

摄影测量原理续编

王之卓

摄影测量原理续编

王之卓 编著

测绘出版社

本书系已出版的《摄影测量原理》一书的续编。作者积近几年对摄影测量若干专题研究的成果，并参考国内外摄影测量技术发展的新资料编著而成。主要包括：区域网平差的系统误差，配置法及其应用，粗差判断理论，联机空中三角测量，有限元、样条函数、正交函数及阵列代数在摄影测量中的应用，投影变换理论，数字影象基础，富里叶变换及分析，影象采样理论，数字影象相关，影象数字几何处理和灰度处理，影象分类和编码，航天遥感影象测图等。可供摄影测量与遥感科技人员及高等院校有关专业师生学习参考。

摄影测量原理续编

王之卓 编著

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16·印张 16.25·字数 364 千字

1986 年 7 月第一版 1986 年 7 月第一次印刷

平装本	0.001—2,400册	3.90元	13039·新 405
精装本	0.001—1,100册	6.70元	13039·新 406

目 录

第一章 区域网平差的系统误差	(1)
第一节 概述.....	(1)
第二节 附加参数的选择.....	(1)
第三节 附加参数的统计检验.....	(6)
第四节 带有附加参数的平差运算方案.....	(8)
第五节 验后方差的估计.....	(11)
第六节 多组附加参数自检法概念.....	(12)
第七节 验后补偿法.....	(13)
第八节 附加参数的实际应用及效果.....	(14)
第二章 法方程式的带状及加边带状矩阵	(16)
第一节 法方程式的带状矩阵.....	(16)
第二节 法方程式的加边带状矩阵.....	(17)
第三节 扩大加边的方法.....	(18)
第四节 摄影测量与大地测量观测值的联合平差.....	(19)
第五节 加边带状矩阵的逐次分块约化法.....	(25)
第三章 配置法及其在航测中的应用	(27)
第一节 概述.....	(27)
第二节 配置法、滤波及推估原理.....	(28)
第三节 协方差函数.....	(33)
第四节 摄影测量变形的协方差函数.....	(35)
第五节 摄影测量中的应用举例.....	(39)
第六节 多面函数的最小二乘推估法.....	(44)
第四章 摄影测量中粗差判断理论	(48)
第一节 概述.....	(48)
第二节 有关改正数的理论.....	(50)
第三节 数据探测法中判断粗差的统计量.....	(55)
第四节 可能发现粗差的最小值.....	(57)
第五节 残余粗差对未知数函数的影响.....	(60)
第六节 残余粗差对模型坐标的影响.....	(62)
第七节 选权迭代法剔除粗差.....	(64)
第八节 粗差检验的全过程.....	(69)

第九节 数据探测法理论的扩展	(71)
第五章 联机(在线)空中三角测量	(73)
第一节 概述	(73)
第二节 联机空中三角测量的作业方案	(73)
第三节 使用解析测图仪的作业特点	(75)
第四节 序贯最小二乘法运算	(76)
第五节 带有新增参数的序贯算法	(78)
第六章 有限元法及样条函数用于摄影测量内插	(81)
第一节 有限元法及样条函数概述	(81)
第二节 一次样条函数	(81)
第三节 三次样条函数	(84)
第四节 基函数的理论	(89)
第七章 正交函数的应用	(92)
第一节 正交函数	(92)
第二节 正交变换与最小二乘解	(93)
第三节 正交多项式	(104)
第八章 阵列代数在数字地面模型中的应用	(108)
第一节 概述	(108)
第二节 二维阵列代数	(108)
第三节 平差(过滤)的阵列代数解法	(111)
第四节 多维阵列代数	(113)
第九章 摄影测量中的投影变换理论	(117)
第一节 投影变换	(117)
第二节 齐次坐标	(118)
第三节 象片纠正的变换理论	(120)
第四节 直接线性变换与共线方程式	(121)
第十章 数字影象基础	(123)
第一节 概述	(123)
第二节 数字影象	(124)
第三节 影象数字化	(125)
第四节 影象灰度的量化	(127)
第五节 频域分析	(128)
第十一章 富里叶级数及富里叶变换	(129)
第一节 富里叶级数	(129)
第二节 富里叶变换	(130)
第三节 离散富里叶变换	(131)
第四节 二维离散富里叶变换	(133)

