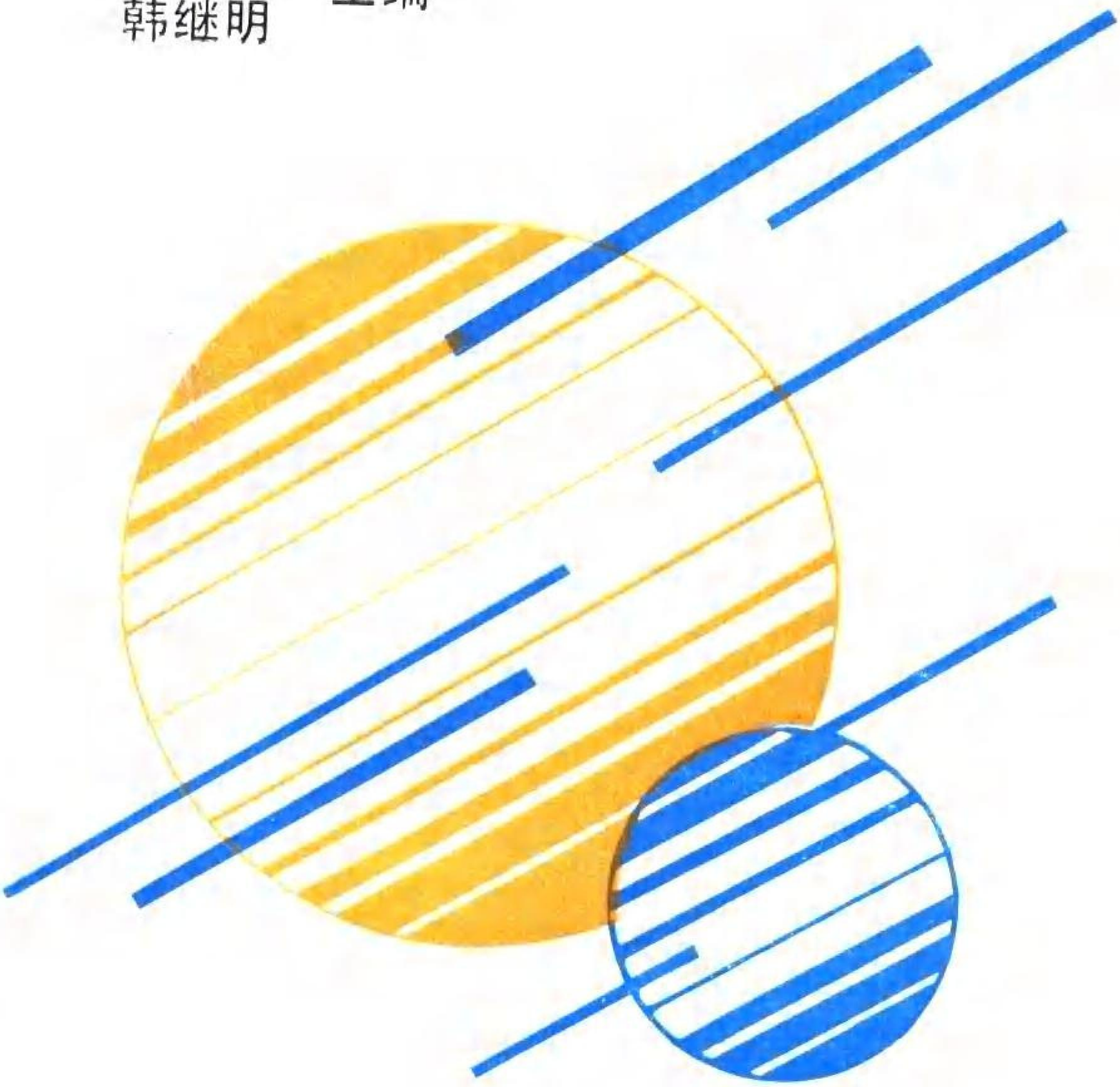
大学物理实验

王家春
韩继明 主编



机械工业出版社

大学物理实验

主　编　王家春　韩继明
副主编　孙正云　刘雅茹
　　　　　张明利　张景娇

机械工业出版社

本书是根据“高等工业学校物理实验课程教学基本要求”编写的。全书包括：实验误差与数据处理，力学、热学、电学、光学、近代物理及设计性实验等部分。除实验误差及数据处理外，共涉及40个基本的大学物理实验题目，具体使用本书时可依各自的学时和实验设备情况，从中选取适合自己情况的内容。

