中国数学地质

中国地质学会数学地质专业委员会 主编

6

地质出版社

中　国　数　学　地　质

6

中国地质学会数学地质专业委员会　主编

地　质　出　版　社

· 北　京 ·

图书在版编目（CIP）数据

中国数学地质（6）/中国地质学会数学地质专业委员会主编. -北京：地质出版社，1995. 12
ISBN 7-116-01988-X

Ⅰ. 中… Ⅱ. 中… Ⅲ. 数学地质-地质勘探-中国 Ⅳ. P628

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第18675号

地质出版社出版发行
（100083 北京海淀区学院路29号）
责任编辑：杨友爱
*
三河市实验小学印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销
开本：787×1092 1/16 印张：13.375 字数：310000
1995年12月北京第一版・1995年12月三河第一次印刷
印数：1—500册 定价：20.00元

ISBN 7-116-01988-X
P・1507

前　　言

本书的文章主要选自于1994年11月10日至12日在武汉市召开的“数学地质前沿课题和发展趋势研讨会”上的论文。本次会议由中国地质学会数学地质专业委员会和中国地质大学（武汉）共同主持，由中国地质大学（武汉）具体承办。来自全国各有关系统和部门的43位数学地质工作者参加了会议，共提交学术论文54篇。本次会议的学术交流主要涉及下列方面内容：

1. 数学地质的前沿课题和发展趋势；
2. 矿产资源统计预测；
3. 地质统计学；
4. 地质信息系统和自动绘图；
5. 地质专家系统；
6. 地质过程的计算机模拟；
7. 分形理论、特异值理论以及谱分析方法在地质学中的应用；
8. 讨论和交流了“三十届国际地质大会”数学地质学科分组会的筹备工作等问题。

本次会议目标明确、时间紧凑、效果明显，既交流和展示了我国各部门数学地质研究取得的部分新成果、新进展，又吸引了相当多的中、青年数学地质工作者参加会议，实现了老、中、青的结合，为我国数学地质的进一步发展创造了良好条件。

由于一些客观原因，还有很多优秀论文未选入本书，敬请作者和读者谅解。

编　者

1995年5月

目　　录

数学地质的发展趋势与展望

王世称　　余先川
（长春地质学院综合信息矿产预测研究所）

摘　要　随着地质科学的发展，数学地质正面临着巨大的挑战。本文对数学地质的内含重新进行了探讨。文中认为今后应加强以下几方面的研究工作：①地质科学新理论及其数学模型和计算机模拟。②地质、遥感、物探、化探技术方法的智能化和定量化。③矿产资源（固、液、气）普查勘探一体化的智能化和定量化。④水文、工程、环境地质和灾害地质的智能化和定量化研究。⑤地质图件的计算机三维化、自动化。综合信息多学科交叉研究是共同的核心，传统的找矿型转向社会服务型是必然趋势。

关键词　数学地质，发展趋势。

当代社会所面临的资源、环境、灾害、水、粮食等重大问题向地质科学提出了一系列极富挑战性的科学问题，尤其是矿产资源探寻和评价、地质灾害的防治与减轻，以及全球变化溯源和预测等问题，已成为地质科学亟需解决的任务。岩石圈、全球变化和地球深部内层构成了当今地学研究的三大主题。以这三大主题为核心形成了一系列跨学科的重大研究领域，如岩石圈研究，已由以往探测岩石的结构构造转移到岩石圈的演化和动力学方面上来（肖庆辉等，1994）。数学地质作为地质与数学的交叉学科，也应顺应这一潮流，并理所当然地起到它自己所独特的作用。

以往对数学地质的理解存在两种观点：一种认为数学地质是建立、检验和解释地质过程的概念的随机模型的科学（A. Б. 维斯捷利乌斯，1977）；另一种认为数学地质包括地球科学中的全部数学应用（F. P. Ageterbeg，1974；J. C. Davis，1973；赵鹏大，1983）。仅仅对已明显的地质结论作一点数学修饰的传统数学地质（多元统计方法）时代过去了。现在数学地质的发展已逐步从理论向应用方向发展，某些领域已能直接为国民经济服务。因此，数学地质的内含必须拓宽才能适应人类社会对它的要求。我们认为，数学地质是应用数学理论与模型、计算机理论与方法来研究地质过程及其所产生的地质体和资源体的智能化、定量化的科学。随着数学地质理论方法的发展，将会带动地质科学及其相邻地学中其它科学向现代化科学方向发展。因此，如同数学是一切自然科学 的基础一样，数学地质必然是地质科学的基础。

