经 济 数 学

（微积分）

吕 志 远 主编

中国商业出版社

经济数学

（微积分）

主编　吕志远

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学:微积分/吕志远主编.—北京:中国商业出版社,1997.8

ISBN 7—5044—3541—4

Ⅰ.经… Ⅱ.吕… Ⅲ.①经济数学—高等学校:专业学校—教材②微积分—高等学校:专业学校—教材Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 17864 号

责任编辑:刘树林

*　　*

中国商业出版社出版发行

(100053　北京广安门内报国寺 1 号)

新华书店北京发行所经销

中国石油报社印刷厂印刷

*　　*

1997 年 8 月第 1 版　1997 年 8 月第 1 次印刷

850×1168 毫米　大 32 开　10.75 印张　269 千字

定价:15.60 元

*　　*

编写人员名单

主　　编　吕志远

副 主 编　沈家云　王　玲　张玉斌

参　　编　毕卫星　朱凤娟

　　　　　　贝　岩　杨建文

内容提要

本书包括函数、极限与连续、导数、微分、微分中值定理、导数的应用、不定积分、定积分、广义积分、积分的应用、偏导数、全微分、二重积分等内容，共六章，可供经济管理类高等专科学校、电大、职大、业大，全国高等教育自学考试助学单位经济管理类专业作为教材或参考书使用。

前　言

传统的经济数学（微积分）都十分重视数学理论本身的科学性与严谨性，用大量的篇幅去讨论概念的引入与理论的证明，而忽视了计算与应用。在教学中，教师也是把主要精力和时间放在前者上，对后者重视不够，受教学时数的限制，把后者留给学生课后自己完成。结果是学生学完本门课程后，计算能力、应用能力与解决实际问题的能力都比较差。

按照辽宁商业高等专科学校第二阶段教学改革会议精神，学校《经济数学Ⅰ（微积分）教学改革方案》教学科研立项小组成员，经过一年多的深入调查，确定了《教学改革方案》、《教学大纲》，并由项目主持人、基础部教学副主任吕志远副教授按《方案》与《大纲》的精神主持编写了《经济数学Ⅰ（微积分）》内部教材，经九六级23个班的学生试用后，经再次修改，编著成此书。

本书有下而几个特点：删去了传统微积分中绝大部分定理、性质的证明，只保留了微积分基本定理的证明；增加了大量的计算与应用的类型题及解题指导；综述了各种经济函数及微积分在经济管理问题的应用模型；按节配备了大量的A组题与B组题。

全书按一个学期15周、每周4学时，共计60学时编写（不包括*号部分内容）；若按72学时讲授，可讲授完包括*号在内的全部内容。

本书的编写受到辽宁商业高等专科学校单凤儒校长、贾永海副校长及教务处与基础部领导的大力支持与帮助，在此，对他们表示感谢。

编写一部比较好的经济数学教材，是我们每一位从事经济数

学教学工作的广大教师的心愿。我们仅仅是一种尝试，希望能起到抛砖引玉的作用。限于作者的水平有限，错误之处恳求各位专家、学者、兄弟院校的师生指教。

本书由王兰英副教授担任主审。

编　者

1997 年 5 月

目　　录

第一章　函　数

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是微积分研究的基本对象。本章对中学所学过的函数知识做一简要的复习与总结，并补充有关的函数知识，如邻域、复合函数，有界函数、基本初等函数和初等函数。

§1.1　集合

一、集合的概念

1. 集合

具有某种共同属性的一些对象的全体，称为集合。构成集合的每一个对象称为该集合的元素。通常，用大写字母 A、B、C…等表示集合，用小写字母 a、b、c…等表示集合的元素。如果 x 是集合 A 的元素，则称 x 属于 A，记作 $x\in A$；如果 x 不是集合 A 的元素，则称 x 不属于 A，记作 $x\overline{\in}$ 或 $\bar{\in}A$.

用 N 表示自然数集合，用 Z 表示整数集合，用 Q 表示有理数集合，用 R 表示实数集合。

2. 集合的表示法

(1) 列举法：把集合的元素按任意顺序一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，称为列举法。

例如，由 1,2,3,4,5 组成的集合，可表示为 $\{1,2,3,4,5\}$.