本书可作工科院校本科生的实验课教材。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验/王家春，韩继明主编．-北京：机械工业出版社，1996
ISBN 7-111-05180-7

Ⅰ．大…　Ⅱ．①王…②韩…　Ⅲ．物理-实验-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．04-33

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第05434号

出 版 人：马九荣（北京市百万庄南街1号　邮政编码100037）
责任编辑：卢若薇　版式设计：冉晓华　责任校对：张晓蓉
封面设计：方　芬　责任印制：卢子祥
三河市宏达印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1996年8月第1版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·11.75印张·279千字
0 001—5 000册
定价：15.00元

编者的话

本书是根据“高等工业学校物理实验课程教学基本要求”，结合我院教学改革的经验编写的。

物理实验是高等工业学校一门独立设置的必修课程。实验教学的根本目的是培养学生的科学实验能力，提高学生的科学实验素质，使学生树立实事求是、严肃认真的科学态度和辩证唯物主义世界观。学生通过本课程的学习，将会获得具有一定系统性的基本实验知识、基本实验方法和基本实验技能。

本书按力、热、电、光、近代物理和设计性实验几部分顺序编写，实际教学时，可将各部分按由浅入深、循序渐进的原则混合安排。测量误差和数据处理是基础实验课的重要内容之一，为保持这部分内容的系统性，将其集中写在前面，然而，应按教学的进度分散授课。

实验教学是一项集体的事业，本书的编写凝聚了我院全体实验教师和技术人员的智慧，是他们多年积累的劳动成果；同时也吸收了兄弟院校许多宝贵的经验。屈振权、张庆军、张丽惠、郑秀兰、张占新、崔恩良、郑仁宽、张海龙参加了本书部分章节的编写及有关工作。

限于水平和教学经验的不足，书中定有不少缺点和错误，请读者不吝指正。

编　者

1995.10. 于河北理工学院

目 录

绪　论

工科大学毕业生不仅要有较为深广的理论知识，而且要有足够的现代科学实验的能力，才能适应科学技术飞速发展的需要。实验教学在理工科大学的教学中占有越来越重要的地位。物理实验是理工科大学的第一门基础实验课，是理工科学生进入大学后受到系统的实验方法和实验技能训练的开端，尤其是工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础。这个基础打得好不好，将直接影响到后续一系列实验教学的成败及高科技人才能力的培养。通过物理实验的教学，不但要使学生学习物理实验的知识、方法和技能，而且要使学生了解科学实验的主要过程与基本方法，为今后的学习和工作奠定良好的实验基础。因此，物理实验作为一门独立设置的课程，不是以验证理论为主要目的，而是以培养与提高学生的科学实验能力和科学实验素质为主要教学目标的。

一、大学物理实验课的目的和要求

物理实验是一门实验科学，学生必须认真参加实验的实践活动，动手动脑，勤于观察，善于思索，通过一个个具体实验的全过程，循序渐进地达到培养与提高科学实验能力和科学实验素质的目的。

具体地说，学生在实验过程中应从以下三方面有目的的加强锻炼。

1. 在能力训练方面，学习并掌握进行物理实验的基本知识、基本方法和基本技能。作为一门基础的实验课，物理实验三个“基本”的内容是非常丰富的，概括起来有如下几个方面：实验方案的确定；实验仪器的选择、使用；测量的技术和方法；实验数据的处理方法；实验误差的估算方法；实验结果的分析；编写总结报告等。这几个方面互相联系，又各有其独立性，但都是进行科学实验所必须的基本技能。通过物理实验课，从以上各方面对学生进行全面的训练，是我们的目的。