一、数学地质的研究方向和发展目标

1. 地质科学的智能化和定量化是地质科学由定性分析向定量分析发展的必然。大家知道，地质科学在很大程度上还是一门充满设想和假说的经验性学科。由于地质现象的复杂

性、难验证性，加之不同专家的经历不同，对同一地质问题往往有不同的认识，甚至出现矛盾结论。显然，单个专家的认识不可避免地带有片面性；同时，由于地质学科分支的日益增多，使得他们各自作用的比重也在逐渐下降。为获得更逼近真理的认识，对专家的意见必须以“偏听则暗，兼听则明”的原则对待。当然，各学科、各专家的“作用权”的大小也是不一样的。因此，对多学科、多专家的智慧、信息进行集成化研究，建立知识库，必然会导致智能化。如开放的多 AGENT❶ 协作系统的集成化研究就是一个方向。地质学中传统的、难以比较的模糊概念和术语很多，比如“绿岩带”，“岩体边界不规则，缓倾斜端”等等，不同的人理解各异；数学的渗透，必然使地质科学走向“定量化”的道路，将会使人们对地球有更深入的认识。一些地质理论学说，可在一定程度上通过建立数学模型，用计算机模拟来验证。如美国、欧共体、日本等都提出了各自的信息高速公路计划，我国也开始着手商讨这方面的对策。它对地球科学的影响，无疑将是深远的。数学地质在采用国际标准，建立地质资料（包括图形和 数据等）数据库，并与国内外联网，资源共享等方面应大力加强研究，真正起到“桥梁”作用。因此，加强地质科学的新理论、新学说的探索，并研究出一套适合的数学模型和计算机应用软件，以及地质信息的网络化是一大方向。

2. 地质、遥感、物探、化探技术方法的智能化和定量化研究，属于地质领域的数学地质研究。如何经济、方便、快速地采集并处理各种地质数据，使之系统化，一直是地质各分支学科的重要研究方向之一，对它们的智能化和定量化将导致地质科学的又一次革命。地质中的遥感填图及对组成元素、化学成分的指标定量化克服了地质填图中用路线地质测量以线代面的缺点。物探中的许多新方法手段使其成果的地质多解性得到了一定程度的扼制，像测井中用神经网络技术识别油、水层已取得了一定效果。现在，神经网络技术已扩散到不少地质分支学科，是一个很有潜力的技术方法。地震、重力、航磁数据的定量综合研究使地质解释更为合理，已得到证实。遥感手段的出现曾使地质学家得以从宏观角度来研究地质现象。遥感技术的发展使得地质填图从过去长期艰难的路线地质填图得以解脱，变得快捷化。遥感图像与重磁资料、化探资料的综合定量分析是一研究方向。地理信息系统（GIS）的三维化使得多学科信息的集成与综合有了精确的计算机化的空间定位基础，它与各地质分支的结合是必然趋势。各地质数据的特异值、分布问题仍然值得重视。总之，多学科信息的处理一直是数学地质的研究内容，数学地质的分析处理方法早已渗透其中。

3. 矿产资源（固体、液体、气体）普查、勘探、开采一体化问题的智能化和定量化研究属于矿产资源开发的数学地质研究范畴。矿产资源定性、定量评价一直是数学地质学科中比较活跃的一个分支。近年来，在矿产预测及评价方面，求异（朱章森，1991）、相似类比和定量组合控矿三大预测理论的结合及地质异常的提出（赵鹏大，1991），综合信息矿产预测及评价原理的提出（王世称等，1985，1989）适应了科学找矿的需要，传统的单打一（单学科）研究手段已不能满足当前 找寻盲矿，新类型矿和大型、超大型矿床的要求．多学科数据综合研究分析的必要性已得到共识，并希望建立一些专家系统（赵鹏大，1989；王世称，1990；Pan Guocheng，1992）。

预测理论，一般分相似类比、对称律和周期性等三大类，目前在矿产预测领域对后两类的认识还不足。就对称律而言，从基本粒子到宏观宇宙空间，对称律随处可见。人体也

---

❶ 意为“多专家”。

是遵循对称律的，有左右手、左右腿、左右眼、左右耳等之分。依照对称律，就可以通过“左手”来预测出“右手”。从宇宙起源来看，矿产资源体的赋存也应该存在某种对称性。现在，问题的关键是如何发现它们。周期性也如此，找出成矿作用的周期规律对预测矿产无疑是重要的。对称律和周期性研究对于从复杂、多噪声信息中分离出深层次的特定信息可能是一大方向。仅靠相似类比，可能难以识别隐藏信息。当然，综合信息成矿系列预测应是预测的核心；否则，易出现评价不足和评价过头等问题。不同比例尺的矿产预测，类似于随机康托集的分布，要强调系统预测。

大比例尺矿产预测是一个热点，又是一个难点，经常遇到的突出问题是：研究区及其附近无已知矿床（点），或者数量极少，无法满足统计分析的最低要求；模型区研究程度高、信息丰富，而预测区研究程度低、信息少，或者因模型区矿产的开采现已无法得到与预测区可以类比的某种信息，结果造成研究程度高的区域反而成矿远景大的怪圈，使矿产预测难以有新的重大突破。因此，大比例尺预测的关键是建立找矿模型的问题，中小比例尺预测的关键是研究汇水盆地物探、化探、遥感成果的关联问题。