(2) 描述法：把集合的元素的共同属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，称为描述法，即用 $A=\{x|x$ 具有的共同属性$\}$ 表示集合 A。

例如,用$\{x|x^2-4x+3>0\}$表示不等式 $x^2-4x+3>0$ 的解集。

(3) 图形法:用一个平面图形表示一个集合,其中图形上的点表示集合的元素,称为图形法。

例如:

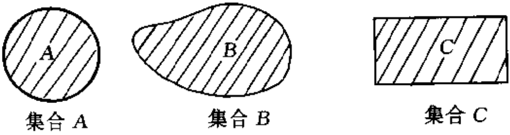


图 1-1

3. 集合的类型

(1) 有限集:含有有限个元素的集合称为有限集。

(2) 无限集:含有无限个元素的集合称为无限集。

(3) 空集:不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$.

(4) 全集:在研究某个问题中,把研究的所有对象构成的集合,在这个问题中称为全集,记为 I 或 U.

4. 子集、集合的相等

定义 1　设 A、B 为两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 为集合 B 的子集,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果集合 A 与集合 B 含有相同的元素,则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$,读作 A 等于 B.

简单性质:设 A、B、C 为任意集合,则有

(1) $\varnothing\subset A\subset A\subset U$

(2) $A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$

(3) $A=B\Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$

图 1-2

二、集合的运算

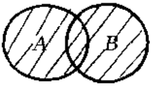
如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样，集合与集合之间也有并、交、差、补四种基本运算。

1. 并集

定义 2　设 A 与 B 为两个集合，则称 A 与 B 中所有元素汇总构成的集合为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$，读作 A 并 B，即

$A\cup B=\{x\mid x\in A，或\ x\in B\}$

例如，设 $A=\{1,2,3,4,\}$，$B=\{2,5,7,8\}$，则$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,8\}$



$A\cup B$

图 1-3

简单性质：

(1) $\varnothing\cup A=A$，$A\cup A=A$，$A\cup U=U$

(2) $A\subset(A\cup B)$，$B\subset(A\cup B)$

2. 交集

定义 3　设 A 与 B 为两个集合，则称 A 与 B 中所有公共元素汇总构成的集合为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，读作 A 交 B，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\ 且\ x\in B\}$$

例如：设 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 0<x<5\}$ 则 $A\cap B=\{x\mid 0<x<3\}$

A∩B

图 1-4

简单性质：

(1) $\varnothing\cap A=\varnothing$，$A\cap A=A$，$A\cap U=A$

(2) $A\supset(A\cap B)$，$B\supset(A\cap B)$

3. 差集

定义 4　设 A 与 B 为两个集合，则称由集合 A 中去掉集合 B 的元素后，由剩下的元素作成的集合为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$，读作 A 减 B，即

$A-B=\{x\mid x\in A\ 且\ x\ \overline{\in} B\}$

例如　(1)设 $A=\{1,2,3,5,7\}$，$B=\{2,4,5,6\}$，则 $A-B=\{1,3,7\}$

(2) 设 $A=\{x|0<x<6\}$，$B=\{x|-2<x<1\}$，则 $A-B=\{x|1\leqslant x<6\}$

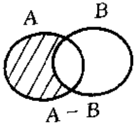


图 1-5

简单性质：

(1) $\varnothing-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$A-A=\varnothing$

(2) $A-B\subset A$

4. 补集

定义 5　设 A 与 B 为两个集合且 $A\subset B$，则称 $B-A$ 为 A 关于 B 的补集，记为 A_B^C，即

$$A_B^C=B-A=\{x|x\in B \text{ 且 } x\overline{\in}A\}$$

当 $B=U$ 时，称 A_B^C 为 A 的补集，记为 A^C（或 $\overline{A}$，或 A'）.

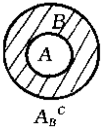


图 1-6

简单性质：

(1) $\varnothing^C=U$，$U^C=\varnothing$

(2) $A^C\cup A=U$，$A^C\cap A=\varnothing$

(3) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

5. 集合的运算律

(1) 交换律：(i) $A\cup B=B\cup A$

(ii) $A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(ii) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律：(i) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

三、区间、邻域

1. 有限区间

设 a、b 为实数，且 $a<b$

(1) 开区间：称实数集合 $\{x|a<x<b\}$ 是以 a 为左端点，b 为右端点的开区间，记为 (a,b)，即

$(a,b)=\{x|a<x<b\}$　（图 1.7）

(2) 左开右闭区间：称实数集合$\{x|a<x\leqslant b\}$是以 a 为左端点，b 为右端点的左开右闭区间，记为$(a,b]$，即

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$　（图 1.8）

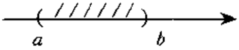


图 1-7

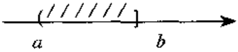


图 1-8

(3) 左闭右开区间：称实数集合$\{x|a\leqslant x<b\}$是以 a 为左端点，b 为右端点的左闭右开区间，记为$[a,b)$，即

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$　（图 1.9）

(4) 闭区间：称实数集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$是以 a 为左端点，b 为右端点的闭区间，记为$[a,b]$，即