2. 在素质训练方面，培养严肃认真的工作作风和实事求是的科学态度。实验研究以事实为基础，因此，实验过程中必须认真细心地观察、分析，总结事实，去粗取精，去伪存真，才能得出正确的结论。学生实验虽是在人为创造的条件下，按照预定的方案和计划，以确定的顺序重现一些物理过程和物理现象，但对这些过程和现象的观察和测量，也必须对所用仪器耐心调试，仔细操作，对实验数据如实记录，认真细致地分析处理，才能得到最可靠的实验结果。因此，每独立地、成功地完成一次实验，都是对严肃认真的工作作风和实事求是的科学态度的锤炼。

3. 在素质训练方面，培养理论联系实际的好学风。好学风的养成，不仅有益于学生时代的学习，而且终生受益。物理实验是培养理论联系实际学风的最好课堂。首先，正确的实验方案和实验方法，都是在一定的理论指导下确定的，其产生本身就是理论与实践结合的范例。其次，要实验就要进行观察、测量，必然会观察到多种现象，遇到一系列问题，这必将引发我们去思考，并利用已知的理论知识（尤其是物理学知识）进行分析、研讨，这不仅加深了对理论知识的理解，同时也提高了发现问题、分析问题和解决问题的能力，促进了理论联系实际学风的培养。

二、怎样学好物理实验

学好物理实验的关键是“严肃认真”“严格训练”“严谨求实”地做好每一个实验。任何实验的过程都包括实验前的准备，实验的观察、测量和记录，实验数据的分析处理和总结报告三个环节。下面对在实验过程中如何把握好这三个环节分述如下：

1. 实验前的准备　作好准备是保证实验能顺利进行，并取得满意结果的重要前提。实验前，要充分理解实验的理论依据和条件；了解所用仪器的构造、原理和使用方法以及为什么选用这种仪器；此外，对实验中要研究什么问题、测量哪些物理量、可能出现的现象等，都要做到心中有数。只有这样才能使自己成为实验的主动者，胸有成竹地进行实验，否则，盲目的、只能按教材指定的步骤，照葫芦画瓢，成为被动的“机械人”，这样，即使作完了实验，也必然收效甚微。

2. 观测和记录　仪器是观测的主要手段，必须掌握其使用方法，认真安装和调试，使之达到实验要求的工作状态。如其不然，若不耐心细致地调试仪器就匆忙观测，则必事倍功半，绝难得到满意的结果。在进行观测的过程中，要聚精会神，手脑并用，对出现的现象要多思考几个“为什么?”，并积极地拿出解决的办法，尤其是对出现的未料到的现象，更不要轻易放过。记录就是如实地记下观测到的现象和测量数据，这是以后进行计算和分析问题的原始数据，一定要真实。

3. 数据的分析处理和总结报告　数据的分析处理和实验的总结报告，是以上两个环节的升华，是实践—理论的一次飞跃。正确的完成这一飞跃，有一个去粗取精、去伪存真的问题，因此在取得数据后，应保持仪器的测试状态，先对数据进行分析处理（起码是粗略分析），以便发现问题，作必要的补充测量。分析处理一定要以原始数据为依据，绝不能为得到所谓“好”的结果而改写数据、凑数或抄袭其他同学的数据。须知，学生实验的目的，不只是为了得到一个结果，更重要的是要学会分析实验，培养分析问题的能力。结果好要分析出好在何处，结果差要分析出差的原因。教师评判学生实验的优劣也绝不会把着眼点仅仅放在实验的结果上。

总结报告是实验工作的全面总结，要用简明的语言、工整的简图、合理的表格，将实验过程和结果完整而真实地表达出来。总结报告的编写，是为将来进行技术设计、撰写科学研究报告和论文所作的必要训练，切忌草率。实验的总结报告通常应包括实验题目、实验目的、所用仪器设备及其主要技术指标、简要原理和步骤、原始数据、计算或作图处理数据、误差分析、实验结果、分析讨论等几部分。