对于石油、天然气的预测也已强调多学科信息综合评价。地质统计学、分形理论等在油藏描述、油气运移等方面的应用，盆地分析的三维化以及与地理信息系统的结合等均值得重视。

分形、混沌动力学在地学界首先用于地球物理，尔后迅速波及到许多地质领域。王江海（1989）、沈步明（1990）、孟宪国等（1992）从构造、岩石、地球化学动力学及矿产预测等角度作了初步研究，提出了一些新的思想。问题是地质问题如何归类于线性、弱非线性及非线性问题，然后，才可能运用合适的研究方法。对于前二者，传统的线性模型就能解决；对于后者，则需要用非线性模型。在矿产预测中是否存在气象预报中的“蝴蝶效应”问题，为什么相似类比理论在不少预测区不灵，这很可能是初始条件的差异敏感性所致。矿床（体）很可能就是吸引子，不稳定吸引子不成矿，成矿元素被吸引子吸引而聚集、沉淀而成矿。大型、超大型矿床与中小型矿床、矿点的差别，可能不在于成矿作用的大小，很可能是因一定的元素含量流体积累，达到临界状态而产生的分叉现象。因此，矿床的产出是确定性（规律性）与随机性的统一。多元地质统计学，如主成分地质统计学、空间因子分析等用于矿产评价，由于考虑了空间相关性，可能比以往的数学模型效果更好。非线性科学研究是重点。

4. 水文、工程、环境和灾害地质的智能化和定量化研究已取得了不少进展，它们属于数学地质新方法及新应用。在水文地质学中，地质统计学已成功地应用于评价岩石的渗透性和孔隙度；在工程地质方面，连接英法两国的英吉利海峡海底隧道工程，由于应用地质统计学预测了 Gault 粘土层而确保了工程的顺利施工（R. Blanchin；J. P. Chilès. 1993）。滑坡专家系统的研制（肖树芳等，1994）；在农业地质学中对土壤中常量、微量元素利用统计分析和地质统计学研究其与农作物的关系，达到科学种田的目的，均不可忽略。数学地质的一些传统数据处理方法已在环境地质研究中显示了广阔的发展前景，如一些有害微量元素 As、Hg、F 等与地方病关系的研究；地质灾害的防护研究，尤其是地震，目前虽开展工作较多，但效果仍远未尽如人意，对其形成过程的分析、模拟、预测，数学地质也应有所作为。研制专家系统及定量化是其发展趋势。

5. 地质科学与其它科学的一个显著不同就是图形多而复杂，要求高，难度大。地质科

学的现代化必然要解决地质过程的三维计算机模拟。三维图示技术、图形推理及自动成图问题，不可避免地会涉及到模式识别、人工智能等相关计算机技术。

尽管数学地质有如此多的研究方向，几乎涉及到地质科学的方方面面，但存在共同的探索性的理论和方法问题，即地质科学的数学特征、单元划分、智能化和定量化及有关数学模型应用及计算机化等问题。解决问题的思路依然是先将地质问题转换为数学、计算机问题，经过各种数据处理及推理分析，再加以地质解释。其所应用的信息均来源于地质、物探、化探、遥感等不同学科的交叉研究。对这些信息的综合研究是共同的核心问题。综合信息的解释，针对不同的研究对象有相应的方法，并且是从四维时空（x、y、z、t）来认识地质问题。在今后相当长一段时间内，定性分析与定量分析并存，定性分析结论有着指导性作用。因此，在现阶段，盲目夸大定量分析的作用可能会适得其反，应适度。

二、数学地质的研究内容

地质科学已由找矿型转向社会服务型。数学地质应适应这种新形势，不断拓宽服务对象，具体地有以下几个方面的新研究内容：

1. 在成矿系列理论（程裕淇、陈毓川等，1979，1983）指导下，开展综合信息矿产资源系列预测和资源评价，形成系统研究地质体控制系列矿产资源体的专家系统和定量化；在相似类比、求异理论、对称律和周期性理论指导下，应用综合信息开展危机矿山预测和油气评价。目前，已在辽宁青城子铅锌矿和辽宁水泉金矿进行了预测，获得了明显实效。

2. 在地质先验前提下，对地质、遥感、地球物理、地球化学信息进行环形和线性构造提取和关联的智能化和定量化研究，克服单一路线地质观测的局限性，推动区域地质调查工作向现代化和科学化方向发展。

3. 在地质先验前提下，结合重力、磁法、地震、电法等探索地面地质和深部地质的关系，并对其开展智能化和定量化研究，立体地认识地质现象和问题。

4. 开展水文、工程、环境、灾害地质的专家系统研究，加强新的数学分支，如运筹学、分形、混沌动力学、集合论、计算数学和系统论等学科的研究，注重研究与人类生存环境密切相关的地质问题。比如，在干旱、半干旱地区开展综合信息找水、供水研究，因为水资源的定位与地质构造密切相关，并能通过物探、化探手段发现之。

5. 研制适合地质特点的地理地质信息系统，数据的标准化和规范化、地质信息数据库的资源共享等问题。

总之，无论何种学科的研究都必须使用综合信息，强调多学科信息的交叉研究与信息集成，强调复杂背景下有效信息、深层次信息的获取研究，以及各学科信息的定量化、智能化研究等，这些都是数学地质的前沿课题。

