纯粹数学与应用数学专著

矩阵理论及其在工程技术中的应用

JZ

葛 照 强 著

陕西科学技术出版社

纯粹数学与应用数学专著

矩阵理论及其在工程技术中的应用

葛照强 著

陕西科学技术出版社

1991·10

内 容 简 介

本书属纯粹数学与应用数学专著，着重介绍近几年来在国内外发展起来的矩阵逆特征值问题理论。主要内容是矩阵逆特征值问题的可解性、解的稳定性；Jacobi矩阵、实对称带状矩阵、实对称矩阵等的逆特征值问题；谱约束下的矩阵最佳逼近问题；逆特征值问题在振动理论、能量守恒系统、及控制论中的应用等。作为预备知识，简单介绍了线性空间，线性变换，矩阵的标准形，内积空间，矩阵分析，广义逆矩阵等内容。

本书可作为高等院校有关专业研究生矩阵理论课程的教材及高年级大学生的选修课教材，也可供一般的数学工作者、物理工作者、化学工作者、工程技术人员参考。

纯粹数学与应用数学专著
矩阵理论及其在工程技术中的应用
葛照强 著
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街131号）
陕西省兴平印刷厂印刷
787×1092毫米 16开本 15.5印张 4插页 34.6万字
1991年10月第1版 1991年10月第1次印刷
印数：1—2,000
ISBN 7—5369—1126—2/O·35
定 价：8.80元

前 言

近年来发展起来的矩阵逆特征值理论，以线性代数的古典理论和矩阵的基本理论所不曾有的姿态，解决了大量的高难度的工程技术问题，开创了应用矩阵理论解决工程技术问题的新局面．尽管矩阵逆特征值问题及应用发展的如此光辉灿烂，然而，国内出版的有关矩阵理论的教材、著作，对这一问题却没有得到应有的反映，从而显示出美中不足。为了适应教学与科研的需要，出版矩阵逆特征值理论方面的著作，就显得十分重要。

本书以作者为西北轻工业学院研究生编写的"矩阵理论"教材为基础，融合作者在教学、科研中的一些成果和体会，经过修改、补充而成．为了使本书具有一定的系统性，我们把线性空间、线性变换及矩阵的标准形作为预备知识分别在第一章和第二章介绍，为了使读者更好地理解矩阵的逆特征值问题，在第三、第四、第五章中分别讲述了内积空间和矩阵理论、矩阵分析及应用、矩阵的广义逆及应用，有了这些知识，我们在第六、第七章讲述的矩阵的逆特征值问题、矩阵理论的几个应用问题就显得浅显易懂。每章配有一些研究问题，以供参考．本书立足于基本理论和方法，并尽力反映新成果。适用于大学高年级学生阅读，也可作为高等工科院校有关专业研究生《矩阵理论》课程的教材，对于那些从事教学和科研工作的有关高等院校的教师及科技人员也是一本有益的参考书．

限于作者水平，书中可能会有些不妥之处，热诚欢迎同行们提出批评意见。

本书在编写过程中曾得到西北轻工业学院有关教师的大力支持，基础部领导张志亮教授，数学教研室领导李德志副教授，机械系力学教研室李得环副教授在百忙中审阅了初稿，并提出了许多宝贵意见；西北大学数学系赵根榕教授生前一直关心本书的编写工作，并在病重期间审阅了初稿，提出了许多指导性意见；西安交大数学系张文修教授。西安武警学院数学教研室主任赵汝怀教授也审阅了本书手稿，提出了许多宝贵意见；在此一并表示衷心的感谢!

著　者

1991 年 9 月

目　　录

第一章 线性空间和线性变换

高等数学主要研究在某种度量下的极限问题，然而只有度量的概念对于分析数学的发展和应用还不够具体，因为通常所考虑的集合，例如，平面和空间，除了可引进极限概念外，它同时又是一个代数系统，就是说集合中的元素之间存在着某种代数关系，当仅研究集合中的代数结构，即元素间的加法运算以及数与集合中元素的乘法运算时，就必须引进线性空间（或向量空间）的概念（这里仅介绍有限维的线性空间）.

