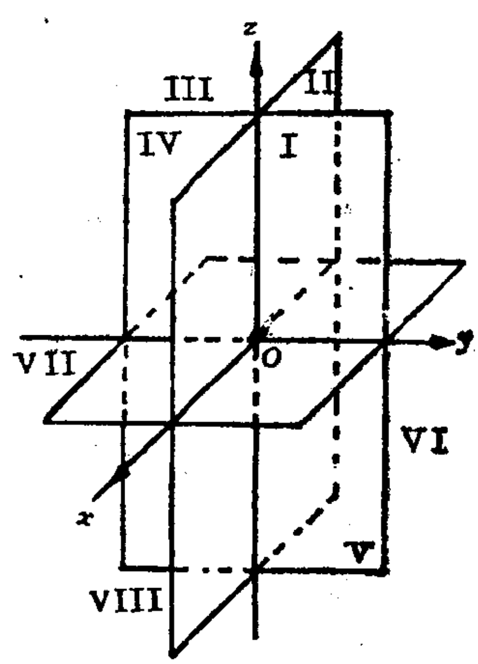

图 1-4

在空间直角坐标系中，三个坐标面把整个空间划分为八个区域，每个区域都称为**卦限**．把 x 轴的正向、y 轴的正向和 z 轴的正向所决定的区域称为第Ⅰ卦限；x 轴的负向、y 轴的正向和 z 轴的正向所决定的区域称为第Ⅱ卦限；x 轴的负向、y 轴的负向和 z 轴的正向所决定的区域称为第Ⅲ卦限；x 轴的正向、y 轴的负向和 z 轴的正向所决定的区域称为第Ⅳ卦限；在第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限下面（z 轴的负向）的区域分别称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限（图1-4）．

显然，点 P 所在的卦限与它的坐标的符号之间有下面的关系：

坐标 \ 符号 \ 卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
横坐标 x	+	−	−	+	+	−	−	+
纵坐标 y	+	+	−	−	+	+	−	−
立坐标 z	+	+	+	+	−	−	−	−

由点的坐标的定义可知，在 xOy 坐标面上的点的立标 z 为零，在 yOz 坐标面上的点的横标 x 为零，在 zOx 坐标面上的点的纵标 y 为零．因为 x 轴是 xOy 坐标面与 zOx 坐标面的交线，所以，在 x 轴上的点有 $y=z=0$；同理，在 y 轴上的点有 $z=x=0$，在 z 轴上的点有 $x=y=0$．原点的坐标为 $(0,0,0)$．

设一点 $M(a,b,c)$ 与原点不重合，为了说明的方便起见，不妨设它在第Ⅰ卦限，则它关于 xOy 坐标面的对称点 M_1 在第Ⅴ卦限，这两点的立标绝对值相同，但符号相反，而它们的横标与纵标则分别相同，因此，M_1 的坐标为 $M_1(a,b,-c)$．同理，点 M 关于 yOz 坐标面的对称点为 $M_2(-a,b,c)$，关于 xOz 坐标面的对称点为 $M_3(a,-b,c)$．

如果 $M(a,b,c)$ 关于 xOy 面的对称点为 $M_1(a,b,-c)$，M_1 关于 xOz 面的对称点为 $M_2(a,-b,-c)$，则点 M 与 M_2 关于 x 轴对称．因此，点 $M(a,b,c)$ 关于 x 轴的对称点为 $M_2(a,-b,-c)$．同理，点 M 关于 y 轴和 z 轴的对称点分别为 $M_3(-a,b,-c)$ 和 $M_4(-a,-b,c)$．点 $M(a,b,c)$ 关于原点的对称点为 $M_5(-a,-b,-c)$．当点 M 在其它卦限内，以上结论同样正确．

例 1 在直角坐标系中画出点 $P(-2,3,4)$，写出点 P 关于 xOy 坐标面、关于 y 轴和原点的对称点 P_1、P_2 和 P_3 的坐标，

并画出这些点.

解 如图1-5，在 x 轴的负向上距离原点 O 为2单位长的点 N 处沿 y 轴的正向作平行线，在此平行线上截取 $NM=3$ 得到点 M，再过点 M 沿 z 轴的正向作 $MP=4$，则 P 点就是所要画的点. P_1、P_2 和 P_3 分别是点 P 关于 xOy 坐标面、关于 y 轴和原点的对称点. P_1、P_2 和 P_3 的坐标分别为 $(-2,3,-4)$，$(2,3,-4)$ 和 $(2,-3,-4)$.

