工科硕士研究生数学用书

常微分方程组与运动稳定性理论

叶宗泽　杨万禄　编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书包括微分方程组、运动稳定性理论初步和边值问题等三部分内容。此外还有常微分方程的初等积分法与拉普拉斯变换两个附录。各章配有一定数量的习题，並附有参考答案。

本书说理透彻，深入浅出，叙述详细，便于自学。可作为高等工科院校研究生及非数学专业高年级学生的教材，也可作工程技术人员的自学用书。

常微分方程组与运动稳定性理论

叶宗泽　杨万禄　编

天津大学出版社出版
（天津大学校内）
天津大学印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

开本：787×1092毫米 1/16 印张 $11^3/_8$ 字数 273 千字
1985 年 9 月第一版　1985 年11月第一次印刷
印数：1—6000
统一书号：13401·4　　定价：2.50元

前　　言

本书是作者在为工科研究生讲授《常微分方程组及运动稳定性理论》课程的基础上，将使用的讲义修改编写而成。

鉴于在四化建设中，工程技术人员对于常微分方程、稳定性理论及定性理论的需求日益增长，我们认为编写这样一本内容适中，既不太深，又适合较多读者阅读的书籍是非常必要的。

本书内容包括三部分。第一部分是常微分方程组的有关知识。第二部分是常微分方程的运动稳定性理论，其中也介绍一些定性理论的基本知识。第三部分简要地介绍了微分方程边值问题的基本内容。为了便于读者查阅关于常微分方程的一些基本概念和初等解法，我们将这部分内容列入了书末的附录Ⅰ中。在附录Ⅱ中我们还介绍了拉普拉斯变换及其在解常微分方程(组)中的应用。

本书在编写过程中，得到了伉铁健教授的热情指导，提出了宝贵意见，并进行了认真审阅。对此，我们表示深切的感谢。

由于编者水平有限，书中可能有不少缺点或错误，诚恳希望读者提出批评改进意见。

编　者

1985.6.　于天津大学

目　　录

绪　论

微分方程这门学科包含了两大分支：一个是常微分方程，另一个是偏微分方程。当我们研究的对象只含有一个自变量的时候，这时我们所遇到的微分方程就是常微分方程。

对于常微分方程来说，尽管自变量只有一个，但因变量或未知函数的个数却是可以多于一个的。事实上，在绝大多数各种各样的实际问题中，需要研究的往往是若干个因变量与某一自变量之间的依从关系。在这种情况下我们就不得不转向常微分方程组的研究了。因此，在一定程度上我们可以说：关于常微分方程组的研究，对于实际应用来说是更为广泛，更为迫切的需要。

值得注意的是：常微分方程组虽然也有一阶和高阶之分，但是与高次代数方程或代数方程组不同，一切高阶微分方程或高阶微分方程组都可以借助于引进新的未知函数而化为一阶微分方程组。例如，对于n阶正规形的微分方程：

$$y^{(n)}=f(t,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(n-1)}), \tag{0.1}$$

我们可以引进$n-1$个新的未知函数：

$$y_2=y',\ y_3=y'',\ \cdots,\ y_n=y^{(n-1)},$$

再将y改写为y_1，于是方程(0.1) 就可以化为n个未知函数的一阶微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dt}=y_n, \\ \dfrac{dy_n}{dt}=f(t,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n). \end{cases} \tag{0.2}$$

（关于高阶微分方程（0.1）与一阶微分方程组（0.2）之间的等价性我们将在第一章中予以证明）化高阶方程组为一阶方程组的方法是类似的。

基于上述理由我们不难明瞭：对于一阶微分方程组的研究确是具有普遍性的意义。因此，我们有必要专门用一章的篇幅来加以介绍。本书将着重研究一阶微分方程组：

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{0.3}$$

的初值问题或*Cauchy*问题，也就是说，任意指定初值条件：

$$x_i(t_0)=x_{i0}\ (i=1,2,\cdots,n), \tag{0.4}$$

求方程组满足这组条件的解。在第一章中我们可以看到：在关于函数$f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$很一般的假设条件下，方程组（0.3）初值问题存在唯一的解。

在微分方程发展的历史上，许多数学家曾把微分方程理论的目标放在通过积分法求出方程的通解上。但以后的发展表明：能够通过初等积分法把所有的解都能求出来的微分方程

只是极少数。即使象

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$$

（其中$p(x)$，$q(x)$，$r(x)$是x的连续函数）或其特例

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

这样一些简单的一阶方程(称为黎卡提(*Riccati*)方程)要想通过求积分把方程的通解用已知函数表示出来，在一般情况下也是办不到的。因此，常微分方程在其基本理论（包括解的存在唯一性；解的延拓；解对初值的连续依赖性、可微性等定理）已经较为完善的基础上，它的进一步发展就分为解析理论、定性理论和数值方法等三个主要方向。