参 考 文 献

[1] 中国科学院数学地质组，1977，数学地质引论，地质出版社。

[2] 刘承祚等，1980，数学地质专辑（一），地质出版社。

[3] 煤炭科学研究院地质勘探研究所等，1979，煤炭工业出版社。

[4] 赵鹏大等，1983，矿床统计预测，地质出版社。

[5] 陆明德，1991，石油、天然气数学地质，中国地质大学出版社。

[6] 刘承祚，1991 (3)，国外地质。
[7] R. Blanchin & J. P. Chilès, Mathematical Geology, 1993, Vol. 25, No. 7, New York.
[8] 程裕淇、陈毓川等，初论矿床成矿系列，中国地质科学院学报，Vol. 1, No. 1, 1979.
[9] 程裕淇、陈毓川等，再论矿床的成矿系列问题，中国地质科学院学报，Vol, 1, No. 6, 1983.
[10] 王世称等，综合信息矿产预测理论，长春地质学院学报（矿产资源评价专辑），1989.
[11] 王世称等，1989，综合信息解译原理与矿产预测图编制方法，吉林大学出版社。
[12] 王世称等，1993，内生矿产成矿系列中比例尺预测方法研究，地质出版社。

空间域及时间-空间域多元信息的地质统计学研究及应用

侯景儒　郎宝平　王志民　潘贵平
（北京科技大学地质系）

摘　要　本文首先讨论了空间域及时-空域多元信息地质统计学研究中诸如协同区域化线性模型等基本问题，其次，系统讨论了空间域及时间-空间域中利用多元信息进行区域化变量、空间分量及区域化因子的最优估计理论及方法，最后给出应用上述方法解决生产中具体问题的实例。

关键词　地质统计学，空间分量，区域化因子，因子克立格法，协同克立格法。

地质统计学是以区域化变量理论为基础，以变异函数为主要工具，研究那些在空间分布上既有随机性又有结构性的自然现象的科学。因此，凡是要研究空间分布数据的特征、对某些变量进行最优估计，或模拟其离散性及波动性时，均可用地质统计学理论及相应的方法进行研究[1][2][3][4][5][6]。地质统计学是数学地质领域内发展迅速、应用前景广阔的边缘学科，自 1977 年地质统计学在我国系统研究以来，20 多年来的实践证明地质统计学具有强大的生命力，它不但在地质科研，找矿勘探[2][5][6]，采矿设计及矿山地质[9][10]等领域显示出优越性，取得了一定的经济效益，而且已逐步成为能表征和评估各种自然现象、自然过程以及估计各种自然资源的工程学科。

中国地质统计学家在把地质统计学方法应用于生产实际的同时，还不断致力于地质统计学的理论研究，提出并推广各种有用的地质统计学方法，例如，指示克立格法及其他非参数地质统计学方法[7][10]，协同克立格法及其他多元地质统计学方法[8][9][10]，对数正态克立格法及泛克立格法[5]等。中国的地质统计学研究几乎涉及到当今国际地质统计学领域的各个方面。

地质统计学除成功地应用于地质科学及矿业领域之外，地质统计学由于自身的特点也将不断地应用于环境科学、农林科学、水文及工程科学、海洋科学及其他领域，所涉及的变量也将具有空间特征及时间-空间的特征，而所研究的变量也从单变量到多变量。本文就是讨论空间域、时间-空间域中多元信息的地质统计学理论、方法及实际应用。

一、空间域及时-空域中多元信息地质统计学研究的若干基本问题

在包括地球科学在内的许多自然科学中，样品常以其空间位置为特征，因此用这种类型样品所提供的多元信息描述诸如地质过程或其他自然现象时应该从位置相关和变量相关

两个方面来研究这种多元信息，即既要分析由于地理位置引起的样品之间的相关，又要分析由于同一位置上不同变量之间引起的变量之间的相关。在多元信息条件下建立某一自然现象的最佳数学模型时，必须同时考虑多元信息的空间相关及统计相关。

多元统计分析方法考虑到变量之间的相关关系，但几乎未考虑到多元信息的空间特征。普通克立格法等地质统计学方法只限于对单变量的研究，而且也没有考虑空间尺度对所研究的区域化变量的影响。多元地质统计学就是为解决上述问题而提出的一种新的理论。多元地质统计学是以协同区域化（coregionalization）理论为基础，以互变异函数（covariogram）为基本工具，研究那些定义于同一空间域中，既具有统计相关又具空间位置相关的多元信息空间结构的地质统计学，其主要方法是协同克立格法（cokriging）及因子克立格法（factor kriging）。

但是在许多自然现象的研究中，人们所研究的变量不仅具有空间特征，而且具有时间特征，也就是说，可以把研究的变量看成为时-空域中的随机函数[4][5]（spatio-emporal random function），例如水文观测站中任一测点的水压力数据等，这些数据的明显特征是既有空间性、又有时间性，为了研究这种在时-空域中的有用信息，人们把地质统计学理论方法延伸到时-空域的研究之中。

下边对空间域、时-空域中多元信息地质统计学研究中的若干问题进行讨论。

1. 基本假设

设有一个随机函数集 $\{Z_i(x), i = 1,2,\cdots,N_v\}$ 和这些随机函数的一个现实，即区域化变量 $\{z_i(x), i = 1,2,\cdots,N_v\}$

