

概率论浅说

Б.В.格涅坚科 А.Я.辛钦 著 李佑义 译 陈子玉 校

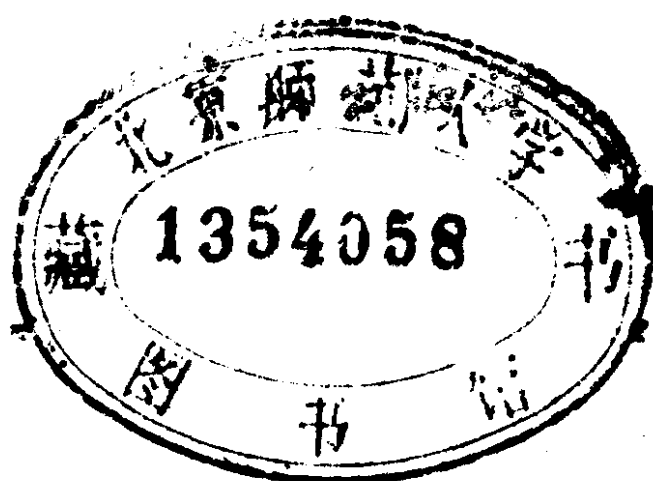
GAILÜLUN
QIANSHUO

宇航出版社

概 率 论 浅 说

[苏] B. B. 格涅坚科 著
A. H. 辛 钦
李佑义 译
陈子玉 校

741186/19



内 容 简 介

本书是苏联著名数学家为青年编写的一本概率论通俗读物。已在苏联出版九次，并被世界上十多个国家翻译出版。

书中阐述了概率论、随机变量的基本理论及其应用，介绍了随机过程的基本知识。内容深入浅出，通俗易懂，具有中等数学程度者都可理解本书的内容。

本书可作为中等和高等学校学习与讲授概率论基本知识的参考读物，亦可成为各行各业有志于学习和应用概率论知识者入门的良师，深造的益友。

Б.В. Гнеденко, А. Я. Хинчин

Элементарное введение
в теорию вероятностей

издательство «Наука» 1982

概率论浅说

〔苏〕 Б.В. 格涅坚科 著
А.Я. 辛 钦

李佑义 译 陈子玉 校

宇航出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

天津静一胶印厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：5 9/16 字数：120千字

1986年4月第8版 1986年4月第8次印刷

印数：10,000册 定价：1.10元

统一书号：15244·0043

译 者 的 话

自十七世纪中叶概率论问世以来，随着人们对自然科学的探索，对工程技术、国民经济深入研究的需要，概率论也得到了进一步发展。特别是近几十年来，概率论已迅速成长为一个与国计民生、与其他科学技术密切相关的数学分支。

在生产建设中，人们对概率论知识的迫切要求引起了数学界的重视。本书就是在苏联著名数学家、对概率论有重要贡献的A. Я. 辛钦倡导下，由他和他的学生Б. Б. 格涅坚科为普及概率论基本知识合著的。这本小册子自写成至1982年，已经出到第九版了。当前仍享有盛誉，成为苏联工程师、经济学家、语言学家、军事干部学习和掌握概率论知识的良师益友。本书在其他国家也颇受欢迎，已先后在美国、法国、日本、民主德国等十多个国家出版。

本书重点讲述了概率论的基本运算定理、随机变量的数字特征、均方差理论、大数定理、正态分布等概率论基本理论，介绍了随机过程的基本知识。它的主要特点是：从列举实例入手，只用中等数学知识，详尽阐述概率论的基本概念，说明概念、定理的科学意义。内容深入浅出，简明扼要，通俗易懂，还有较多实例可帮助读者理解和掌握所述概念、定理及公式。

本书是概率论初级读物，适于科技干部和管理干部知识

增新，适于部队培养两用专门人才，它对党政军干部及文科大学生学习与应用概率论知识也将大有裨益。

本书可作为讲授与学习概率论基础课程的参考读物。

由于译者水平有限，定有不少错误之处，敬请读者批评指正。

译 者

1985年3日

第七版 前 言

这是在我的导师、本书的合作者A·Я·辛钦去世之后，我第二次修改本书并添写了新的一章。

当我们着手写这本概率论初级读物之初，主要读者对象是一些中学毕业后曾经惜别科学投身于伟大的卫国战争洪流的青年。最近了解到本书的读者极其广泛，许许多多工程师、经济学家、生物学家、语言学家、医生、军人都是通过阅读这本书懂得了概率论的思想方法。令人高兴的是，本书在国内外引起了广泛兴趣。由于读者队伍的变化，不言而喻，书的内容也相应地要有一些变化。考虑到随机过程理论对于概率论的广泛应用及其理论发展有着特殊的作用，因此必须在书中补充介绍这方面的重要概念及研究成果。当然，为与全书内容相协调，补充内容的重点不是放在理论问题或数学分析上，而是着重介绍与随机过程理论有关的实际问题。