所谓解析理论，就是把微分方程的解看成是依靠这个方程来定义的自变量的函数。在对方程很广泛的假设条件下，可以证明它的解可以表示为级数形式，并且根据每一方程的特点，能够推导出解的许多性质。在工程、物理等领域中很多具有很大实用价值的特殊函数(如贝塞尔函数、勒让德函数)均属于此类。在解析理论中自变量和未知函数一般都在复数域内来讨论。所谓数值方法，就是指常微分方程的近似解法，由于现代计算技术的广泛应用，数值方法也相应地得到了飞跃的发展，成为解决许多实际问题的有力工具。解析理论及数值方法将由别的课程分别论及，本书不再赘述。

所谓定性理论，又称几何方法。就是把微分方程的解看成是充满平面或空间（或其中某一区域）的曲线族。对于已给的方程，要求设法描绘出曲线族的大致分布概貌，研究它们（局部或是大范围）的几何性质，并从中引出有用的结论。在这里自变量和未知函数一般都是实数。

在常微分方程的定性理论中一个重要的部门是关于解的稳定性理论。由于其应用的广泛性，它几乎已经发展成微分方程的一个单独的重要分支。这是由俄国十九世纪著名的数学家李雅普诺夫奠基的数学分支。由于科学技术，特别是自动调节、系统工程、人造地球卫星、宙宇飞船等最新科学技术发展的需要，使得这一分支的研究工作日趋蓬勃，不断出现新的支派和成果，并引起广大数学工作者和工程技术人员的密切注意和研究兴趣。

在本书的第一章中，我们将首先介绍关于常微分方程组的一般理论，然后转向微分方程组的初等积分法。在本章的后面三节中我们将着重对实际应用中最重要的情形：一阶线性微分方程组，特别是常系数线性微分方程组加以研究。这部分内容也是第二章关于运动稳定性理论的一个最重要的基础。

在本书的第二章中，我们将把主要精力放在关于运动稳定性理论的基本内容上。对于奇点、极限圈等定性理论方面的内容只作一些初步的介绍。

常微分方程的边值问题是工程技术界用得较多的一个课题。在第三章中我们对在实际中有广泛应用的二阶线性微分方程的各种边值问题作了一些初步的讨论。

在学习本书之前，我们假定读者已经具有了微积分学以及线性代数的一些基本知识。我们将在此基础上来进行讨论。为了便于读者复习和查阅，我们将微积分学中已经介绍过的有关常微分方程的基础知识，作为附录Ⅰ放在书末。在附录Ⅱ中我们还介绍了拉普斯变换及其在解常微分方程（组）中的应用，供需要学习的读者参考。

第一章 微分方程组

在高等数学中，我们曾研究过含有一个自变量一个未知函数的常微分方程。但很多实际问题中的数学模型常常是一组微分方程，即含有一个自变量多个未知函数的微分方程组。为此，我们对方程组就需要作进一步的深入的研究。本章将给出微分方程组解的存在唯一性定理；微分方程组的初等解法；线性微分方程组的基本理论；常系数线性方程组的基解矩阵的结构及解法。

§1 常微分方程组的一般理论

一、微分方程组的一般概念

1．在一些实际问题中出现的微分方程组

在很多实际问题中，要求我们去求解含有多个未知函数的微分方程组，或者研究它们的解的性质。

例 1 抛射体的运动方程组

物体从初速 v_0 自地面以倾角 θ_0 向上抛射，忽略空气阻力，可以得到抛射体的运动方程组是：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta_0, \\ \dfrac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta_0 - gt. \end{cases}$$

如果空气阻力与速度成正比，则抛射体的运动方程组是：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

其中m是物体的质量，g是重力加速度，k为空气阻力系数。

例 2 若已知具有质量为m的质点$p(x_1,x_2,x_3)$，在力$\mathbf{F}=(F_{x_1},F_{x_2},F_{x_3})$作用下在空间内运动，其中$F_{x_1},F_{x_2},F_{x_3}$是$\mathbf{F}$沿坐标轴方向上的分力，而$\mathbf{F}$与时刻$t$，质点$p$的位置$(x_1,x_2,x_3)$以及速度$\mathbf{v}=\left(\dfrac{dx_1}{dt},\dfrac{dx_2}{dt},\dfrac{dx_3}{dt}\right)$有关。根据牛顿第二定律，质点$p$的运动微分方程组是：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F_{x_1}\left(t, x_1, x_2, x_3, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = F_{x_2}\left(t, x_1, x_2, x_3, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = F_{x_3}\left(t, x_1, x_2, x_3, \dfrac{dx_1}{dt_1}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right). \end{cases}$$