第五节	快速富里叶变换(FFT)	(134)
第六节	富里叶反变换	(138)
第十二章	重要的富里叶分析	(139)
第一节	矩形脉冲和 Sinc 函数	(139)
第二节	脉冲函数	(140)
第三节	正弦型函数	(141)
第四节	线性系统分析	(142)
第五节	卷积	(143)
第六节	卷积定理	(145)
第七节	二维卷积	(145)
第十三章	影象采样及重采样理论	(147)
第一节	影象采样理论	(147)
第二节	影象重采样理论	(149)
第十四章	数字影象相关	(152)
第一节	相关函数	(152)
第二节	相关函数与功率谱	(153)
第三节	互相关函数的最大值	(155)
第四节	核线相关	(156)
第五节	美军工程测量研究室(ETL)的相关方案	(162)
第六节	高精度数字影象相关的一种方案	(165)
第十五章	影象的数字几何处理	(170)
第一节	概述	(170)
第二节	构象方程式	(170)
第三节	陆地卫星多光谱扫描影象的几何特征	(179)
第四节	数字微分纠正	(182)
第五节	地球曲面的关系公式	(189)
第十六章	影象灰度处理	(194)
第一节	概述	(194)
第二节	波谱特征空间	(194)
第三节	影象变换	(195)
第四节	直方图修正法进行图象增强	(198)
第五节	空间域滤波	(202)
第六节	频率域滤波	(207)
第七节	彩色图象处理	(209)
第八节	影象复原	(210)
第十七章	影象的分类识别简介	(212)
第一节	监督分类法	(212)

第二节	非监督分类法	(216)
第三节	影象分类方法的发展	(218)
第十八章	影象编码	(222)
第一节	概述	(222)
第二节	熵	(222)
第三节	编码过程	(224)
第四节	几种典型的编码形式	(226)
第十九章	航天遥感影象测图	(229)
第一节	概述	(229)
第二节	地形图的精度要求	(229)
第三节	影象的分解力	(231)
第四节	当前的航天影象测图	(232)
第五节	计划中的航天测图传感系统	(235)
第六节	各种传感器综述	(236)
第七节	三维卫星摄影测量	(238)
附录一:	几种重要的概率分布函数	(242)
附录二:	多维正态分布	(245)
附录三:	直积运算规律	(249)
主要参考文献		(250)

第一章 区域网平差的系统误差

第一节 概 述

使用当代解析摄影测量方法进行区域网平差确定点位,可以达到很高的精度,代替一大部分经典的大地测量。进一步发挥摄影测量区域网加密的效果,就要考虑对航摄影象残余的系统误差作有效的抵偿。近年以来,对此曾提出了各种措施,例如安排航线各种飞行方向的办法和在航摄前后对某一个实验场地进行摄影的方法等。但最有前途的方法是在区域网平差过程中使用附加参数的所谓“自检校技术”。它的优点已经由实验证明是很明显的,因为它能够针对系统误差实际可能存在的规律,扩充平差运算的数学模型,而无需为此再进行额外的飞行或量测。

在使用自检校技术时会产生一系列需要解决的问题,例如对附加参数的选择和处理,法方程式系统稳定性的减弱等。这些因素往往随不同任务的几何条件而不同。例如:不同的控制点分布,航摄方向,影象重叠,地形状态等。因此需要讨论对附加参数式样和数量的选择问题,并作适当的统计检验。

当代的自检校光束法区域网平差是算求摄影测量加密点坐标的一种高度准确和有效的技术。当前所能达到的加密精度,在较好的控制点(地面标志点)分布之下,使用光束法平差可以获得影象坐标的中误差为 $\sigma_0 = 2 \sim 4 \mu\text{m}$ 。在旁向重叠为20%的条件下,加密点位中误差(在影象比例尺中)为 $\mu_{x,y} = 3 \sim 4 \mu\text{m}$, $\mu_z = 5 \sim 10 \mu\text{m}$;对60%的旁向重叠则分别为 $\mu_{x,y} = 2.5 \sim 3 \mu\text{m}$, $\mu_z = 4 \sim 6 \mu\text{m}$ 。

在使用附加参数以补偿残余的系统误差时,必须使象点坐标的正 x 方向永远与飞航的方向一致。如此则对与飞航方向有关的附加参数无需再有其他特殊的考虑。

在小的区域网内,系统误差的影响可以有效地通过增加地面控制点的办法加以补偿。因此当存在有足够数量的控制点时,对小区域网的平差是否宜于再使用附加参数的办法,应加考虑。

第二节 附加参数的选择

附加参数用以抵偿在观测数据中存在的系统误差。一般在这种方法的讨论中大部分都是针对航测光束法区域网平差,这是因为光束法应该是区域网平差中精度最高的方法,而且在这种方法中,其观测值系象点坐标,对其中存在的系统误差直接进行改正比较有效。

附加参数用于光束法的基本公式为(参考《摄影测量原理》式(15-15)):

$$x + \Delta x = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

$$y + \Delta y = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \quad (1-1)$$