“分析讨论”包括的内容有：回答思考题；对实验中观察到的异常现象的解释和讨论；对所用仪器设备和实验方法的建议；实验的心得体会等。

此外，要学好物理实验课，还应注意以下几点：

第一，要注意学习和总结实验中所采用的实验方法，尤其是基本的测量方法。这些基本的测量方法是经常用到的，也是复杂测量方法的基础。

第二，要自觉地培养分析实验、发现实验中的问题和解决问题的能力。不要得到一个所谓好的结果就高兴，就认为已经学好了这个实验。实际上，任何实验结果，由于各种因素的影响总会与理论结果有差异，问题在于要分析出这种差异的大小和是否合理。在实验过程中，仪器不可避免地可能会出现故障，遇到这种情况，要力求自己去分析，自己动手去解决。即使请教师解决，也要留意观察、细心体会教师是如何解决的。可以说，能否发现和排除仪器

故障是实验能力强弱的重要表现。一定要注意这方面的锻炼。

第三，要注意培养良好的实验习惯。在实验过程中，有些事情看来简单，但对保证实验安全顺利地进行、少出差错，都起着重要的作用。如清晰、准确、如实的记录实验数据，合理地布置仪器设备，记录实验的时间、地点和实验环境（温度、湿度、气压等），注意安全，注意节约及注意环境的肃静、整洁等。于这些微小细处严格要求自己，培养良好的习惯，提高素质，是有助于物理实验课的学习和今后工作的。

总之，只要充分认识到物理实验课的实践性这个主要特点，理论联系实际，勤于动手，善于动脑，养成良好的实验习惯；只要严谨求实，认真踏实地做好每一个实验，不草率测数，逐步把实验的主动性掌握在自己手中；只要把学过的相对独立的实验有机地联系起来，既把握它们的特性，又善于找出它们的共性，在实验过程中注意分析实验现象，善于发现问题，勤于分析问题，勇于解决问题。物理实验这一重要的基础实验课是一定能学好的。

第一章　实验误差与数据处理

第一节　测量和测量误差

对物理量的测量，就是借助仪器，在一定的环境中，通过实验的方法，对客观事物取得测量结果的认识过程。它是通过实验把被测量和做为比较单位的另一量（标准量）相比较的过程。根据实际需要，测量结果不外乎有下面三种形式：

（1）带有单位的数值。

（2）在固定坐标上给出的图线。

（3）按一定比例给出的图形。

以上任一形式的测量结果，都可以用下式表示

$$测量结果=数值\times单位$$

一、测量方法的分类

根据取得测量结果的方法不同，可将测量分为：

1. 直接测量　把被测量直接与标准量进行比较，直接从仪器读数取得测量结果。例如，用米尺测长度，用秒表测时间，用电流表测电流等。

2. 间接测量　测量结果不能用直接测量的方法得到，必须通过一个或多个直接测量值，利用一定的函数关系运算才能得到。例如，用电压表测一电阻 R 两端的电压 U，用电流表测通过电阻的电流 I，由公式 $R=U/I$ 计算出电阻 R 的值。则电阻的测量属于间接测量。

根据测量条件不同，可将测量分为：

1. 等精度测量　对被测量进行重复测量，所取得的数据，可认为是在相同的测量精确度条件下取得的。这种测量称为等精度测量。在等精度测量中，多次测量取得的测量数据，允许在一定范围内变化，但对偏大或偏小的数据，不能判定哪种数值更接近被测量的真实值，只能一视同仁，同等对待，即对数据的信赖程度是相同的。