2. 一阶微分方程组

含有 n 个未知函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 的一阶方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{cases} \tag{1.1}$$

现在我们给出方程组（1.1）解的概念。若一组函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots\cdots x_n(t)$ 使得在区间$[a, b]$上有恒等式：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \equiv f_i(t, x_1(t),\ x_2(t), \cdots, x_n(t)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

成立，则称$x_1(t)$，$x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程组（1.1）在$[a, b]$上的一个解。含有n个独立的任意常数c_1，c_2，$\cdots$，c_n的解：

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, c_1, c_2, \cdots, c_n), \\ x_2 = \varphi_2(t, c_1, c_2, \cdots, c_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_n = \varphi_n(t, c_1, c_2, \cdots, c_n), \end{cases} \tag{1.2}$$

称为（1.1）的通解。如果由n个未就x_1，x_2，$\cdots$，x_n解出的关系式

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n;\ c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0, \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n;\ c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n;\ c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

能确定方程组（1.1）的通解，则称（1.3）为方程组（1.1）的通积分。

现在考虑方程组（1.1）满足初始条件

$$x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20},\ \cdots,\ x_n(t_0) = x_{n0} \tag{1.4}$$

的解，即初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ x_i(t_0) = x_{i0}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.5}$$

的解。在下一段我们将要证明，在很广泛的条件下，初值问题（1.5）的解是存在唯一的。在一般情况下，求初值问题（1.5）的解，可以把初始条件（1.4）代入方程组（1.1）的通解（1.2）或（1.3））中，得到关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$的 n 个方程式。如能从中解得$c_1, c_2, \cdots, c_n$，再代回（1.2）就得到初值问题（1.5）的解。

3. 化高阶微分方程和高阶方程组为一阶微分方程组

能就最高阶导数解出的微分方程：

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

称为正规型的微分方程。能就最高阶导数解出的微分方程组，例如：

$$\begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\cdots, \dfrac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}, y, \dfrac{dy}{dt}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right), \\ \dfrac{d^n y}{dt^n} = g\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\cdots, \dfrac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}, y, \dfrac{dy}{dt}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right), \end{cases}$$

称为正规型的微分方程组。

首先我们指出，任意一个正规型方程或方程组，都可以化为一个与它等价的正规型一阶微分方程组（1.1）。

（1）对于n阶微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \tag{1.6}$$

令 $x_1 = x$，$x_2 = x'$，$x_3 = x''$，$\cdots$，$x_n = x^{(n-1)}$，于是方程（1.6）就化为n个未知函数的一阶方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{cases} \tag{1.7}$$

我们证明（1.6）与（1.7）在下列意义下是等价的：给定（1.6）的一个解，就得到（1.7）相应的一个解，反之亦然。

设 $x = \psi(t)$是方程（1.6）在区间$[a, b]$上的解。令：

$$x_1 = \varphi_1(t) = \psi(t),\quad x_2 = \varphi_2(t) = \psi'(t),\quad \cdots, x_n = \varphi_n(t) = \psi^{(n-1)}(t), \tag{1.8}$$

显然有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(t)}{dt} = \varphi_2(t), \\ \dfrac{d\varphi_2(t)}{dt} = \varphi_3(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\varphi_n(t)}{dt} = f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)). \end{cases} \tag{1.9}$$

这表明： $x_1 = \varphi_1(t)$，$x_2 = \varphi_2(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t)$ 是方程组（1.7）在$[a, b]$上的解。即 $x_1 = \psi(t)$，$x_2 = \psi'(t), \cdots, x_n = \psi^{(n-1)}(t)$ 是（1.7）的解。