§1 线性空间

定义 1.1.1 设 V 是一非空集，P 是一个数域，在 V 中的元素间定义了加法运算和 P 中的数与 V 中元素的乘法运算，如果满足下述条件:

Ⅰ. 对加法成立如下关系：如果$\vec{x}$，$\vec{y}\in V$，则存在$\vec{z}\in V$，记作$\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$，称它是$\vec{x}$和$\vec{y}$的和. 这个运算适合四条规则:

(1) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

(2) 对任一$\vec{x}\in V$,有 $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{a}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{a})$

(3) V 中存在唯一的元素$\vec{0}$(称它是零元素),使对 V 中任一元素$\vec{a}$,有$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(4) 对 V 中每一元素$\vec{a}$,存在唯一的元素$\vec{a}'\in V$(对应于$\vec{a}$)，满足$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$,称$\vec{a}'$ 为$\vec{a}$的负元，记作 $-\vec{a}$.

Ⅱ. 对任何$\vec{a}\in V$及任何 $\lambda\in P$，存在元素 $\lambda\vec{a}\in V$，称 $\lambda\vec{a}$ 是入和$\vec{a}$的数乘，适合：

(5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

(6) $\lambda(k\vec{a})=(\lambda k)\vec{a}$，其中 λ，$k\in P$

(7) $(\lambda+k)\vec{a}=\lambda\vec{a}+k\vec{a}$

(8) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ $\quad(\vec{a}$，$\vec{b}\in V$，$\lambda\in P)$.

则称 V 按照这种加法运算和数乘运算是数域 P 上的一个线性空间 .

由线性空间的定义不难知：

(1) 几何空间全体向量组成的集合是一个实数域上的线性空间 .

(2) 元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵，按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法，构成数域 P 上的一个线性空间 .

定义 1.1.2 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量，但没有更多数目的线性无关的向量，则称 V 是 n 维的；如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，则称 V 是无限维的 .

按照此定义不难知，平面中的向量所构成的线性空间是二维的；几何空间中的向量所构成的线性空间是三维的 ;n 元数组所构成的线性空间是 n 维的 .

无限维线性空间是泛函分析研究的对象，它与有限维空间有较大的差别，本门课程主要讨论有限维线性空间.

定义 1.1.3 在 n 维线性空间 V 中，n 个线性无关的向量$\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\cdots\overrightarrow{\varepsilon_n}$，称为 V 的一组基。设$\vec{\alpha}$是 V 中任一向量，则$\vec{\alpha}=a_1\vec{\varepsilon}_1+a_2\vec{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\vec{\varepsilon}_n$。其中系数 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 是被向量$\vec{\alpha}$和基$\overrightarrow{\varepsilon_1}$，$\overrightarrow{\varepsilon_2}$，$\cdots\overrightarrow{\varepsilon_n}$，唯一确定的，这组数就称为$\vec{\alpha}$在基$\overrightarrow{\varepsilon_1}$，$\overrightarrow{\varepsilon_2}\cdots\overrightarrow{\varepsilon_n}$下的坐标，记为 $(a_1,\ a_2,\ \cdots a_n)^T$。

不难得

定理 1.1.1 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}\cdots\overrightarrow{\alpha_n}$，且 V 中任一向量都可以用它们线性表出，则 V 是 n 维的，且$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}\cdots\overrightarrow{\alpha_n}$，就是 V 的一组基。

可以证明：线性空间的维数是确定的，不会因选取不同的基而改变。

定义 1.1.4 数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集 W 称为 V 的一个线性子空间（或简称子空间），如果 W 对 V 中的加法及数乘两种运算也构成线性空间。

例如，几何空间中过坐标原点的任一平面是它的一个二维线性子空间。

显然有

定理 1.1.2 如果线性空间 V 的非空子集 W 对于 V 中的加法及数乘两种运算是封闭的，则 W 就是 V 的一个子空间。

几种特殊的线性子空间

（1）在线性空间中，由单个的零向量所构成的子集是一线性子空间．叫做零子空间。

（2）线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间。

在线性空间中，零子空间和线性空间本身这两个子空间有时叫做平凡子空间，而其它的线性子空间叫做非平凡子空间。

（3）设$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\cdots\vec{\alpha}_r$是线性空间 V 中一组向量，显然这组向量所有可能的线性组合