假设有涉及 N_v 个区域化变量的样本集，它们位于 N 个点处。

$$\{z_i(x_\alpha); i = 1,2,\cdots,N_v, \alpha = 1,2,\cdots,N\}$$

式中 x_α 为点坐标的矢量，则，每一个区域化变量 $Z_i(x)$ 的期望为：

$$E[Z_i(x)] = m_i（常数） \quad (i = 1,2,\cdots,N_v) \tag{1}$$

对于每一个区域化变量 $Z_i(x)$ 和 $Z_j(x)$ 的互协方差函数为：

$$E[Z_i(x) \cdot Z_j(x+h)] - m_i m_j = C_{ij}(h) \quad (i,j = 1,2,\cdots,N_v) \tag{2}$$

对于每一个区域化变量 $Z_i(x)$ 和 $Z_j(x)$ 的互变异函数为：

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2}E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)] \cdot [Z_j(x+h) - Z_j(x)]\} \quad (i,j = 1,2,\cdots,N_v) \tag{3}$$

当协同区域化变量的增量的均值及互变异函数存在且与其位置无关时，称该协同区域化变量服从内蕴假设：

$$E[Z_i(x) - Z_i(x+h)] = 0$$

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2}E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)] \cdot [Z_j(x+h) - Z_j(x)]\}$$

当协同区域化变量 $Z_i(x)$ 的期望及互协方差函数存在且平稳时，称该协同区域化变量服从二阶平稳假设：

$$E[Z_i(x)] = m_i$$

$$C_{ij}(h) = E[Z_i(x) \cdot Z_j(x)] - m_i m_j$$

互变异函数与互协方差函数之间有如下关系式：

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - \frac{1}{2}[C_{ij}(h) + C_{ji}(h)]$$

2. 协同区域化阵与协同区域化的线性模型

一个区域的变异函数模型可以由若干个变异性结构组成，即把变异函数曲线可以分解为若干个结构，或者说，我们把变异函数模型看成是 $s+1$ 个系数 b_{ij}^u 与基本变异函数 $g_u(h)$ 的线性组合：

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_{u=0}^{s} b_{ij}^u g_u(h) \qquad (i,j = 1,2,\cdots,N_v) \tag{4}$$

式（4）中的每一基本变异函数 $g_u(h)$ 均有清楚的意义。把变异函数分解为若干结构（(4) 式所示）是很有用的，它可以使我们分析由这些结构定义的在该空间尺度 $u(u = 0,1,2,\cdots,s)$ 上各区域化变量之间的相关关系，这个相关关系可以由系数 b_{ij}^u 组成的诸 $N_v \times N_v$ 矩阵 B_u 来描述，这些矩阵称之为“协同区域化”矩阵：

$$B_u = [b_{ij}^u] \tag{5}$$

不同空间结构 $g_u(h)$ 的相关系数 $r_{ij}(u)$ 是：

$$r_{ij}(u) = b_{ij}^u / \sqrt{b_{ii}^u b_{jj}^u} \tag{6}$$

若用协方差函数表示，（4）式可改写为：

$$C_{ij}(h) = \sum_{u=0}^{s} b_{ij}^u K_u(h) \tag{7}$$

即把互协方差模型看成是 $s+1$ 个系数 b_{ij}^u 与基本协方差函数 $K_u(h)$ 的线性组合。

设有一组彼此具一定程度相关性的随机函数 $\{Z_i(x), i=1, 2, \cdots, N_v\}$ 被分解成一组不相关的随机函数 $\{Y_p^u(x);\ u=0, 1, 2, \cdots, s;\ p=1, 2, \cdots, m\}$

$$Z_i(x) = \sum_{u=0}^{s}\sum_{p=1}^{N_v} a_{up}^i Y_p^u(x) \tag{8}$$

式（8）中 $p = 1,2,\cdots,N_v$，其中有 $m<N_v$ 个是重要的，也就是说，我们可以找到一组变换系数 a_{up}^i 把 $Z_i(x)$ 变成另一组正交的变量 $Y_p^u(x)$，或者说，把 $Z_i(x)$ 分解为不同尺度 $u(u = 0,1,2,\cdots,s)$ 的正交的 $Y_p^u(X)$ 的线性组合，即协同区域化的线性模型，而每一尺度上的 $Y_p^u(x)$ 均对应于(4)式或(7)式表示的空间结构。为了求解(8)式中的变换系数应该回忆主成分分析方法。

3. 时-空域中多元信息的互协方差函数与互变异函数

设 N 个空间位置 α 的每一时间 $t(t = 1,2,\cdots,T)$ 上测得某区域化变量的观测值 $Z_t(x_\alpha)(t = 1,2,\cdots,T;\alpha = 1,2,\cdots,N)$，这 T 个区域化变量 $\{Z_t(x), t = 1,2,\cdots,T\}$ 可以看成是 T 个组间相关的随机函数 $\{Z_t(x), t = 1,2,\cdots,T\}$ 的一个具体现实，对于区域化变量 $Z_t(x)$ 与 $Z_{t'}(x)$ 有互协方差函数

$$C_{tt'}(h) = E[Z_t(x) \cdot Z_{t'}(x+h)] - m_t m_{t'} \qquad (t,t' = 1,2,\cdots,T) \tag{9}$$