式中 Δx , Δy 代表该象点处引入的附加参数函数。

早期的自检校方法对 Δx 和 Δy 只限于确定基本的内定向参数(象主点位置和摄影主距), 其后则逐渐试用更多的参数, 反映象点的各种残余系统性变形。当前在摄影测量实用中的附加参数函数不下十多种, 每种中参数的数目一般由 4~25 个(当在地籍摄影测量中常常每张象片内包含有 100 多点。此时附加参数的个数可达 44 个之多)。对这些参数的选择可以分为两种方案, 即顾及象差特点的附加参数和多项式型的附加参数。

一、顾及象差特点的附加参数

选择附加参数的一种方案是按照其象差发生的特点设计。影响象点坐标的象差主要有底片和摄影乳剂的变形、底片压平、光学畸变差、大气折光和仪器误差等。这些误差的一般特性已在《摄影测量原理》第十四章内加以论述。把这些因素具体纳入到附加参数中, 各家做法很不相同。现举比较典型的由 Brown (1975) 所采用的式子为例, 其中包括有总共 29 个附加参数如下:

$$\begin{aligned} \Delta x = & a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 \\ & + \frac{x}{r}(c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x^3 + c_5x^2y + c_6xy^2 + c_7y^3) \\ & + x(k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) + p_1(y^2 + 3x^2) + 2p_2xy + \delta x, + \left(\frac{x}{c}\right)\delta c \\ \Delta y = & b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7xy^2 \\ & + \frac{y}{r}(c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x^3 + c_5x^2y + c_6xy^2 + c_7y^3) \\ & + y(k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) + 2p_1xy + p_2(x^2 + 3y^2) + \delta y, + \left(\frac{y}{c}\right)\delta c \quad (1-2) \end{aligned}$$

其中 x , y 为象点坐标

r 为象点辐射距离, 即 $r^2 = x^2 + y^2$

Δx , Δy 为在象点坐标中的附加改正 (见式(1-1))

对上述的系数可以分类如下:

- (a) $a_1, a_2, \dots, a_7$
 $b_1, b_2, \dots, b_7$ } 表达底片变形的系数
- (b) $c_1, c_2, \dots, c_7$ 表达摄影底片弯曲的系数
- (c) k_1, k_2, k_3 表达光学畸变差辐射方向的变形系数
- (d) p_1, p_2 表达物镜光学偏心影响的系数
- (e) $\delta x, \delta y, \delta c$ 摄影机内方位元素的改正值。

通过上述设计附加参数的方法, 一般很难保证其数学模型会与实际上极为错综复杂的

象点坐标的系统影响相符合。

二、多项式型的附加参数

另一种途径就是使用一种一般型式的多项式或三角函数（包括球谐函数）作为附加参数。在这种方案中把残余系统误差的综合影响作为一个整体，而不去试图顾及或解释其系统误差的各种根源。

其一般式为：

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \\ \Delta y &= \sum_{i,j} b_{ij} x^i y^j\end{aligned}\quad (1-3)$$

式中 a_{ij} , b_{ij} 为多项式的待定系数，即其附加参数。

一般在设计式 (1-3) 中的参数时，应尽可能使其间具有正交的特性，以便使构成的法方程式的系数矩阵能够具有良好的状态，并且使其求得的各项附加参数值能够分开来进行有关的统计检验。正交性不但要求在附加参数之间具有，而且也要求其与待定的外方位元素和加密点坐标之间具有。满足这些要求并不容易。但也有的研究说明，这种正交性并不是一项十分重要的要求。

实际上任何一个函数都不可能完全综合表达出各种象点变形的影响而不把无法预知的成分排除在外。尽管对此人们曾经做过大量的理论工作，参数的选用仍然是要凭经验。

以下介绍联邦德国 Ebner 在光束法区域网平差中引入的附加参数，系由双变量正交多项式组成。取用三次项时所用的坐标系数示如图 1-1。此时式

(1-1) 中所表达的位移 Δx 、 Δy 可写成为：

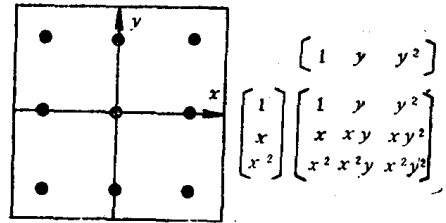


图 1-1

$$\begin{aligned}\Delta x &= [1 \quad y \quad y^2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \\ \Delta y &= [1 \quad y \quad y^2] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1-4)$$