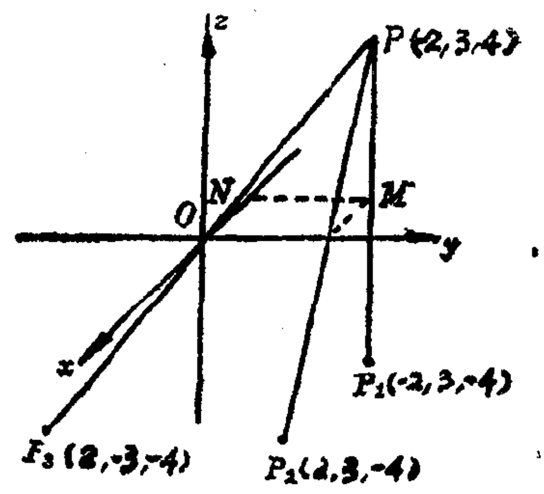

图 1-5

例 2 设一正四棱锥 $S-P_1P_2P_3P_4$ 的底面在 xOy 坐标面内，底面的中心在原点，各棱的长均为 a，棱 P_1P_2 垂直于 y 轴，P_1P_4 垂直于 x 轴，顶点 S 在 z 轴的正向上，求 S、P_1、P_2、P_3、P_4 诸点的坐标.

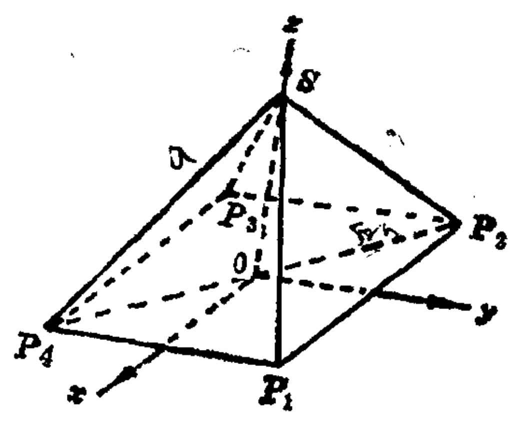

图 1-6

解 在图1-6中，由于底面在 xOy 坐标面内，各棱的长为 a，且底面是一正方形，所以底面四个顶点的坐标分别为 $P_1\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$P_2\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$P_3\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$ 和 $P_4\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$. 又因为

$$|OP_2|=\frac{1}{2}|P_4P_2|=\frac{1}{2}\sqrt{P_4P_1^2+P_1P_2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

而 $OS\perp P_4P_2$，所以

$$|OS|=\sqrt{SP_2^2-OP_2^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

故点 S 的坐标为$\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$.

二 两个简单问题

与平面解析几何一样，我们可以用坐标来计算空间两点之间的距离和求线段的定比分点.

1. 两点间的距离

设点 P_1 和 P_2 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，要求点 P_1 和 P_2 之间的距离 $|P_1P_2|$. 为此，由点 P_1 和 P_2 分别向 xOy 坐标面引垂线，垂足为 M_1 和 M_2. 又过点 P_1 作平面 α，使 α 平行于 xOy 坐标面，设平面 α 与 M_2P_2 的交点为 N(图1-7)，因为 NP_2 垂直于平面 α，所以

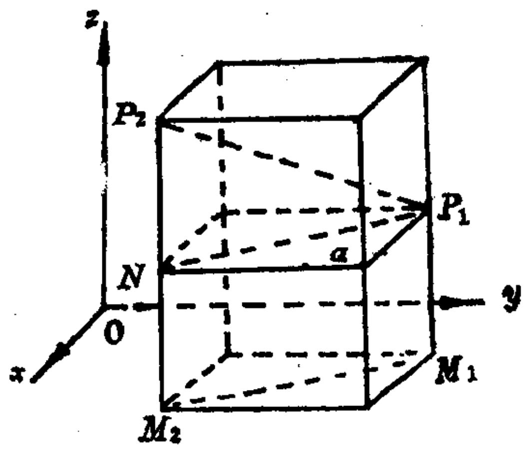

图 1-7

$$|P_1P_2|^2=|P_1N|^2+|NP_2|^2=|M_1M_2|^2+|NP_2|^2$$

而

$$NP_2=M_2P_2-M_2N=M_2P_2-M_1P_1=z_2-z_1$$

又因为点 M_1 和M_2在 xOy 坐标面上，在 Oxy 平面直角坐标系中，它们的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，由平面解析几何中两点间的距离公式，就有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

所以

$$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

即
$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1.1\text{-}1)$$

这就是说，空间两点间的距离等于这两点的同名坐标的差的平方和的算术平方根.