衷心感谢读者对本书内容、表达方式及例题的代表性提出意见和建议。

Б·В·格涅坚科

1969年12月10日 于莫斯科

第五版 前 言

在杰出的学者和老师A·Я·辛钦逝世之后，由我承担了本版的修订工作。现代概率论的发展，它的许多理论及研究成果都与辛钦的名字相连：集合论及实变函数论的方法在概率论中的系统应用，随机过程理论基础的建立，独立随机变量求和理论的广泛发展，统计物理问题新的求解方法的发现及统计物理的严格描述系统的建立——所有这些都归功于A·Я·辛钦。此外，苏联概率论学派的建立也应归功于他、С·Н·别尔宁什捷伊和A·Н·柯尔莫哥洛夫等三人。我有幸作为他的学生不胜光荣之至。

本书写成于伟大的卫国战争胜利结束时期，因此书中所举的例子与军事问题密切相关。现在，战后已经十五年了，全国一派新的建设景象，在描述概率论一般理论问题时，自然就扩大了例题选择范围。为此，在不改变本书的内容与基本特色的情况下我更换了一些例子。除个别例子外，本书法文版（1960年巴黎）也作了同样的更换。

Б·В·格涅坚科

1960年10月6日 于莫斯科

第八版 前 言

自本书初版问世以来，三十年过去了。当时根据著名数学家A·Я·辛钦的提议，为拿起武器保卫祖国的中学毕业生们编写了这本书。我们深感荣幸，这本小册子曾使他们时刻想到了正在履行的拯救文化财产的伟大使命。战后，这本书又激励这些退伍军人在高等学校里继续深造。

夺取胜利之后，我国转为医治战争创伤，恢复国民经济阶段。因此本书作了一些相应改动。在A·Я·辛钦去世之后，我对本书又作了一些修改和补充。令人欣慰的是本书对读者有所裨益。它启发读者深入思考，在工程技术、生产管理和国民经济领域中采用概率论方法。结果，人们提出了计算工业企业电网、计算生产与运输组织管理等许许多多问题的新方法、新建议。

令人高兴的是，本书在国外也深受欢迎。它在民主德国、美国、法国、波兰、捷克、南斯拉夫、罗马尼亚等国已经多次出版，在西班牙、日本、阿根廷、保加利亚、匈牙利及其他一些国家也都出版过。

本版与上一版比较，只略有一些文字上的变动。但是时代在前进，因此我深切地期望听到读者对本书的补充与修改意见。

Б·В·格涅坚科

1975年9月 于莫斯科

目 录

第八版 前言	(I)
第七版 前言	(I)
第五版 前言	(I)

第一部分 概 率

第一章 事件的概率	(1)
§ 1 概率的概念	(1)
§ 2 不可能事件与必然事件	(7)
§ 3 题解	(8)
第二章 概率的加法定理	
§ 4 概率的加法定理导出	(10)
§ 5 全事件系统	(13)
§ 6 实例	(15)
第三章 条件概率与乘法定理	(18)
§ 7 条件概率的概念	(18)
§ 8 概率的乘法定理	(21)
§ 9 独立事件	(22)
第四章 加法定理与乘法定理的推论	(28)
§ 10 若干不等式的导出	(28)
§ 11 全概率公式	(31)
§ 12 巴叶斯公式	(34)
第五章 伯努利试验	(42)
§ 13 实例	(42)
§ 14 伯努利公式	(45)

§ 15	事件的最大概率对应值	(48)
第六章	伯努利定理	(56)
§ 16	伯努利定理概述	(56)
§ 17	伯努利定理求证	(56)

第二部分 随机变量

第七章	随机变量与分布规律	(67)
§ 18	随机变量的概念	(67)
§ 19	分布规律的概念	(69)
第八章	均值	(74)
§ 20	随机变量均值的确定	(74)
第九章	和与积的均值	(85)
§ 21	和的均值理论	(85)
§ 22	积的均值理论	(89)
第十章	偏离与平均偏差	(92)
§ 23	均值在表示随机变量时的不充分性	(92)
§ 24	度量随机变量偏离的各种方法	(93)
§ 25	均方差理论	(100)
第十一章	大数定理	(107)
§ 26	车比雪夫不等式	(107)
§ 27	大数定理	(109)
§ 28	大数定理的求证	(111)
第十二章	正态分布规律	(115)
§ 29	问题的提出	(115)
§ 30	分布曲线的概念	(117)
§ 31	正态分布曲线的特性	(120)
§ 32	题解	(127)