适应于补偿象片上 3×3 个标准点位上 (图 1-1) 所有的系统误差。将式 (1-4) 展开得为：

$$\begin{aligned}\Delta x &= a_{11} + a_{12}x + a_{21}y + a_{13}x^2 + a_{22}xy + a_{31}y^2 + a_{23}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}x^2y^2 \\ \Delta y &= b_{11} + b_{12}x + b_{21}y + b_{13}x^2 + b_{22}xy + b_{31}y^2 + b_{23}x^2y + b_{32}xy^2 + b_{33}x^2y^2\end{aligned}\quad (1-5)$$

上式中共有参数十八项，其中六项可概括于定向参数之中。对剩余的十二项，改化之使其相互具有正交性以及相对于六个定向参数也具有正交性 (指在象片上九个标准点处 (图 1-1) 所构成的式子的系数间)，则上式改化成：

$$\begin{aligned}
\Delta x = & b_1 x + b_2 y - b_3 (2x^2 - 4\frac{b^2}{3}) + b_4 xy + b_5 (y^2 + 2\frac{b^2}{3}) + b_7 (y^2 - 2\frac{b^2}{3})x \\
& + b_8 (x^2 - 2\frac{b^2}{3})y + b_{11} (x^2 - 2\frac{b^2}{3}) (y^2 - 2\frac{b^2}{3}) \\
\Delta y = & -b_1 y + b_2 x + b_3 xy - b_4 (2y^2 - 4\frac{b^2}{3}) + b_5 (x^2 - 2\frac{b^2}{3}) + b_6 (x^2 - 2\frac{b^2}{3})y \\
& + b_{10} (y^2 - 2\frac{b^2}{3})x + b_{12} (x^2 - 2\frac{b^2}{3}) (y^2 - 2\frac{b^2}{3})
\end{aligned} \quad (1-6)$$

如果在象片上所观测的九个点位于标准位置,即间距等于象片基线 b ,而且地面水平,摄影为近似垂直向下,则可以证明式(1-6)中附加参数之间以及附加参数与定向未知数之间是严格正交的。虽然这种正交的概念只能限于十分规则的布点,对实际上近似的正交性却提供了附加参数间以及其与外方位定向元素间的尽可能的独立性。式(1-6)的误差模型如图1-2所示:

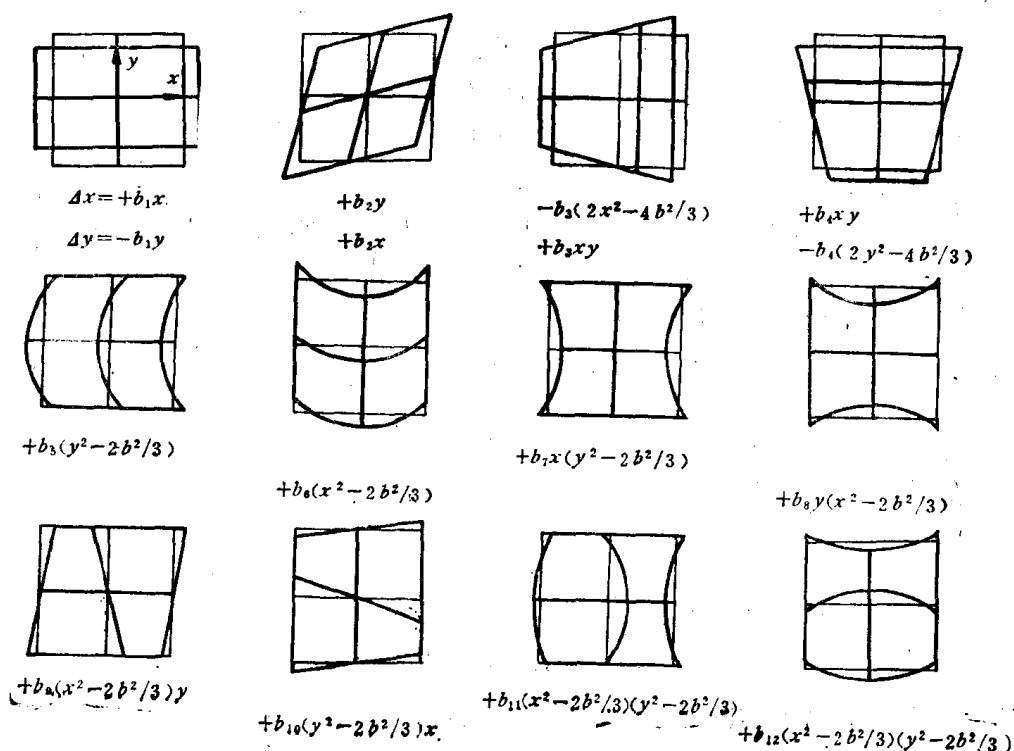


图 1-2

对于顾及到象片上 $5 \times 5 = 25$ 个标准点处的正交性并剔除其与六个外方位元素相应的各参数,则联邦德国 Grün (1978) 曾导出了包括有 44 个参数的相应于式(1-6)的附加参数为:

$$\begin{aligned}\Delta x = & a_{12}x + a_{21}y + a_{22}xy + a_{31}l - b_{22} \frac{10}{7}k + a_{14}xp + a_{23}yk + a_{32}xl \\ & + a_{41}yq + a_{15}r + a_{24}xyp + a_{33}kl + a_{42}xyq + a_{51}s + a_{25}yr \\ & + a_{34}xlp + a_{43}yqk + a_{52}xs + a_{35}lr + a_{44}xypq + a_{53}ks + a_{45}yqr \\ & + a_{54}xps + a_{55}rs\end{aligned}\quad (1-7)$$

$$\begin{aligned}\Delta y = & -a_{12}y + a_{21}x - a_{22} \frac{10}{7}l + b_{13}k + b_{22}xy + b_{14}xp + b_{23}yk + b_{32}xl \\ & + b_{41}yq + b_{15}r + b_{24}xyp + b_{33}kl + b_{42}xyq + b_{51}s + b_{25}yr + b_{34}xlp \\ & + b_{43}yqk + b_{52}xs + b_{35}lr + b_{44}xypq + b_{53}ks + b_{45}yqr + b_{54}xps + b_{55}rs\end{aligned}$$

其中

$$k = x^2 - \frac{b^2}{2}, \quad l = y^2 - \frac{b^2}{2}, \quad p = x^2 - \frac{17}{20}b^2, \quad q = y^2 - \frac{17}{20}b^2,$$

$$r = x^2 \left(x^2 - \frac{31}{28}b^2 \right) + \frac{9}{70}b^4, \quad s = y^2 \left(y^2 - \frac{31}{28}b^2 \right) + \frac{9}{70}b^4$$

此外, 用一般多项式表达的附加参数还有例如:

Grün (1976):

$$\begin{aligned}\Delta x = & a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4xy + a_5xy^2 + a_6x^2y + a_7x^3 \\ \Delta y = & -b_1y + b_2y^3 + b_3xy - b_4xy^2 + b_5x^2 + b_6x^2y + b_7x^3\end{aligned}\quad (1-8)$$

Mauelshagen (1977):

$$\begin{aligned}\Delta x = & a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 \\ \Delta y = & b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3\end{aligned}\quad (1-9)$$

Schut(1978):

$$\begin{aligned}\Delta x = & c_3xy + c_5y^2 + c_7x^2y + c_8xy^2 + c_{11}x^2y^2 + c_{13}x^3 \\ \Delta y = & c_1y + c_2x + c_4x^2 + c_6xy + c_8x^2y + c_{10}xy^2 + c_{12}x^2y^2 + c_{14}y^3\end{aligned}\quad (1-10)$$

用球谐调和函数表达的附加参数例如有:

El-Hakim 与 Faig(1977):

$$\begin{aligned}\Delta x = & a_1x + a_2y + q \frac{x}{r} \\ \Delta y = & -a_1y + a_2x + q \frac{y}{r}\end{aligned}\quad (1-11)$$

其中

$$\begin{aligned}q = & a_3r \cos \lambda + a_4r \sin \lambda + a_5r^2 + a_6r^2 \cos 2\lambda + a_7r^2 \sin 2\lambda + a_8r^3 \cos \lambda \\ & + a_9r^3 \sin \lambda + a_{10}r^3 \cos 3\lambda + a_{11}r^3 \sin 3\lambda\end{aligned}\quad (1-12)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \lambda = \arctg \frac{y}{x}$$