及互变异函数

$$\gamma_{t't}(h) = \frac{1}{2}E\{[Z_{t'}(x+h) - Z_{t'}(x)] \cdot [Z_t(x+h) - Z_t(x)]\} \tag{10}$$

$$(t, t' = 1, 2, \cdots, T)$$

且式（9）中的 m_t（或 $m_{t'}$）可以表示为：

$$m_t = E[Z_t(x)] \tag{11}$$

这时，当（9）式及（11）式同时存在时，说明协同区域化变量服从二阶平稳假设，而内蕴假设的条件则是（10）式存在，且有：

$$E[Z_t(x)] = E[Z_t(x+h)] = m_t \tag{12}$$

显然，当 $t = t'$ 时，$C_{tt'}(h) = C_t(h)$，$\gamma_{t't}(h) = \gamma_t(h)$。必须指出：$\gamma_t(h)$ 总是大于或等于 0，$\gamma_t(h) \geqslant 0$，但 $\gamma_{tt'}(h)$ 可以是负值。可以证明，对于 t 与 t' 有：$\gamma_{t't}(h) = \gamma_{tt'}(h)$，$C_{t't}(-h) = C_{tt'}(h)$，且：

$$\gamma_{t't}(h) = C_{t't}(0) - \frac{1}{2}[C_{t't}(h) + C_{tt'}(h)] \tag{13}$$

4. 时-空域中协同区域化的线性模型

如同在空间域的研究一样，在时-空域中也可以把变异函数模型看成是 $s+1$ 个系数 $b^u_{tt'}$ 与基本变异函数模型 $\gamma^u(h)$ 的线性组合：

$$\gamma_{tt'}(h) = \sum_{u=0}^{N_s} b^u_{tt'} \gamma^u(h) \tag{14}$$

而 $b^u_{tt'}$ 表示为某一空间分量 $u(u = 0, 1, 2, \cdots, s)$ 的协同区域化矩阵：

$$B^u = [b^u_{tt'}] \tag{15}$$

式（14）也可用协方差函数表示为：

$$C_{tt'}(h) = \sum_{u=0}^{N_s} b^u_{tt'} C^u(h) \tag{16}$$

在给定的尺度 $u(u = 0, 1, 2, \cdots, s)$ 条件下，不同时间的某一区域化变量的相关系数 $r^u_{tt'}$ 可表示为：

$$r^u_{tt'} = b^u_{tt'} / \sqrt{b^u_{tt} b^u_{t't'}} \tag{17}$$

二、空间域多元信息的地质统计学研究

1. 区域化变量的最优估计——协同克立格法

设有一组由 N_v 个在统计上及空间位置上彼此相关的区域化变量 $\{Z_i(x), i=1, 2, \cdots, N_v\}$ 服从二阶平稳或内蕴假设。又设 $i0$ 为 $i=1, 2, \cdots, N_v$ 变量中某一特定要估计的主变量，现在要估计支撑 $V(x_0)$ 上 $Z_{i0}(x)$ 的平均值 Z_{vi0} 的估计量 Z^*_{vi0}，Z^*_{vi0} 是所有 N_v 个协同区域化变量的全部有用信息的线性组合：

$$Z^*_{vi0} = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{\alpha_i=1}^{n_i} \lambda_{\alpha_i} Z_{\alpha_i} \tag{18}$$

式（18）中 N_v 为变量数．$Z_{\alpha i}$ 为第 α（$\alpha=1, 2, \cdots, n$）个样品第 i（$i=1, 2, \cdots, N_v$）个变量的观测值，λ_{α_i} 为第 α 个样品第 i 个变量的权系数。求解 λ_{α_i} 的协同克立格方程组是：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_v}\sum_{\beta_j=1}^{n_j} \lambda_{\beta_j}\overline{C}_{ij}(v_{\alpha_i},v_{\beta_j}) - \mu_i = \overline{C}_{i0.i}(V_{i0},v_{\alpha_i}) & (\alpha_i = 1,2,\cdots,n_i) \\ \sum_{\alpha_{i0}=1}^{n_{i0}}\lambda_{\alpha_{i0}} = 1 & (i = 1,2,\cdots,N_v) \\ \sum_{\alpha_i=1}^{n_i} \lambda_{\alpha_i} = 0 \qquad (i \neq i0) & \end{cases} \tag{19}$$

相应的协同克立格方差是

$$\sigma_{V i0}^2 = \overline{C}_{i0.i0}(V_{i0},V_{i0}) + \mu_{i0} - \sum_{i=1}^{N_v}\sum_{\alpha_i=1}^{n_i}\lambda_{\alpha_i}\overline{C}_{i0.i}(v_{i0},v_{\alpha_i})$$