第三部分 随机过程

第十三章	随机过程概论	(137)
------	--------	-------

33随机过程的提出.....	(137)
34随机过程的概念及类型.....	(140)
35最简单的事件流.....	(143)
36批式服务的理论问题.....	(146)
37关于可靠性理论问题.....	(148)
结束语.....	(152)
附 录 $\Phi(a)$ 函数数值表.....	(157)

第一章 事件的概率

§ 1 概率的概念

当人们谈论某个射手在给定的射击条件下命中率为92%时，这意味着，在一些确定的条件下（同一目标、同一距离、甚至同一步枪等等）他射击了100发子弹，平均约有92发中靶（即意味着近8发脱靶）。当然，也不是每100发都命中92发，有时候命中91发或90发，有时候命中93发或94发，有时命中数甚至可能比92发多得多或少得多，但是，在同一条件下多次重复射击时，这个命中率平均值将仍然不变，一直到发生实质性的变化为止（例如，射手可能提高射击水平，从而使平均命中率达到95%或者更高）。经验表明，该射手在大多数情况下，一百发射击中命中发数接近92。尽管有时在100发射击中，会出现命中数小于88或大于96的情况，但较为罕见。92%这个数字作为射手射击水平的指标通常是不变的，即对该射手而言，在相同条件下，大多数射击命中率几乎是一样的，仅在少数特殊情况下，命中率才明显地偏离平均值。

我们再举一个例子。在某一企业里人们发现，在一定条件下平均有1.6%的产品不符合标准而报废。这意味着，在1000件产品中约有16件不合格。当然，废品有时稍多，有时

稍少，但其平均数接近16，而且在大多数以1000件为一批的各批产品中，废品数也接近于16。不过，这里假定生产条件（如车间工艺流程、设备、原料、工人技能等等）不变。

显然，这类例子不胜枚举。在这些例子中我们看到，在**同一类大批量作业**（多次射击、大量生产产品等）中，这种或那种形式的重要事件（命中目标、产品不合格等等）的百分比在给定条件下几乎总是相同的，仅仅在少数情况下才大大地偏离某一平均数值。因此可以说，这个平均值是该大批量作业在严格规定的条件下的特征值。命中百分比用来描述射手的射击技术，废品百分比用来评价产品质量优劣程度。由此可见，这个数值对于军事、技术、经济、物理、化学等等各个方面有十分重要的意义。它不仅能使我们评价已经出现的大量的现象，而且可以预测这种或那种大批量作业的未来结局。

如果射手在给定射击条件下，100发中平均92发命中目标，则我们说该射手在给定射击条件下的**命中概率**为92%（或 $92/100$ ，或0.92）。如果在给定条件下，某一企业每1000件产品中平均有16件报废，则说该产品出现废品的**概率**为0.016或1.6%。

在某个大批量作业里，究竟把什么称为事件的概率呢？这个问题现在不难回答。大批量作业总是大量重复彼此类似的单个作业（射击——多次重复单个的发射；批生产——大量生产单个的产品等等）。我们对单个作业的结果（单个射击的命中情况，单个制品的不合格情况等等）很感兴趣，而且首先对这种或那种大批量作业中这些结果的数值（多少发命中目标，多少产品将报废）感兴趣，于是，把某个大批量作业

中这类感兴趣的、“期望的” $\ominus$ 结果的百分比(或比率)称为该结果的**概率**。这里应该经常注意,这个或者那个事件(结果)的概率仅在准确给定的条件下进行大批量作业才有意义。这些条件的一切实质性变化通常都会引起概率的变化。

如果有这样的一个大批量作业,事件A(例如命中目标)在b次单个作业(射击)中出现了a次,则事件A在给定条件下的概率是 a/b (或 $\frac{100a}{b}\%$)。因此,可以把这些“期望的”

结果数与组成大批量作业的所有单个作业数的平均比值称为单个作业“期望的”**概率**。不言而喻,如果某个事件的概率等于 a/b ,那么,在b次单个作业中,这个事件出现的次数可能大于a,也可能小于a,仅仅是该事件发生的平均次数约为a,而在大多数情况下,在b次单个作业中,特别是当b是个很大的数时,事件A出现的次数将接近于a。