反过来若 $x_1 = \psi(t) = \varphi_1(t)$，$x_2 = \varphi_2(t)$，$\cdots$，$x_n = \varphi_n(t)$ 是方程组（1.7）在区间$[a, b]$上的解，于是关系式（1.9）在$[a, b]$上恒等地成立。由（1.9）立即可得到

$$\frac{d^n\psi(t)}{dt} = f(t, \psi(t), \psi'(t), \cdots, \psi^{(n-1)}(t)).$$

此式表明：$x=\psi(t)$ 是方程（1.6）在区间 $[a, b]$ 上的解。这样我们就证明了（1.6）与（1.7）的等价性。

类似可以证明，如果 $x=\psi(t)$ 是方程（1.6）满足初始条件

$$x(t_0)=x_{10},\quad x'(t_0)=x_{20},\quad x^{(n-1)}(t_0)=x_{n0} \tag{1.10}$$

的解，则 $x_1=\psi(t)$，$x_2=\psi'(t)$，…，$x_n=\psi^{(n-1)}(t)$ 是方程组（1.7）满足初始条件

$$x_1(t_0)=x_{10},\quad x_2(t_0)=x_{20},\quad \cdots,\quad x_n(t_0)=x_{n0} \tag{1.4}$$

的解；反过来，如果 $x_1=\psi(t)=\varphi_1(t)$，$x_2=\varphi_2(t)$，…，$x_n=\varphi_n(t)$ 是方程组（1.7）满足初始条件（1.4）的解，则 $x=\psi(t)$ 是方程（1.6）满足初始条件（1.10）的解。在这个意义下，我们说方程（1.6）的初值问题与方程组（1.7）的初值问题是等价的。

（2）对于任一正规型高阶微分方程组，都可以化为一个等价的一阶方程组。以两个未知函数的情形为例：

$$\begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m}=f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \cdots, \dfrac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}, y, \dfrac{dy}{dt}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right), \\ \dfrac{d^n y}{dt^n}=g\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \cdots, \dfrac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}, y, \dfrac{dy}{dt}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right). \end{cases} \tag{1.11}$$

令 $x=x_1$，$y=y_1$，则其等价的一阶方程组是：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dx_m}{dt}=f(t,x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots y_n), \\ \dfrac{dy_1}{dt}=y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dy_n}{dt}=g(t,x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n). \end{cases} \tag{1.12}$$

不仅这两个方程组等价，而且它们的初值问题也是等价的。这里所说的等价，其含义与上面所讨论的等价是相同的。

根据上述等价性的讨论，可知任意一个形如（1.6）的高阶微分方程和形如（1.11）的高阶方程组的研究，都可以化归为形如（1.1）的一阶微分方程组的研究。因此，我们只须把注意力集中在（1.1）的这种方程组上，对方程组（1.1）的研究所得到的结论通过上述的等价性，立即可以平行地推论到高阶方程和高阶方程组上去。

二、记号与定义

本段主要介绍今后要用到的有关向量函数，矩阵函数的一些最基本的性质。下面引出一

些记号和定义。

设$\mathbf{A}(t)$是$n\times n$矩阵，它的元素是n^2个函数$a_{ij}(t)$（$i,j=1,2,\cdots,n$），记为：

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

或写成

$$\mathbf{A}(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}.$$

设$\mathbf{U}(t)$是一个n维列向量，记为：

$$\mathbf{U}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

注意：矩阵相加，矩阵相乘，矩阵与数相乘等运算对于以函数作为元素的矩阵同样成立。对于以函数为元素的矩阵（向量），我们引进下面的概念。

一个矩阵，或一个向量的每一个元素均在$[a,b]$上连续，则称它们在$[a,b]$上连续。

若矩阵$\mathbf{A}(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$或$n$维列向量$\mathbf{U}(t)$的每一个元素均在$[a,b]$上可导，则该矩阵或向量在$[a,b]$上可导，且它们的导数分别是：

$$\mathbf{A}'(t)=(a'_{ij}(t))_{n\times n},\quad \mathbf{U}'(t)=\begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ \vdots \\ u'_n(t) \end{pmatrix}.$$

容易证明，如果$n\times n$矩阵$\mathbf{A}(t)$，$\mathbf{B}(t)$及n维向量$\mathbf{U}(t)$，$\mathbf{V}(t)$是可导的，那么下列等式成立：

（1）　$(\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t))'=\mathbf{A}'(t)+\mathbf{B}'(t)$，

　　　$(\mathbf{U}(t)+\mathbf{V}(t))'=\mathbf{U}'(t)+\mathbf{V}'(t)$；

（2）　$(\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t))'=\mathbf{A}'(t)\mathbf{B}(t)+\mathbf{A}(t)\mathbf{B}'(t)$；

（3）　$(\mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t))'=\mathbf{A}'(t)\mathbf{U}(t)+\mathbf{A}(t)\mathbf{U}'(t)$.