2. 不等精度测量　对被测量进行重复测量，可能由于测量环境的改变或仪器的不同，可判定测得的各数据的可信赖程度是不相同的。这种测量称为不等精度测量。

等精度测量和不等精度测量的数据处理方法是不同的。大学物理实验中所进行的重复测量均认为是等精度测量。

二、测量误差及表达方式

任一物理量，在一定条件下，都存在一个客观值，称为该物理量的真实值。而用实验手段测量出来的值，称为该物理量的测得值。

由于受仪器准确度、测量方法、环境影响等客观条件的限制，任何实验测量总是得不到真实值的，测得值与真实值之间总存在差异。这种差异称为测量误差，简称误差。

随着科学技术的发展，人们对客观世界的认识更深入，可使测量仪器更精密，测量方法更先进，创造更加接近客观实际的环境和测量条件，可使测量误差更小。但使误差趋于零的

目标是永远达不到的。这就是测量误差存在的普遍性。即

$$测得值+误差=真实值$$

测量误差的定量估计，和测量结果的数与单位一样，是表征测量结果的一个重要参数。设想一个测量结果的可靠性近似为零，那么这个测量结果还有什么意义呢？

做为表征测量结果可靠性定量估计的误差，可采用下面两种形式表示。

1. 绝对误差　根据前面误差定义的表达式可得

$$误差=真实值-测得值$$

按此式得到的误差就是绝对误差。它具有与被测量相同的单位，表征测量值偏离真实值的程度，是人们对误差所理解的习惯概念。

2. 相对误差　绝对误差可以表征测量结果的可靠性程度。但当测量不同大小的被测量时，绝对误差并不能确切地表示出所进行测量的精确程度。例如，对两个电阻进行测量，一个测得值 $R_1=10\Omega$，绝对误差 $\Delta R_1=0.1\Omega$，另一个测得值 $R_2=10000\Omega$，绝对误差 $\Delta R_2=0.1\Omega$。我们能认为两个测量结果精确程度一样吗？显然应认为 R_2 的测量精确度高。因此，要对测量精确度进行比较，必须用相对误差做为比较的指标。相对误差定义为

$$相对误差=\frac{绝对误差}{真实值}\times 100\%$$

三、误差的分类

根据误差自身的特点，可将误差分为两类。

1. 系统误差、准确度　系统误差是由于在测量过程中，存在某些确定的或按一定规律变化的不合理因素引起的。这种因素使测量结果向真实值的某一方向偏移一固定的量或按一定规律偏移真实值。产生系统误差的原因大致可有：

测量仪器误差：即因仪器本身的准确度和分辨率的限制而导致的误差。

方法或理论误差：即因使用的实验方法或原理不完备引起的误差。

环境误差：由于外界环境，如温度、湿度、电场、磁场、大气压等因素的变化引入的误差。

装置误差：指仪器设备安装的不尽合理或仪器调整不当产生的误差。

系统误差的存在直接影响测量结果的准确性，因此，我们用“准确度”一词来描述测量结果系统误差的大小。

2. 随机误差、精密度　在测量过程中，必然存在一些随机因素的影响，从而造成具有随机性质的误差，称为随机误差。这种误差的大小和方向是无法预料且无法控制的。就是在尽可能相同条件下对一固定待测量进行重复测量，在极力排除和改正一切明显的系统误差之后，每次测量得到的测得值，总是在一定范围内呈随机性的波动变化，这就是由随机误差所造成的。

随机误差对个体来说，也就是对任何一次测量产生的误差，是没有规律的，不能控制的。用实验的方法也无法消除；但对总体，即对多次测量得到的所有测得值的误差而言，随机误差存在一定的统计规律。所以，对随机误差，可以也只能用概率统计的办法进行处理。

随机误差反映的是一组测量结果的重复性和弥散性，对此，我们用“精密度”一词来形容。如果某被测量经多次重复测量，各次测得值彼此很接近，说明此组测量重复性好，就说测量精密度高。

第二节 系统误差的处理

系统误差遵循一定的变化规律，原则上是能够发现其变化规律、采取一定的方法、将其消除或减小到最小程度的，这也是处理系统误差的唯一办法。

发现和减小系统误差，要靠实验者坚实的理论基础和丰富的实践经验，处理的好坏，主要取决于实验者对被测量、参与测量各环节的性质以及各种影响测量的因素的了解深度；取决于对每一具体测量条件下系统误差性质的研究和分析。所以系统误差应着重采用个别考察的办法，根据实际问题采取具体方法来解决。至今，还没有一个通用的、完善的办法解决系统误差的处理问题。因此，我们仅就由仪器准确度所限和实验方法、原理不完善而导致的误差以及消除系统误差的经验方法做简单介绍。