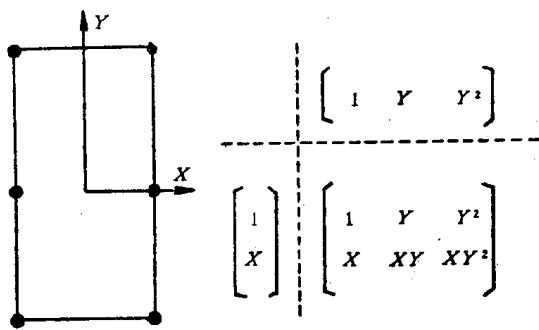


图 1-3

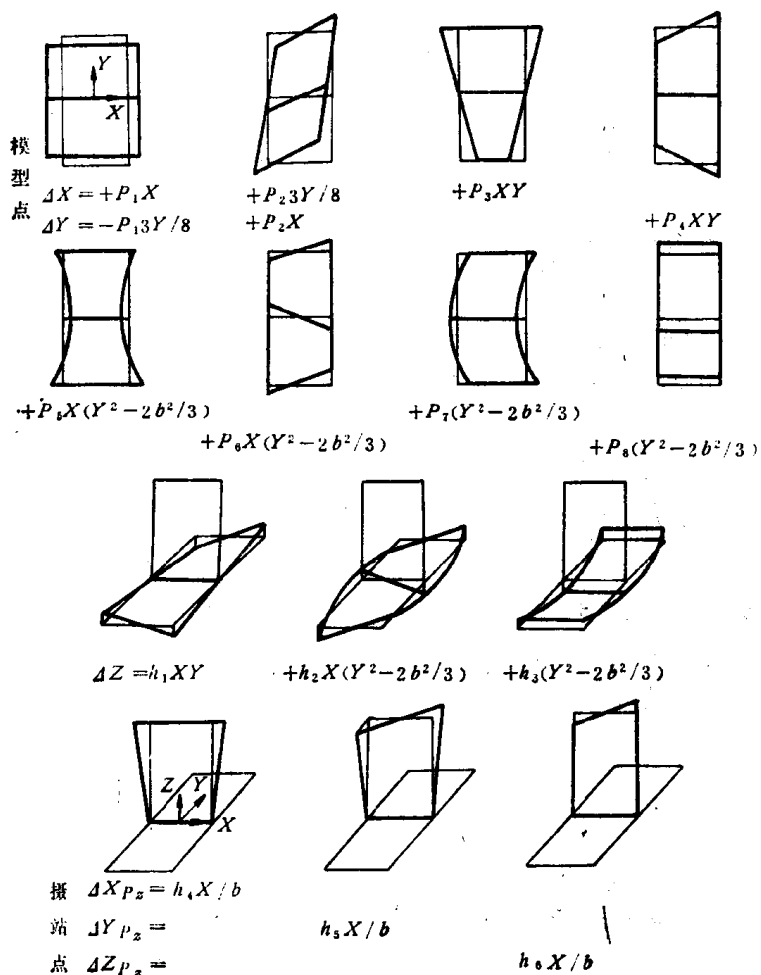


图 1-4

三、独立模型法中的附加参数

现取用 Ebner 在独立模型法区域网平差中引入的附加参数作为一个例子。

图 1-3 所示一个摄影测量的独立模型，包括有六个标准点。由于每个模型 X 方向的跨度仅约为 Y 方向之半，故在多项式中去掉含 X^2 的各项。由模型点坐标 X , Y 和 Z 所获得的 $3 \times 6 = 18$ 项应再增加三项，以便抵偿透视中心坐标 X_s , Y_s 和 Z_s 的系统误差。在这总共二十一项中，其中有七项可由每个模型的空间相似变换考虑到，因此只剩下附加参数十四项。按 Ebner 独立模型法平高分求的 PAT—M43 程序，它把八项(图 1-4 中的参数 P_1 到 P_8) 引入到平面区域网平差中，六项(图 1-4 中的参数 h_1 到 h_6) 引入到高程平差中，并使其参数 P_1 到 P_8 和 h_1 到 h_6 间，以及相对于变换参数间都具有正交性(在其六个标准点处)。其改正项的形式和对模型点的影响表示如图 1-4 中。使用这些附加参数比他以前所提出的，介绍在《摄影测量原理》式 (15-19) 的那些要优越一些。

第三节 附加参数的统计检验

对于某一个特定区域网的几何结构，由于附加参数所形成的扩展了的法方程式，将不

一定仍能保持其解算的稳定性,这是与附加参数的型式和数目有关的。在引进附加参数时,可以首先由一组比较复杂的参数开始。然后使用数理统计的检验方法,消除那些不能以足够精度加以确定的和不能以足够的保证可以相互分开的参数。或者相反,也可以根据经验,首先取用少量的认为最基本的一组参数。有了这些可靠的基础之后,再适当增补一些参数,并检查其显著性。以下介绍两种最基本的显著性检验。

当附加参数正交或接近正交时,可使用数理统计中的 t 分布,对所求得的参数,逐个地进行显著性检验。

t 分布是按下式定义的变量:

$$t = \frac{\xi}{\eta}$$

其中 ξ 为标准正态变量 $N(0, 1)$; η 定义为 $\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}$ 变量,根号下面的 ν 是 χ^2 变量的自由度(参考附录一)。