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_r\vec{\alpha}_r$$

所成的集合是非空的，而且对 V 中的两种运算封闭，因而是 V 的一个子空间，这个子空间叫做由$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\cdots\vec{\alpha}_r$张成的子空间．

在有限维线性空间中，任何一个子空间都可以这样得到。

定理 1.1.3 （1）二向量组生成相同子空间的充要条件是，这两个向量组等价。

（2）L（$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\cdots\vec{\alpha}_r$）的维数等于向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\cdots\vec{\alpha}_r$的秩。

定理 1.1.4 设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\cdots\vec{\alpha}_m$ 是 W 的一组基，则这组向量必定可以扩充为整个空间的一组基，即在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量$\vec{\alpha}_{m+1},\cdots\vec{\alpha}_n$，使得$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\cdots\vec{\alpha}_n$为 V 的一组基。

以上二定理的证明略去．

显然，如果 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么它们的交 $V_1\cap V_2$ 也是 V 的子空间．

定义 1.1.5 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，所谓 V_1 与 V_2 的和，是指由所有能

表示成$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，而$\vec{\alpha}_1\in V_2,\vec{\alpha}_2\in V_2$的向量组成的子集合，记作$V_1+V_2$.

由此不难知：如果V_1,V_2是V的子空间，则V_1+V_2也是V的子空间.

此外关于子空间还有如下一些结论

(1) 若V_1,V_2,W都是子空间，且$W\subset V_1,W\subset V_2$，则$W\subset V_1\cap V_2$；若$W\supset V_1,W\supset V_2$，则$W\supset V_1+V_2$.

(2) 对子空间V_1和V_2以下三个论断是等价的.

(a) $V_1\subset V_2$

(b) $V_1\cap V_2=V_1$

(c) $V_1+V_2=V_2$

(3) （**维数公式**） 如果V_1和V_2是线性空间V的两个子空间，那么

$$dim V_1+dim V_2=dim(V_1+V_2)+dim(V_1\cap V_2)$$

显然 $dim V_1+dim V_2\geqslant dim(V_1+V_2)$

(4) 如果n维线性空间V中两个子空间V_1,V_2的维数之和大于n，那么V_1,V_2必含有非零的公共向量.

定义 1.1.6 设V_1,V_2是线性空间V的子空间，如果V_1+V_2中每个向量$\vec{\alpha}$的分解式$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1\in V_1,\vec{\alpha}_2\in V_2$是唯一的，这个和就称为直和，记为 $V_1\dot{+}V_2$

不难得到如下的一些结论:

(1) 和V_1+V_2是直和的充要条件是等式$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\vec{0},\vec{\alpha}_i\in V_i(i=1,2)$只有在$\vec{\alpha}_i(i=1,2)$全为$\vec{0}$时才成立，即零向量的分解式是唯一的。

(2) 和V_1+V_2是直和的充要条件是$V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$。

(3) 和V_1+V_2是直和的充要条件是

$$dim(V_1+V_2)=dim V_1+dim V_2。$$

(4) 设U是线性空间V的一个子空间，则一定存在子空间W，使$V=U\dot{+}W$。

子空间的直和可以推广到多个子空间的情形.

定义 1.1.7 设V_1，$V_2\cdots V_s$是线性空间V的子空间，如果和$V_1\dot{+}V_2\dot{+}\cdots\dot{+}V_s$中每个向量$\vec{\alpha}$的分解式

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\cdots+\vec{\alpha}_s,\ \vec{\alpha}_i\in V_i(i=1,\ 2\cdots,\ S)$$

是唯一的，这个和就称为直和，记为

$$V_1\dot{+}V_2\dot{+}\cdots\dot{+}V_s。$$

它具有和两个子空间的直和相类似的性质，可以证明下面的结果：

定理 1.1.5 设V_1，V_2，$\cdots$，V_s是V的一些子空间，则下面这些条件是等价的

(1) 如果$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\cdots+\vec{\alpha}_s=\vec{0}$，$\vec{\alpha}_i\in V_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$则$\vec{\alpha}_i=\vec{0}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$;

(2) $V_i \cap \sum\limits_{j \neq i} V_j$ 是直和，$(i=1, 2, \cdots, s)$；

(3) $W=\sum V_i$ 是直和；

(4) $dim W=\sum dim(V_i)$

(5) 在每个 V_i 中取基 $\overrightarrow{\varepsilon_1^{(i)}}$，$\overrightarrow{\varepsilon_2^{(i)}}$，…，$\overrightarrow{\varepsilon_{k_i}^{(i)}}$，$i=1, 2, \cdots, s$，则它们一起构成 W 的一组基