一、方法或理论误差

分析测量所依赖的理论公式，看其所要求的条件在测量过程中是否得到满足。如测重力加速度，若用单摆，是根据单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$，此公式要求的条件，如摆角趋于零，摆球体积趋于零，不存在任何阻力等，在实验当中是得不到完全满足的。因此，必然产生系统误差；又如，用落球法测液体粘滞系数的公式，是根据斯托克斯公式导出的，而斯托克斯公式要求小球在无限广阔的液体中下落，此条件在实际中又得不到满足。因此，若不加修正，也必然产生系统误差；再如，用电压表测电压时，除非电压表内阻无穷大，不然必会改变被测电压的原来状态，以致造成测量误差。

对这类误差，只要分析出原因，就可以采取一定的办法，根据测量准确度的要求，使要求的条件达到一定程度的满足，或进行修正，使系统误差减小到允许的程度。

二、仪器准确度导致的误差

大多数仪器，尤其是准确度不太高的仪器，由仪器准确度限制产生的误差多属系统误差。对这类误差不能采用任何方法消除或减小，只能根据仪器的准确度估计出误差的范围。

对一些非数字式测长度、温度、时间等仪器，一般是以最小分度值为其准确度，其绝对误差视仪器情况取最小分度值或其一半。

指针式电测仪表的准确度，有的以额定相对误差表示，有的以标称相对误差表示，它们的具体含义均可从附带说明书中查得。数字式仪表的准确度又有其自己的含义。尽管各类仪器的准确度含义不同，但均可由其确切的含义求出由此导致的误差。例如，一量程为 10V，准确度等级 $a=0.5$ 的直流电压表，该表的准确度等级定义为$\frac{\Delta_m}{10}=a\%$，Δ_m 为最大绝对误差。根据准确度等级的含义，用此表测电压时，由准确度限制导致的最大绝对误差为

$$\Delta_m=10\text{V}\times0.5\%=0.05\text{V}$$

三、减小系统误差的测量方法

1. 替代法　测得待测量后，立即用已知标准量代替未知量，进行同样的测量，并使仪器指示不变，则已知标准量就等于待测量。如在等臂天平上称量，未知量 X 与法码 T 平衡，设天平两臂长为 L_1 和 L_2，则有

$$X=\frac{L_2}{L_1}T$$

若两臂 L_1 和 L_2 不严格相等，那么取 $X=T$ 将带来系统误差。现移去 X 代之以标准砝码，若标准砝码值为 P 时，天平重新平衡，则有

$$X=P$$

这样就消除了 $L_1 \neq L_2$ 和 T 的标称误差带来的系统误差。

2. 抵消法　这种方法要求在对被测量进行测量时，要进行两次适当的测量，使两次测量产生的系统误差大小基本相等，符号相反。取两次测量结果的平均值做为最后的结果，以达到消除系统误差的目的。如磁电系仪表在有较强磁场的环境中应用，可将仪表转 180°取两次读数，用两个读数的平均值做为最后的测量结果，则消除了外界恒定磁场带来的系统误差。

3. 交换法　是将待测量与标准量的位置互换而进行两次测量，可简单的取两次测量的平均值做为测量结果，以达到消除系统误差的目的。再以天平不等臂为例，将待测量 X 放在左侧，标准量（砝码）放在右侧，平衡时砝码为 T，有

$$X=\frac{L_2}{L_1}T$$

将待测量与砝码位置互换，天平再次平衡时，所需砝码为 T'，则有

$$T'=\frac{L_2}{L_1}X$$

从而可得

$$X=\sqrt{TT'}=\frac{T+T'}{2}$$

这样就消除了由于天平不等臂带来的系统误差。

4. 半周期偶数观察法　它能消除按周期性规律变化的系统误差。具体方法是按系统误差变化的半个周期间隔取值，每周期内取两个观测值，然后取平均值做为结果。如测角度仪器，若转轴与刻度盘不同心，则要引入读数误差。若为图 1-1 所示情况，可知在 0°、180°、360°处误差最小，在 90°、270°处最大，在两个半周期内各对应点处，误差大小相等，符号相反。因此，若测量时在相差半个周期的两对应点处测两个值，并取此二值的平均值做为测量结果，则可消除此系统误差的影响。这正是一些测角仪器（如分光计）在刻度盘上相差 180°的位置设置两个读数装置的道理。