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$　（图 1.10）

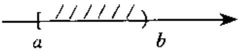


图 1-9

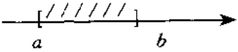


图 1 10

2. 无限区间

(1) $(a,+\infty)=\{x|a<x\}$表示大于 a 的实数集合。

(2) $[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$表示大于等于 a 的实数集合。

(3) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$表示小于 b 的实数集合。

(4) $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$表示小于等于 b 的实数集合。

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$表示实数集合。

注意“$+\infty$”(读作正无穷大)、“$-\infty$”(读作负无穷大)是引用符号，不能当作数对待。

3. 邻域

称集合$\{x|\ |x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径(图 1.11)。称集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$为点 x_0 的

空心 δ 邻域(图 1.12)

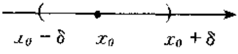


图 1-11

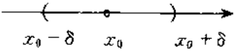


图 1-12

例如,点 1 的$\frac{1}{2}$邻域为$(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$,点 1 的空心$\frac{1}{2}$邻域为$(\frac{1}{2},1)\cup(1,\frac{3}{2})$.

习题 1.1

(A)

1. 用列举法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合

(3) 集合$\{x \mid |x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$

2. 用集合的描述法表示下列集合:

(1) 大于 5 的所有实数集合

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=0$ 的交点的集合

3. 下列集合哪些是空集:

$A=\{x \mid x-1=0\}$,$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$

$C=\{x \mid x<-1$ 且 $x>0\}$,$D=\{x \mid x>1$ 且 $x<5\}$

$E=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3, x,y\in R\}$

4. 如果 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{1,2\}$,下列各种写法,哪些是对的?哪些不对?

$1\in A$,$0\overline{\in}B$,$\{1\}\in A$,$1\subset A$,$\{1\}\subset A$,$0\subset A$,$\{0\}\subset A$,$\{0\}\subset B$,$A=B$,$A\supset B$,$\varnothing\subset A$,$A\subset A$.

5. 如果 A 是非空集合,下列各个等式哪些是对的? 哪些是不对的?

$A\cup A=A$ $\quad A\cap A=A$ $\quad A\cap A=\varnothing$ $\quad A\cup\varnothing=A$

$A\cup\varnothing=\varnothing$ $\quad A\cup U=U$ $\quad A\cap U=A$ $\quad A\cap\varnothing=A$

$A\cap\varnothing=\varnothing$　$A-A=A$　$A-A=\varnothing$　$A^C=U$

6. 设 $A=\{x|x^2-16<0\}$,$B=\{x|x^2-4+3\geqslant0\}$,$U=R$,求:

(1) $A\cap B$　(2) $A\cup B$　(3) $B-A$

(4) A^C　(5) B^C　(6) $(A\cap B)^C$

7. 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,e,f\}$,$c=\{a,c,f\}$,求:

$A\cup B$,$B\cap C$,$A\cap C$,$(A\cup B)\cap C$,$(B\cap C)\cup(A\cap C)$

8. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x+3|<2$　(2) $|x-2|\geqslant10$

(2) $1<|x-2|<3$　(4) $|x|>|x+1|$

9. 设集合 $A=\{a,2,3,4\}$,$B=\{1,3,b\}$,则当 a,b 取何值时,有 $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

10. 设集合 $A=\{1,4,a,8\}$,$B=\{2,3,4,7,b\}$,则当 a,b 为何值时,有 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

§1.2　函数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 f 是集合 X 与 Y 之间的一种对应关系,若对 X 中的每一个元素 x,通过 f 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与 x 对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记为

$$f: X\longrightarrow Y\quad 或\ y=f(x),x\in X$$

若 X 与 Y 都是实数集合,则称映射 f 为函数,称 X 为 f 的定义域,记为 D_f,称函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in X\}$ 为 f 的值域,记为 R_f.

设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数,定义域为 D_f,在平面直角坐标系中,用 x 轴上的点表示自变量的值,用 y 轴上的点表示函数值,这样,在 D_f 内的每一个 x 及相应的函数值 $y=f(x)$ 就确定了一个点 $P(x,y)$,当 x 在 D_f 内变动时,点 P 便在平面上移动,所有