§2 线性空间的同构

定义 1.2.1 设 V_1，V_2 是数域 P 上两个有限维线性空间，f 是 V_1 到 V_2 的一个映射，如果对于任何向量，$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta} \in V_1$ 和任意数 $a \in p$，有

$$f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=f(\vec{\alpha})+f(\vec{\beta}),\quad f(a\vec{\alpha})=af(\vec{\alpha})$$

则称 f 是从 V_1 到 V_2 的线性映射（照）或线性算子

例如 (1) 设 P 是 R^3（几何空间）到 xoy 平面上的直交投影，则 P 是线性映照.

(2) **零映照**：将线性空间 V_1 中每一向量映照成线性空间 V_2 中的零向量的映照是一个线性映照，这种映照是零映照.

(3) **恒等映照**：设 I 是 V_1 到自身的映照，如果任意的 $\vec{\alpha} \in V_1$，$I(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}$，则 I 是线性映照，称为恒等映照.

(4) **负映照**：设 f 是线性空间 V_1 到线性空间 V_2 的线性映照，定义 $-f$: 任意 $\vec{\alpha} \in V_1$ $(-f)(\vec{\alpha})=-f(\vec{\alpha})$，则 $(-f)$ 是一个线性映照，称它为 f 的负映照.

不难证明如下的结果

(1) 把 n 维线性空间 V_1 到 m 维线性空间 V_2 的线性映照全体记为 $L(V_1, V_2)$，对 f_1，$f_2 \in L(V_1, V_2)$ 定义其中的加法为 $(f_1+f_2)(\vec{\alpha})=f_1(\vec{\alpha})+f_2(\vec{\alpha})$，数乘为 $(af_1)(\vec{\alpha})=a(f_1(\vec{\alpha}))$ 其中 $\vec{\alpha} \in V_1$，$a \in p$ 则 $L(V_1, V_2)$ 按照这样定义的加法和数乘运算构成线性空间.

(2) 设 V_1，V_2，V_3 是有限维线性空间，$f_1 \in L(V_1, V_2)$，$f_2 \in L(V_2, V_3)$，则由 $(f_2f_1)(\vec{\alpha})=f_2(f_1(\vec{\alpha}))$，$\vec{\alpha} \in V_1$ 决定的映射是 V_1 到 V_3 的线性映射，称它为 f_2 与 f_1 的**乘积映射**.

它满足下列运算法则：

a $(fg)h=f(gh)$；

b $I_2f=fI_1=f$；

c $(af)g=a(fg)$；

d $(g_1+g_2)f=g_1f+g_2f$，$h(g_1+g_2)=hg_1+hg_2$；

其中 $a \in p$，f，g，g_1，g_2，h 是任意可作运算的线性映射，I_1，I_2 分别为 V_1 和 V_2

上的恒等映射.

显然，交换律一般不满足.

定义 1.2.2 数域 P 上的两个线性空间 V_1 和 V_2 称为同构的，如果存在一个 1 对 1 的映上的映射 $\sigma\in L(V_1, V_2)$，那么称 σ 为同构映射.

例如 任一二维线性空间都与 $R_2=\{(x,y)^T:x,y\in R\}$ 是同构的.

一般的，数域 P 上的任一 n 维线性空间都与 $R^n=\{(X_1, X_2\cdots X_2)^T:X_i\in R, i=1, 2, \cdots, n\}$ 同构

同构映射满足下列性质：

a $\sigma(\vec{0})=\vec{0}$，$\sigma(-\vec{\alpha})=-\sigma(\vec{\alpha})$；

b $\sigma(\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\vec{\alpha}_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\sigma(\vec{\alpha}_i)$；

c V_1 中任一组向量 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\cdots$，$\vec{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是 V_2 中的向量组 $\sigma(\vec{\alpha}_1)$，$\sigma\vec{\alpha}_2$，$\cdots$，$\sigma(\vec{\alpha}_m)$ 线性相关；

d 如果 V'_1 是 V_1 的线性子空间，则

$$\sigma V'_1)=\{\sigma(\vec{\alpha}):\ \vec{\alpha}\in V'_1\}$$

是 $\sigma(V_1)$ 的子空间，且 V'_1 与 $\sigma(V'_1)$ 有相同的维数；

e 同构映射的逆映射及两个同构映射的乘积还是同构映射.