此时统计假设为:

$$H_0: E(\hat{a}_i) = 0, \hat{a}_i \text{ 为第 } i \text{ 个附加参数的估值。}$$

$$\begin{aligned} \text{取 } \xi &= \frac{\hat{a}_i - E(\hat{a}_i)}{\sigma_0 \sqrt{q_{ii}}} \sim \text{分布 } N(0, 1) \\ \eta &= \sqrt{\frac{(n-u)s_0^2}{\sigma_0^2}} / (n-u) \sim \text{分布 } \sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}, \nu = n-u \end{aligned}$$

其中 σ_0^2 为单位权方差。 $s_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u}$ 为由平差运算中得出的单位权中误差的平方,其期望值为 σ_0^2 ; q_{ii} 取自平差中未知数协因数矩阵 Q 的相应对角元。由于假设 $E(\hat{a}_i) = 0$, 因此得出分布 t 的统计量为:

$$t = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\hat{a}_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{ii}}} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{s_0^2}} = \frac{\hat{a}_i}{s_0 \sqrt{q_{ii}}} \quad (1-13)$$

当给定显著水平 α 后,可由 t 分布表查出临界值 t_α 。若 $t < t_\alpha$, 则原假设成立,即该参数不显著,可在下次迭代平差中去除。

当附加参数间的相关较大时,一维的 t -检验会导致错误的结论。由于 t 的相关往往仅出现在某一组的附加参数中,所以应该把这一组参数放在一起,使用多维检验的方法。此时原假设为:

$$H_0: E(\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}$$

$\hat{\mathbf{a}}^T = (\hat{a}_{i+1}, \dots, \hat{a}_{i+k})$ 为在一起检验的 k 个附加参数。

$$\text{取 } \xi' = \frac{[\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}})]^T Q_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} [\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}})]}{\sigma_0^2} / k \sim \text{分布 } \chi^2/\nu, \nu = k$$

$$\eta' = \frac{(n-u)s_0^2}{\sigma_0^2} / (n-u) \sim \text{分布 } \chi^2/\nu, \nu = n-u$$

因此得出分布 F 的统计量为:

$$F_{k, (n-u)} = \frac{\xi'}{\eta'} = \frac{\hat{a}^T Q_{\hat{a}}^{-1} \hat{a}}{ks_0^2} \quad (1-14)$$

根据两个自由度 ν (即 k 和 $(n-u)$)和假定的显著水平 α ,可查分布表 F 。假如 H_0 为真,则去除每个参数 $a_{i+1} \cdots a_{i+k}$ 。

此外还可能有一些其它种检验。例如在联邦德国 Hannover 大学的光束法区域网平差的程序BLUH中,为了选择其附加参数,使用了四种不同的检验为:相关检验,内部的确定性检验, t -检验和附加参数验后正交化以后的 t -检验。各有其独特的经验和措施。

当平差模型加入附加参数后,可能会由于附加参数之间,或附加参数与其它未知参数之间的强相关而使解的精度和可靠性恶化。为此应求出整个未知数的协因素阵,进而求出相关系数矩阵,进行逐一检查。

第四节 带有附加参数的平差运算方案●

在进行区域网平差运算时,对附加参数,根据情况可以看作是常数(见第四节之一)或是未知数(见第四节之二),也可看作是一种观测值(见第四节之三)。当对附加参数的精度特点有所知晓时,就应该把它们作为观测值看待。既使对附加参数的精度特点毫无所知时,如果仍把它们作为观测值看待进行平差运算,则可以有效地减少法方程式的状态不良(接近奇异阵)现象。这种现象的产生主要是因为有些参数的数值可能是很难估计的数值(由于点位的分布等几何原因)。此时为了使运算能够进行下去,可以采用这种对附加参数列出额外观测方程式(如式1-18)的办法。其虚拟观测值一般取用零值;其权值的假设比较灵活,最好能按信噪比确定。必要时也可采用验后方差的估计方法(见本章第五节)。如此则可获得较为稳定的数字解算。

现由下列间接观测误差方程式出发讨论在各种情况下的运算特点:

$$v = Ax + Bz - l, \quad Q_{ll} \quad (1-15)$$

其中

l = 观测值矢量

v = 改正数矢量

x = 未知数矢量

A = 未知数系数矩阵

z = 附加参数矢量

B = 附加参数系数矩阵

Q_{ll} = 观测值的权倒数矩阵

④ 第四节讨论的“平差运算方案”和第五节的“验后方差的估计”都是在有关的数据处理中带有-一般性的课题,此处暂列在本章内加以介绍。

一、附加参数作为常数

当附加参数是一些已知的常数时，则其平差处理将极简单：

$$v = Ax - (I - Bz), \quad Q_{vv} \quad (1-16)$$

式中 z 代表作为常数的附加参数矢量。从而可以解得待定参数为：

$$x = (A^T Q_{vv}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{vv}^{-1} (I - Bz)$$