类似地，若矩阵$\mathbf{A}(t)$或者向量$\mathbf{U}(t)$的每一个元素在$[a,b]$上都可积，则称$\mathbf{A}(t)$或$\mathbf{U}(t)$在$[a,b]$上可积，它们积分定义为：

$$\int_a^b \mathbf{B}(t)dt=\left(\int_a^b b_{ij}(t)dt\right)_{n\times n},$$

$$\int_a^b \mathbf{U}(t)dt=\begin{pmatrix} \int_a^b u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b u_n(t)dt \end{pmatrix}.$$

对于矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$和$n$维向量$\mathbf{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$，定义它们的范数为：

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|X\| = \|X^T\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

设A，B是$n\times n$矩阵，X，Y是n维向量，容易验证它们的范数具有以下性质：

1° $\|AX\| \leqslant \|A\| \cdot \|X\|$, $\quad \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$；

2° $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$, $\quad \|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$；

3° $\left\|\int_a^b X(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|X(t)\|dt$,

$\left\|\int_a^b A(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|A(t)\|dt$； $\quad (b \geqslant a)$

4° $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)} \leqslant \|X(t)\| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)}$；

5° $\|X(t)\| = 0$，当且仅当一切$x_i(t) = 0$.

这里所定义的范数与我们所熟悉的向量的模$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$是不一样的。但是在研究向量函数的极限、连续性、有界性时，不论是用哪种定义来进行讨论，结论都是一样的。因此可以说这两种定义等价。

向量序列$\{X_k\}$，$X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk})^T$（$k=1, 2, \cdots$）若每一个分量所成的序列$\{x_{ik}\}$（$1 \leqslant i \leqslant n$）都是收敛的，则称$\{X_k\}$是收敛的。

同样，对于向量函数所成的序列$\{X_k(t)\}$，$X_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \cdots, x_{nk}(t))^T$（$k=1, 2, \cdots$），若每一分量所成的序列$\{x_{ik}(t)\}$（$1 \leqslant i \leqslant n$）在$[a, b]$上收敛（或一致收敛）则称$\{X_k(t)\}$在$[a, b]$上收敛（或一致收敛）。类似地，可以定义矩阵序列的收敛性。

对于矩阵序列$\{A_k\}$，其中$A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$($k=1,2,\cdots$)若对一切的$i, j=1, 2, \cdots, n$，数列$\{a_{ij}^{(k)}\}$都是收敛的，则称$\{A_k\}$是收敛的。若对一切的$i$，$j=1, 2, \cdots n$，数列$\{a_{ij}^{(k)}\}$收敛于$a_{ij}$，则称矩阵序列$\{A_k\}$收敛于$A = (a_{ij})_{n\times n}$。

若向量函数级数$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(t)$的部分和作成的向量函数序列，在区间$[a, b]$上收敛（或一致收敛），则称$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(t)$在$[a, b]$上收敛（或一致收敛）。

判别函数项级数的一致收敛的维尔斯脱拉斯判别法对于向量函数级数也是成立的，即若

$$\|X_k(t)\| \leqslant M_k, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收 敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(t)$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的。

积分号下取极限的定理，对于向量函数也成立，即若连续向量函数序列 $\{\mathbf{X}_k(t)\}$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的，则

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b \mathbf{X}_k(t)dt = \int_a^b \lim_{k\to+\infty} \mathbf{X}_k(t)dt.$$

对于无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots + \mathbf{A}_k + \cdots,$$

若其部分和所成的矩阵序列是收敛的，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ 是 收敛的。对于每一个正整数 k，若有

$$\|\mathbf{A}_k\| \leqslant M_k,$$

而数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收 敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ 也 是收敛的。

事实上，设 $\mathbf{A}_k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，因为 $\|\mathbf{A}_k\| \leqslant M_k$，所以有 $|a_{ij}^{(k)}| \leqslant M_k$（$k=1, 2, \cdots$）。由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|$（$i, j=1,2,\cdots n$）收敛,再根据定义即得 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ 收敛。

同样，对无穷矩阵函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k(t)$，若 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k(t)$ 的部分和组成的矩阵函数序列在 $[a, b]$ 上是收敛的，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k(t)$ 在 $[a, b]$ 上是收敛的。

若对每一个正整数 k 有：

$$\|\mathbf{A}_k(t)\| \leqslant M_k, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收 敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k(t)$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的。以上所给出的关于矩阵序列的有关定义和结果，都是数学分析有关概念和结果的自然推广。