不难证明

定理 1.2.1 数域 P 上的两上有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数

说明 由于同构映射保持向量间的一切线性关系，因此，如果只研究线性空间所定义的运算的代数性质，那么同构的线性空间是可以不加区别的，联系到定理 1.2.1 知，维数是有限维线性空间的唯一的本质特征.

§3 线性变换

本节主要讨论一种特殊的线性映射：线性变换．变换是指线性空间 V 到自身的一个映射．线性变换不过是一种最简单，最基本的变换.

定义 1.3.1 设 V 是数域 P 上的一个线性空间，若 $A\in L(V)(L(V)=L(V,V))$，对于 V 中任意两个元素 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 和数域 P 中任一数 a，都有

$A(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=A(\vec{\alpha})+A(\vec{\beta})$，（线性性）；

$A(a\vec{\alpha})=aA(\vec{\alpha})$，　　　　（齐次性）

则称 A 是线性空间 V 上的一个线性变换.

（注意线性映射，线性同构及线性变换的联系和区别）.

从上定义不难看出：线性变换把线性相关的向量变成线性相关的向量，然而却不一定能保持向量组的线性无关性.

例如 (1) 设 $E\in L(V)$，如果 $E(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}$，$(\vec{\alpha}\in V)$，则称 E 是**恒等变换或单位变换**。

(2) 设 V 是数域 P 上的线性空间，k 是 P 中某个数，定义 $N:\vec{\alpha}\to k\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\in V$，即

$$N\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}\quad(\vec{\alpha}\in V)$$

则 N 是一个线性变换，即 $N\in L(V)$，称为由数 k 决定的**数乘变换**。

(3) 设 V 是连续可微函数全体所形成的线性空间，则不难验证微分算子 D：$D(f(x))=f(x)$，积分算子 I：$If(x)=\int_a^X f(t)dt$ 都是 V 上的线性变换。

一、线性变换的性质

(1) 设 A 是 V 上的线性变换，则 $A(\vec{0})=\vec{0}$，$A(-\vec{\alpha})=-A(\vec{\alpha})$;

(2) 设 $\beta=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$，则 $A(\beta)=\sum_{i=1}^{n}k_iA(\vec{\alpha}_i)$。

二、线性变换的运算

线性变换是线性映射的特殊情况，因此，关于线性映射的运算对于线性变换都是成立的。

(1) **逆变换**：设 $A\in L(V)$，称 A 是可逆的，如果存在 $B\in L(V)$，使 $AB=BA=E$(E 是恒等变换)，则称 B 是 A 的逆，记为 A^{-1}。

不难证明

定理 1.3.1 线性变换 A 的逆变换仍然是线性变换(在逆存在的情况下)

(2) **线性变换的多项式**

以 A^n 表示 n 个线性变换 A 相乘，称为 A 的 n 次幂，令 $A^{\circ}=E$，则有

$$A^{m+n}=A^m\cdot A^n,\ (A^m)^n=A^{m\cdot n}\quad(m,n\geqslant 0)$$

当 A 可逆时，定义 $A^{-n}=(A^{-1})^n$ (n 是正整数)

$$A^{-(m+n)}=A^{-m}\cdot A^{-n},\ (A^{-m})^n=A^{-mn}$$

应注意 $(AB)^n=A^nB^n$ 一般不成立。

设 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}X^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一实系数的多项式，A 是 V 上的一个线性变换，定义

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

显然 $f(A)$ 是一线性变换，它称为线性变换 A 的 m 次多项式。

不难得到 $(f)A\cdot g(A)=g(A)\cdot f(A)$. 即
一个线性变换的多项式的乘法是可交换的。

三、线性变换的矩阵

设 $\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一组基，$A\in L(V)$，则 $A\vec{\varepsilon}_i$($i=1$，2，…，n)可以由 $\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 线性表出，即有关系式

$$A\vec{\varepsilon}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\vec{\varepsilon}_j(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中系数是唯一确定的，它们就是 $A\vec{\varepsilon}_i$ 在这组基下的坐标。