例1 某城市在第一季度里人口出生情况是:

一月份—145个男孩和135个女孩;

二月份—142个男孩和136个女孩;

三月份—152个男孩和140个女孩。

男孩出生的概率有多大呢? 男孩出生率是:

一月份 $145/280 \approx 0.518 = 51.8\%$;

二月份 $142/278 \approx 0.511 = 51.1\%$;

三月份 $152/292 \approx 0.521 = 52.1\%$ 。

我们看到,在三个月内男孩出生的算术平均值接近于 $0.516 = 51.6\%$,在该条件下所求的概率约为0.516 或

$\ominus$ 在第二个例子里,似应称为“不期望的”。不过,在概率论中,直接把那些能出现人们解题时感兴趣事件的结果称为“期望的”。

51.6%。这个数字在研究人口动态情况的科学——人口学里已为人们所熟知了。它表明，在通常条件下，就是在不同时期里，男孩的出生率不会过分偏离这个数值。

例2 上个世纪初发现了著名的布朗运动(以发现者、英国植物学家布朗姓名命名)自然现象。这个现象是悬浮在流体中 $\ominus$ 的物质微粒在没有明显外因影响的情况下作不规则运动。

当气体动力理论没给出简明而准确的解释(即悬浮在流体中的粒子运动是这些粒子与流体分子碰撞的结果)之前，显然人们无法弄清楚这种自发的不规则运动的原因。气体动力理论能使人们统计计算在某一定量流体中，或者无一个，或者有一个、两个、三个……悬浮粒子的概率。为检验理论结果。人们曾经做过一系列试验。

我们援引瑞典物理学家斯费德别尔格对悬浮在水中的金微粒观察518次的结果。发现在被观察的部分空间里，未见到一个微粒有112次，见到1个微粒有168次，见到2个微粒有130次，见到3个微粒有69次，，见到4个微粒有32次，5个——5次，6个——1次，7个——1次。

由此得出：

发现0个微粒的次数比率是 $112/518 = 0.216$ ，

发现1个微粒的次数比率是 $168/518 = 0.324$ ，

发现2个微粒的次数比率是 $130/518 = 0.251$ ，

发现3个微粒的次数比率是 $69/518 = 0.133$ ，

$\ominus$ 即处于随遇平衡状态。

发现 4 个微粒的次数比率是 $32/518 = 0.062$;

发现 5 个微粒的次数比率是 $5/518 = 0.010$;

发现 6 个微粒的次数比率是 $1/518 = 0.002$;

发现 7 个微粒的次数比率是 $1/518 = 0.002$;

由此可见, 观察结果与理论预测概率恰好吻合。

例3 在许多重要的实际问题里, 需要知道哪些俄文字母用得较多。例如, 在配置印刷铅字盒时, 所有字母都按同一数量储备是不合理的, 因为某些字母比其他一些字母在文章里出现的次数要多得多。为此, 必须使经常出现的字母数量多一些。对文学作品字母研究的结果可使人们估计出俄文字母(包括词间空格)出现的频率, 其频率表[⊖]如下(按相对频率依次减小的顺序排列)。

研究表明, 在任意选取的一段包含一千个字母与空格的文章中, 字母 Φ 出现 2 次, 字母K——28次, 字母O——90次, 而空格出现175次。这些数据对于配置印刷铅字盒是相当宝贵的。

近些年来, 这类研究工作已经不只局限于统计俄语文章中的字母, 而且开始广泛地用于阐明俄语的特点, 乃至不同作者的文学风格了。此外, 可用电报通讯数据编制出比较经济的电报代码, 便于用少量符号及较快速度传递信息。须知, 目前所采用的电报代码还不是最经济的。

[⊖] 此表引自 A. M. Яглом 和 И. М. Яглом 的优秀科普读物《概率与信息》 莫斯科科学出版社, 1973年。

字 母	空格	О	е, ё	А	И	Т	И	С
相对频率	0.175	0.090	0.072	0.062	0.062	0.053	0.053	0.045
字 母	Р	В	Л	К	М	Д	П	У
相对频率	0.040	0.038	0.035	0.023	0.026	0.025	0.023	0.021
字 母	Я	Ы	З	Ь, Ь	Б	Т	Ч	Й
相对频率	0.018	0.016	0.016	0.014	0.014	0.013	0.012	0.010
字 母	Х	Ж	Ю	Ш	Ц	Щ	Э	Ф
相对频率	0.009	0.007	0.006	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002