2. 线段的定比分点

在空间，设有两点 P_1、P_2，在 P_1、P_2 的连线上有一点 P，它把线段 P_1P_2 分成已知比 $\lambda(\lambda \neq -1)$，即

$$\lambda = P_1P/PP_2$$

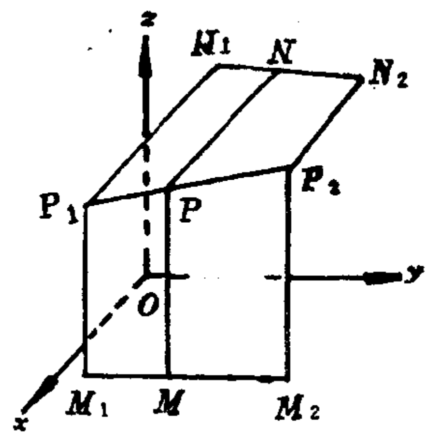

图 1-8

这里 P_1P 和 PP_2 为有向线段的数量．显然，当 $\lambda>0$ 时，P 为线段 P_1P_2 的内分点；当 $\lambda<0$ 时，P 为线段 P_1P_2 的外分点．

设 P_1、P_2 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)．点 P 的坐标为 (x, y, z)，现在，我们要求定比分点 P 的坐标．为此，由点 P_1、P_2 和 P 分别向 xOy 坐标面引垂线，垂足分别为 M_1、M_2 和 M（图 1-8）．如果 P_1P_2 平行于 z 轴，点 M_1、M_2 和 M 就重合，这时可向 yOz 或 zOx 坐标面引垂线，因为 $P_1M_1 \parallel P_2M_2 \parallel PM$．所以

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2}$$

这就是说，点 M 是线段 M_1M_2 的定比分点，由于它们都在 xOy 坐标平面内，且它们的平面直角坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 和 (x, y)，根据平面解析几何的定比分点公式，就有

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

同理，再由点 P_1、P_2 和 P 向 yOz 坐标面引垂线，垂足分别为 N_1、N_2 和 N．于是点 N 为线段 N_1N_2 的定比分点，且它们的平面直角坐标分别为 (y_1, z_1)、(y_2, z_2) 和 (y, z)，于是又有

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

所以，定比分点 P 的坐标就是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.1\text{-}2)$$

当 $\lambda=1$ 时，就有

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2) \qquad (1.1\text{-}3)$$

这就是说，线段中点坐标的各分量等于始点坐标和终点坐标相应分量的和的一半.

例 1 已知 $\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别为：$A(2,1,4)$、$B(3,-1,2)$、$C(5,0,6)$，利用距离公式判定 $\triangle ABC$ 是钝角、直角还是锐角三角形.

解 由距离公式可得

$$|AB|=\sqrt{(3-2)^2+(-1-1)^2+(2-4)^2}=3$$

$$|BC|=\sqrt{(5-3)^2+1^2+(6-2)^2}=\sqrt{21}$$

$$|CA|=\sqrt{(2-5)^2+1^2+(4-6)^2}=\sqrt{14}$$

在 $\triangle ABC$ 中，最大边为 BC，但

$$|BC|^2<|CA|^2+|AB|^2$$

由余弦定理可知，BC 边所对的角 $\angle A$ 为锐角，所以，$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

例 2 已知平行四边形 $ABCD$ 的两个顶点 $A(2,-3,-5)$，$B(-1,3,2)$ 以及对角线的交点 $E(4,-1,7)$，求它的另外两个顶点的坐标.

解 在平行四边形 $ABCD$（图 1-9）中，C 为线段 AE 的 $\lambda=-2$ 的分点. 由分点坐标公式，有

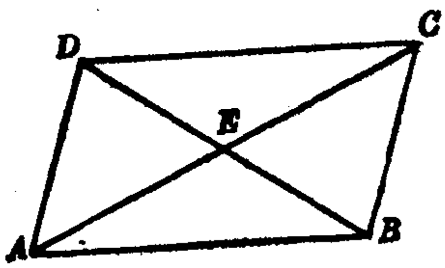

图 1-9

$$x=\frac{2+(-2)\times 4}{1-2}=6$$

$$y=\frac{-3+(-2)\cdot(-1)}{1-2}=1$$

$$z=\frac{-5+(-2)\times 7}{1-2}=19$$

故点 C 的坐标为 $(6,1,19)$. 同理可求得点 D 的坐标为 $(9,-5,12)$.