设 A，$B\in L(V)$，如果对于任意$\vec{\alpha}\in V$，都有 $A\vec{\alpha}=B\vec{\alpha}$，则称 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$

不难证明：

定理 1.3.2 设$\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，如果线性变换 A 与 B 在这组基上的作用相同，即 $A\vec{\varepsilon}_i=B\vec{\varepsilon}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则 $A=B$

由此知，一个线性变换完全被它在一组基上的作用所决定。

定理 1.3.3 设$\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 是 V 中任意 n 个向量，则存在唯一的线性变换 A，使 $A\vec{\varepsilon}_i=\vec{\alpha}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

证明 设$\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}X_i\vec{\varepsilon}_i$ 是 V 中的任一向量，定义 V 上的变换 A：$A(\vec{a})=\sum_{i=1}^{n}X_i\vec{\alpha}_i$，则不难知，$A$ 必满足定理的要求。

此定理说明：基向量的象可以是任意的。

定义 1.3.2 设$\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 中的一组基，A 是 V 上的线性变换，则有

$$A\varepsilon_i^{\cdot}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\varepsilon_j^{\cdot}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

用矩阵来表示就是

$$A(\dot{\varepsilon}_1,\dot{\varepsilon}_2,\cdots,\dot{\varepsilon}_n)=(A\dot{\varepsilon}_1,A\dot{\varepsilon}_2,\cdots,A\dot{\varepsilon}_n)=(\varepsilon_1^{\cdot},\varepsilon_2^{\cdot},\cdots,\varepsilon_n^{\cdot})A_m \tag{1.3.1}$$

其中

$$A_m=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

知阵 A_m 称为 A 在基$\dot{\varepsilon}_1$，$\dot{\varepsilon}_2$，…，$\dot{\varepsilon}_n$ 的矩阵。

不难得

定理 1.3.4 设$\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，每个线性变换以式 (1.3.1) 的方式对应一个 $n\times n$ 矩阵，这个对应有如下的性质：

(1) 线性变换的和对应于矩阵的和；

(2) 线性变换的积对应于矩阵的积；

(3) 线性变换的数量积对应于矩阵的数量积；

(4) 可逆的线性变换与可逆矩阵相对应，且逆变换对应于逆矩阵

定理 1.3.5 设线性变换 A 在基$\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 A_m，向量$\vec{\alpha}$ 在

基$\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 下的坐标是$[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$，则 $A(\vec{\alpha})$ 在基$\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_n$ 下的坐标$[Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots Y_n]^T$ 可按公式

$$[Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots Y_n]^T = A_m[x_1 \quad x_2 \quad \cdots x_n]^T \quad \text{求得}$$

此定理所描述的是坐标变换的矩阵表示

定理 1.3.6 设 V 是线性空间，(a) $\overrightarrow{\varepsilon_1}$，$\overrightarrow{\varepsilon_2}$，…，$\overrightarrow{\varepsilon_n}$ (b) $\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，…，$\overrightarrow{\alpha_n}$ 是 V 的两组基，$A \in L(V)$，A 在 (a)，(b) 两组基下的矩阵分别是 A_m，B_m，从基 (a) 到 (b) 的过渡矩阵是 T_m，即

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n) = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n)T_m$$

则

$$B_m = T_m^{-1}A_mT_m$$

说明：线性变换在不同基下对应的矩阵一般是不同的，然而它们之间却存在一定的关系，这样为我们利用矩阵来研究线性变换提供了很大的方便性．

定义 1.3.3 设 A_m，B_m 是两个 $n \times n$ 矩阵，如果可以找到 $n \times n$ 可逆矩阵 T_m，使得 $B_m = T_m^{-1}A_mT_m$，就称 A_m 相似于 B_m，记为 $A_m \sim B_m$．

相似性作为矩阵之间的一种关系，具有下列性质：

(1) **反复性** $A_m \sim A_m$；

(2) **对称性** $A_m \sim B_m$，则 $B_m \sim A_m$.