2. 空间分量的最优估计

把一组协同区域化变量 $\{Z_i(x), i = 1,2,\cdots,N_v\}$ 分解成若干个空间分量：

$$Z_i(x) = \sum_{u=0}^{s}\sum_{i=1}^{N_v}a_u^i Z_u^i(x) \tag{20}$$

设 $i0$ 为 $i = 1,2,\cdots,N_v$ 个变量中某一待估的主变量，现在要估计任一支撑 x_0 上在某一空间结构 u（u=0，1，2，…，s）条件下 Z_u^{i0}（x_0）的估计量 $\hat{Z}_u^{i0}$（x_0），而 $\hat{Z}_u^{i0}$（x_0）可表示为所有 N_v 个区域化变量在空间结构 $u(u = 0,1,2\cdots,s)$ 条件下的全部有效信息的线性组合：

$$\hat{Z}_u^{i0}(x_0) = \sum_{i=1}^{N_v}\sum_{\alpha_i=1}^{n_i}\lambda_{\alpha_i}Z_{\alpha_i} \tag{21}$$

（21）式表示在支撑 x_0 上第 $i0$ 个变量($i0$ 是 N_v 个变量中待估的主变量）第 u（u=0，1，2，…，s）个结构的空间分量的估计量，求解 λ_{α_i} 权系数的协同克立格方程组是：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_v}\sum_{\beta_j=1}^{n_j}\lambda_{\beta_j}^{i0}\overline{C}_{ij}(x_{\alpha_i},x_{\beta_j}) + \mu_i = \overline{C}_{i0.i}^{u}(x_{0i0},x_{\alpha_i}) \\ \sum_{\beta_j=1}^{n_j}\lambda_{\beta_j}^{i0} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

相应的协同克立格方差是：

$$\sigma_{x0.i0}^2 = \overline{C}_{i0.i0}^{u}(x_{0i0},x_{0i0}) + \mu_{i0} - \sum_{i=1}^{N_v}\sum_{\alpha_i=1}^{n_i}\lambda_{\alpha_i}\overline{C}_{i0.i}^{u}(x_{0i0},x_{\alpha_i}) \tag{23}$$

这里必须注意，式(22)、(23)中协方差函数 $C_{ij}^u(h)$ 对应于(21)式中正交的空间分量 $\hat{Z}_u^{i0}(x_0)$。

$\hat{Z}_u^{i0}(x_0)$ 表示在指定空间尺度 $u(u = 0,1,2,\cdots,s)$ 上第 $i0$ 个区域化变量的性状，它在许多自然现象的研究中是很有用的。

3. 区域化因子的估计——因子克立格法

用于区域化因子估计的方法主要是因子克立格法，它是将主成分分析与克立格技术结合的地质统计学方法。区域化因子反映了在给定空间尺度 $u(u = 0,1,2,\cdots,s)$ 上多元信息的基本情况。

设有一组协同区域化变量 $Z_i(x)(i = 1,2,\cdots,N_v)$，它可表示为彼此正交的区域化因子 $Y_p^u(x)(p = 1,2,\cdots,m)$ 的线性组合：

$$Z_i(x) = \sum_{u=0}^{s}\sum_{p=1}^{N_v}a_{up}^i Y_p^u(x) \tag{24}$$

对于每一个$Y_p^u(x)$,对应于空间尺度u有一变异函数模型$g_u(h)$,且总的互变异函数$\gamma_{ij}(h)$表示为:

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_{u=0}^{s} b_{ij}^{u} g_u(h) \tag{25}$$

(25) 式中系数b_{ij}^u可分解为变换系数,则:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(h) &= \sum_{u=0}^{s} b_{ij}^{u} g_u(h) \\ &= \sum_{u=0}^{s} \sum_{p=1}^{m} a_{up}^{i} a_{up}^{j} g_u(h)\end{aligned} \tag{26}$$

(24)式中的区域化因子$Y_p^u(x)$的估计值$\hat{Y}_p^u(x)$可表示为估计邻域内n个有效数据$Z_i(x_a)$的线性组合:

$$\hat{Y}_p^u(x_0) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{a=1}^{n} \lambda_a^i Z_i(x_a) \tag{27}$$

在给定空间尺度u下,待估域x_0上任一区域化因子$Y_{p0}^u(x_0)$的估计值$\hat{Y}_{p0}^u(x_0)$为:

$$\hat{Y}_{p0}^u(x_0) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{a=1}^{n} \lambda_a^i Z_i(x_a) \tag{28}$$

求解 (28) 式中λ_a^i的克立格方程组是:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_j^{\beta} \overline{C}_{ij}(x_a, x_\beta) + \mu_i = a_{up0}^{i} \overline{C}^{u}(x_a, x_0) \\ \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_i^{\beta} = 0 \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \cdots, N_v) \\ (\alpha = 1, 2, \cdots, n) \end{matrix} \end{cases} \tag{29}$$

当为单变量时,式 (28) 变为:

$$Y_u^*(x_0) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a^u Z(x_a) \tag{30}$$

(29) 式变为:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta^u \overline{C}_u(x_a, x_\beta) + \mu = a_u \overline{C}_u(x_0, x_a) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n) \\ \sum_{a=1}^{n} \lambda_a^u = 0 \end{cases} \tag{31}$$