三、解的存在唯一性定理

考虑一阶微分方程组的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(t,\ x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n), \\ x_i(t_0) = x_{i0}, \end{cases} \quad (i = 1,\ 2, \cdots, n), \quad (1.5)$$

其中f_i是关于t，x_1．x_2，…，x_n的已知函数。为讨论问题方便起见，我们令

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t,\ x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n) \\ f_2(t,\ x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(t,\ x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n) \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix},$$

则方程组(1.5)可写成如下的向量形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = F(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (1.5)'$$

初值问题(1.5)′的解的存在唯一性定理，是整个微分方程理论中最基本的定理，是本段研究的主题。我们知道能够求得精确解的微分方程或微分方程组为数不多，因而它们的近似解法就具有十分重大的实际意义，而解的存在唯一性则是进行近似计算的前提。因为如果解根本不存在，那末求近似解就没有意义了，如果有解存在而不唯一，由于不知道要确定是那一个解，因而求近似解的提法也是不明确的。解的存在唯一性定理保证了所要求的解存在和唯一，因此它也是近似求解的前提和理论基础。关于解的存在性问题的研究方法是很多的，我们采用近似解逼近精确解的方法来证明解的存在唯一性。这种证明方法本身也同时给出了获得精确解的一个构造方法，从而提供了求近似解的一种途径。

〈定理1〉 （存在唯一性定理）设方程组(1.5)′的右端函数$F(t, X)$在$n+1$维空间的区域

$$R: \ |t - t_0| \leqslant a, \ \|X - X_0\| \leqslant b$$

上满足：

（1）连续，记$M = \max\limits_{(t,X)\in R} \|F(t, X)\|$，$h = \min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$.

（2）关于X满足李普希兹（Lipschitz）条件，即存在常数$L > 0$，使对于R的任意两点(t, X_1)，(t, X_2)有

$$\|F(t, X_1) - F(t, X_2)\| \leqslant L\|X_1 - X_2\| \ (L\text{称为李普希兹常数}),$$

则方程组(1.5)′在$|t - t_0| \leqslant h$上存在唯一的满足初始条件

$$X(t_0) = X_0$$

的连续解 $X = \Phi(t)$.

证明：1、解的存在性

首先证明求微分方程组的初值问题(1.5)′的解$X = \Phi(t)$，$t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0 + h$，等价于求积分方程组

$$X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}F(s,X(s))ds \tag{1.13}$$

在区间　$t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上的连续解。

事实上，如果 $X=\Phi(t)$ 是初值问题 (1.5)′ 的解，即有恒等式

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}\equiv F(t,\Phi(t)),$$

且满足 $\Phi(t_0)=X_0$。两边从 t_0 到 t 取定积分，得到恒等式：

$$\Phi(t)\equiv X_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\Phi(s))ds,\ t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h,$$

即 $X=\Phi(t)$ 是积分方程 (1.13) 在区间 $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上的连续解。反之，若 $X=\Phi(t)$ 是积分方程 (1.13) 的连续解，则有恒等式：

$$\Phi(t)\equiv X_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\Phi(s))ds,\ t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h,$$

微分上式得到：

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}=F(t,\Phi(t)),\quad 且有\ \Phi(t_0)=X_0.$$

这表明 $X=\Phi(t)$ 是初值问题 (1.5)′ 的解。这就证明了 (1.5)′ 与 (1.13) 的等价性。因此，只要证明积分方程 (1.13) 的连续解在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在且唯一就行了。

下面用皮卡逐次逼近法来证明积分方程组 (1.13) 的连续解的存在性。具体可分为三步。

（1）构造逐次逼近向量函数序列

首先取 $\Phi_0(t)=X_0$，将它代入 (1.13) 的右端，所得到的函数用 $\Phi_1(t)$ 表示，并称为一次近似，即：

$$\Phi_1(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\Phi_0(s))ds. \tag{1.14}$$

再将 $\Phi_1(t)$ 代入方程组 (1.13) 的右端，即得到二次近似：

$$\Phi_2(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\Phi_1(s))ds. \tag{1.15}$$

依次我们可以得到 n 次近似：

$$\Phi_n(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\Phi_{n-1}(s))ds. \tag{1.16}$$

下面用数学归纳法证明，对所有的 n，(1.16) 中的向量函数 $\Phi_n(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上有定义，连续且满足不等式

$$\|\Phi_n(t)-X_0\|\leqslant b.$$

事实上，当 $n=1$ 时，$\Phi_1(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}F(s,X_0)ds$，显然 $\Phi_1(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$