(3) **传递性** 若 $A_m \sim B_m$，$B_m \sim C_m$，则 $A_m \sim C_m$．

不难得

定理 1.3.7 同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的；反之，二相似的矩阵可看成同一线性变换在不同基下的矩阵。

为了简化一些矩阵的计算，给出下列结果：

设 $B_{1m} = T_m^{-1}A_{1m}T_m$，$B_{2m} = T_m^{-1}A_{2m}T_m$

则

(1) $B_{1m} + B_{2m} = T_m^{-1}(A_{1m} + A_{2m})T_m$；

(2) $B_{1m} \cdot B_{2m} = T_m^{-1}(A_{1m} + A_{2m})T_m$；

(3) 如果 $f(\lambda)$ 是数域 P 上的一个多项式，那么 $f(B_{1m}) = T_m^{-1}f(A_{1m})T_m$

§4 不变子空间

定义 1.4.1 设 A 是线性空间 V 上的一个线性变换，V_1 是 V 的子空间，如果 $AV_1 \subset V_1$，则称 V_1 是 A 的不变子空间。

例如 设 A 是线性空间 V 上的一个线性变换，A 的全体象所构成的集合称为 A 的值

域，以 AV 表示；所有被 A 变成零向量的向量构成的集合称为 A 的核，记作 $A^{-1}(\vec{0})$

不难知，A 的值域和核都是 A 的不变子空间．

一般称 AV 的维数是 A 的秩，$A^{-1}(\vec{0})$ 的维数是 A 的零度．

此外还不难证明下面的一些结果：

定理 1.4.1 设 A 是 n 维线性空间 V 的线性变换．$\vec{\varepsilon_1}$，$\vec{\varepsilon_2}$，…，$\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基，A 在这组基下的矩阵为 A_m，

则

(a).A 的值域 AV 是由基象组生成的子空间，即 $AV = L(A\vec{\varepsilon}_1, A\vec{\varepsilon}_2, \cdots, A\vec{\varepsilon}_n)$.

(b) A 的秩等于 A_m 的秩．

定理 1.4.2 设 A 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则 A 的秩 $+$ A 的零度 $=n$

推论 1.4.1 (1) 设 V 是有限维的线性空间，$A \in L(V)$，则 A 是 1 对 1 的充要条件是 A 是映上的．

(2) 设 V_1，V_2 都是 A 的不变子空间，则 $V_1 \cap V_2$，$V_1 \bar{V} V_2$ 都是 A 的不变子空间．($V_1 \bar{V} V_2$ 表示 V_1 和 V_2 所张成的线性空间)

(3) 如果 $AB = BA$，则 B 的值域和核都是 A 的不变子空间．

定义 1.4.2 设 V 是一有限维的线性空间，$A \in L(V)$，V_1 是 V 的线性子空间，如果 V_1 是 $\{A\}' = \{B: BA == AB,\ B \in L(V)\}$ 中任一 B 的不变子空间，则称 V_1 是 A 的超不变子空间．

例如 (1) A 的值域和核都是 A 的超不变子空间．

(2) 如果 V_1 和 V_2 都是 A 的超不变子空间，同则 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 \bar{V} V_2$ 都是 A 的超不变子空间．

定理 1.4.3 设 V 是线性空间，V_1 是 V 的子空间，$V \in L(V)$，则 V_1 是 A 的不变子空间的充要条件是存在由 V_1 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_k$ 扩充成的 V 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1$，$\vec{\varepsilon}_2$，…，$\vec{\varepsilon}_k$，$\vec{\varepsilon}_{k+1} \cdots \vec{\varepsilon}_n$，使 A 在这组基下对应的矩阵为如下的形状：

$$\left[\begin{array}{c:c} a_{11} \cdots a_{1k} & a_{1k+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} & a_{k,k+1} \cdots a_{k,n} \\ \hdashline & a_{k+1,k+1} \cdots a_{k+1,n} \\ 0 & \cdots\cdots \\ & a_{n,k+1} \cdots a_{nn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{1m} & A_{3m} \\ 0 & A_{2m} \end{bmatrix}$$

且 k 级矩阵 A_{1m} 是 $A|V_1$ 在 V_1 的基 $\vec{\varepsilon_1}$，$\vec{\varepsilon_2}$，…，$\vec{\varepsilon_k}$ 下的矩阵（$A|V_1$ 是 A 在 V_1 上的限制）

（此定理证明略去）

此外不难得到如下结论：