(29) 及(31) 式中的a_{up0}^i及a_u可用主成分分析得到。

三、时-空域中多元信息的地质统计学研究

1. 区域化变量的最优估计

设服从二阶平稳或内蕴假设的区域化变量由T个在统计学及空间、时间上互相关的随机函数$\{Z_t(x), t = 1, 2, \cdots, T\}$的集合来表征,现在我们要估计支撑$V(x_0)$上随机函数$Z_{t_0}(x)$的平均值$Z_{V_{t_0}}$的估计量$Z_{V_{t_0}}^*$($t_0$是$t = t_1, t_2, \cdots, T$中该区域化变量要估计的时间特定值),$Z_{V_{t_0}}^*$是协同区域化的所有$T$个特定时间的全部有效数值$Z_{a_t}$的线性组合:

$$Z_{V_{t_0}}^* = \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t=1}^{n_t} \lambda_{a_t} Z_{a_t} \tag{32}$$

式(32)中的 Z_{α_t} 是估计领域内定义于支撑$\{v_{\alpha_t},\alpha=1,2,\cdots,n,t=1,2,\cdots,T\}$上有效信息值。求解(32)式中的 λ_{α_t} 可通过解下列方程组得到：

$$\begin{cases} \sum\limits_{t'=1}^{T}\sum\limits_{\beta_{t'}=1}^{n_{t'}} \lambda_{\beta_{t'}} \overline{C}_{t't}(v_{\beta_{t'}}, v_{\alpha_t}) - \mu_t = \overline{C}_{t_0 t}(V_{t_0}, v_{\alpha_t}) & \\ \sum\limits_{\alpha_{t_0}=1}^{n_{t_0}} \lambda_{\alpha_{t_0}} = 1 & \begin{array}{l}\alpha_t = 1,2,\cdots,n_t \\ t = 1,2,\cdots,T\end{array} \\ \sum\limits_{\alpha_t=1}^{n_t}\lambda_{\alpha_t} = 0 & \forall t \neq t_0 \end{cases} \tag{33}$$

其克立格方差为：

$$\sigma^2_{V_{t_0}} = \overline{C}_{t_0t_0}(V_{t_0},V_{t_0}) + \mu_{t_0} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{\alpha_t=1}^{n_t}\lambda_{\alpha_t}\overline{C}_{t_0t}(V_{t_0},v_{\alpha_t}) \tag{34}$$

2. 空间分量的最优估计

可以把区域化变量 $Z_t(x)(t=1,2,\cdots,T)$ 分解成在给定空间尺度 u 下相互正交的空间分量 $Z^t_u(x)$：

$$Z_t(x) = \sum_{u=0}^{N_t} Z^t_u(x) \qquad (t=1,2,\cdots,T) \tag{35}$$

任一待估域 x_0 上时间 t 的观测值在给定空间尺度 u 下的空间分量 $Z^t_u(x_0)$ 是估计邻域内 n 个有效信息 $Z_t(x_\alpha)(t=1,2,\cdots,T,\alpha=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合 $\hat{Z}^{t_0}_{u_0}(x_0)$：

$$\hat{Z}^{t_0}_{u_0}(x_0) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda^t_\alpha Z_t(x_\alpha) \tag{36}$$

求解权系数 λ^t_α 的克立格方程组是：

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{T}\sum\limits_{\beta=1}^{n}\lambda^\beta_t \overline{C}_{tt'}(x_\alpha,x_\beta) + \mu_t = \overline{C}^u_{tt_0}(x_\alpha,x_0) \\ \sum\limits_{\beta=1}^{n}\lambda^\beta_t = 0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{37}$$

3. 区域化因子的最优估计

可以把服从二阶平稳或内蕴假设的区域化变量 $Z_t(x)$ 表征为彼此正交的平稳的 p 个区域化因子 $Y^u_p(x)$ 的线性组合：

$$Z_t(x) = \sum_{u=0}^{N_t}\sum_{p=1}^{T} a^u_{tp} Y^u_p(x) \qquad (p=1,2,\cdots,T,\text{其中 } m<T \text{ 个是重要的}) \tag{38}$$

对于每一 $Y^u_p(x)$ 均对应于给定空间尺度 u 下的变异函数 $\gamma^u(h)$(参看式(14))，可以把式(14)中的$[b^u_{tt'}]$分解成变换系数并得到：

$$\gamma_{tt'}(h) = \sum_{u=0}^{t}\sum_{p=1}^{T} a^u_{tp}\, a^u_{t'p}\, \gamma^u(h) \tag{39}$$

式(39)中的 a^u_{tp} 是第 t 时间的变量值与区域化因子 $Y^u_p(x)$ 在给定空间 u 下的相关系数，该系数可借助于主成分分析求得。

任一待估域 x_0 上区域化因子 $Y^u_p(x_0)$ 的估计值 $\hat{Y}^u_p(x_0)$ 可用估计邻域内几个有效信息值 $Z_t(x_\alpha)$ 的线性组合表示：

$$\hat{Y}^u_p(x_0) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda^t_\alpha Z_t(x_\alpha) \tag{40}$$