在摄影测量区域网平差中，当附加参数是为了考虑地面弯曲或地图投影的影响时，就属于这种情况。

二、附加参数作为未知数

当对附加参数的数值以及其正负符号毫无所知时，就应当把它们作为未知数处理。

$$v = Ax + Bz - l, \quad Q_{vv}$$

其中 z 为附加参数未知数的矢量。现在把这两个未知数矢量写在一起，则

$$v = cw - l, \quad Q_{vv}$$

其中

$$c = [A : B]$$

$$w^T = [x^T : z^T]$$

未知数 w 得为：

$$w = [c^T Q_{vv}^{-1} c]^{-1} c^T Q_{vv}^{-1} l \quad (1-17)$$

当在引入附加参数作为未知数时，需要考察其未知数间是否都线性无关。若线性相关则其法方程式矩阵 $c^T Q_{vv}^{-1} c$ 会变成奇异，至少会使其方程式的状态变坏。致使在引入附加参数未知数以后，其误差传播将更为不利。所以，只在引用那些最有效的附加参数时，才宜于把附加参数作为未知数处理。

三、附加参数作为观测值

当对附加参数作为观测值看待时，解算方法可以有以下几种：

(一) 第一种解法

首先把附加参数作为未知数引入。然后考虑到它们是观测值，再列出相应的附加方程式如下：

$$\begin{aligned} v_1 &= Ax + Bz - l, & Q_{11} \\ v_2 &= Ez - s, & Q_{22} \end{aligned} \quad (1-18)$$

其中 s 为附加的观测值矢量

v_2 为附加的改正数矢量

E 为单位矩阵

Q_{22} 为附加观测值的权倒数矩阵

由式 (1-18) 可写成：

$$v_s = Dw - h, \quad Q_{ss}$$

其中

$$v_s^T = [v_1^T \quad v_2^T]$$

$$D = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

$$h^T = [l^T \quad s^T]$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

$$w^T = [x^T \quad z^T]$$

从而得出解为:

$$w = (D^T Q_{11}^{-1} D)^{-1} D^T Q_{11}^{-1} h \quad (1-19)$$

在这种情况下, 当 $Q_{12} = 0$ 和 $Q_{22} = 0$ 时, 则观测值 s 就成了常数值, 此时式 (1-18) 中的 v_2 为零, 那就是回到了第一种情况。

反之, 当 $Q_{12} = \infty E$ 和 $Q_{22} = 0$ 时, 则式 (1-18) 的第二式已无需纳入在平差之中, 可以去掉。所剩下的式子的处理与式 (1-17) 相同。

在具体运算时, 在这两种情况下, 即 $Q_{12} = 0$, $Q_{22} = 0$ 和 $Q_{12} = \infty E$, $Q_{22} = 0$ 会产生一个奇异的法方程式 Q_{11} 。为避免这种奇异的情况, 可以代入以 $Q_{12} = nE$ 。在第一种情况下选用 n 为极小值, 而在第二种情况下选用 n 为极大值。对 Q_{11} 求逆可利用下式关系:

$$Q_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & nE \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 1/nE \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

此后的运算按式 (1-19) 进行, 完全没有问题。

(二) 第二种解法

把式 (1-18) 的第二式代入其第一式中, 则得

$$v_1 = Ax + B(s + v_2) - l, \quad Q_{11} \quad (1-21)$$

此时, 平差问题成为带有条件的间接观测方程式:

$$u v_2 + Ax = t, \quad Q_{11} \quad (1-22)$$

其中

$$u = [-E \quad B]$$

$$t = l - Bs = -uh$$

对 v_2 , h 和 Q_{11} 与上述第 (一) 解法中的符号内容相同。解算结果为:

$$x = (A^T (u Q_{11} u^T)^{-1} A^T (u Q_{11} u^T)^{-1} t \quad (1-23)$$

$$v_2 = Q_{11} u^T (u Q_{11} u^T)^{-1} (t - Ax)$$

结果与第一种解法相同, 待定的附加参数值按式 (1-18) 为

$$z = s + v_2$$

在 z 为常数的特殊情况下, 则在此第二种解法中 $Q_{12} = 0$, $Q_{22} = 0$,

即

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而

$$(u Q_{11} u^T)^{-1} = Q_{11}^{-1}$$

使式 (1-23) 回到式 (1-16)。

相反, 当在 $Q_{12} = 0$, $Q_{22} = nE$ 而且 n 为极大值时, 则由于方程的状态问题不能实现。