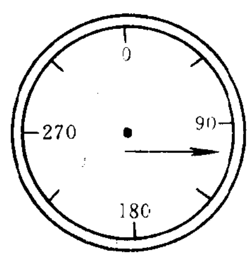


图　1-1

总之，系统误差的处理原则是根据对测量提出的准确度要求，在现有技术条件和理论水平的基础上，尽可能多的消除系统误差对测量的影响，如果仍达不到可忽略的程度，则估计出系统误差的极限值。

第三节　随机误差的规律及处理

在测量过程中，因存在许多来自仪器、环境、操作人员等不能控制的随机因素的影响，只要仪器的准确度和分辨率足够高，这些随机因素的影响就能在测得值中得到反映，使测得值带有随机性，造成难于预料的测量误差，这就是随机误差。这种误差由于不能预料，不能控制，也就没办法将其消除。

一、随机误差的特点

对一固定量进行等精度重复测量，由于测得值反映出随机误差的变化，当测量次数足够多时，经大量实践的检验，许多随机误差的分布具有下列特点：

1. 对称性　绝对值相等的正、负误差出现的概率相同。

2. 有界性　绝对值很大的误差出现的概率为零。即在一定的条件下，随机误差的绝对值不会超过某一界限。

3. 单峰性　绝对值小的误差出现的概率大于绝对值大的误差出现的概率。

4. 抵偿性　随着测量次数的增多，随机误差的代数和趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(X_i - A) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = 0$$

式中，A 为待测量的真实值；X_i 为第 i 次测量的测得值；δ_i 为第 i 次测得值的误差。

凡具有上述分布特性的称为正态分布，也叫高斯分布。

二、随机误差的估计

具有统计规律的随机事件（随机误差正是这种事件），数学上可以用概率理论来处理，但这里只做定性讨论。

由随机误差的分布特点，当测量次数足够多时，可得到如图 1-2 所示的误差分布曲线。横轴表示误差，纵轴表示 δ_i 附近单位误差间隔内误差出现的次数，则曲线下的面积表示总的测量次数。

对一组一定次数测得值，各测得值的随机误差大，说明此组测得值的弥散性大，因此，估计随机误差，就是找一个参数来描述一组测得值的弥散性大小，即描述一组测得值的精密度高低。

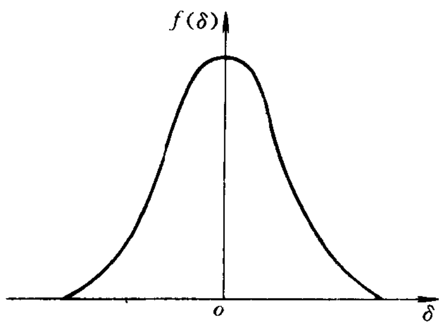


图　1-2

由图 1-2 易见，一组测得值弥散性小，曲线就高而窄，否则矮而宽。因此，曲线的形状就描述了这组测得值的弥散性，但这样使用起来不太方便。对一组确定的测得值，曲线的形状是唯一确定的，我们可以用曲线上任意一个特征点来表示曲线的形状。最典型的特征点是曲线的拐点在横轴上的坐标植$\pm\sigma$，此值小则曲线窄，说明这组测得值的弥散性小，因此可用 σ 来描述这组测得值的精密度。

数学上可以推导，当测量次数 n 趋于无穷大时，有

$$\sigma = \pm\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - A)^2}$$

称 σ 为这组测量值的标准误差。

实际上，任何测量，次数不可能无穷大，而且真实值 A 也是不可知的，所以上式只有理论上的意义。对有限次测量，用 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$ 代替 A，得

$$\hat{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

式中，$\overline{X}$ 为一组测得值的算术平均值；$X_i-\overline{X}$ 称第 i 次测得值的绝对偏差（或残差）；$\hat{\sigma}$称一组

有限次测得值的标准偏差，通常也称标准误差。

数学计算表明，在$-\hat{\sigma}$到$+\hat{\sigma}$之间，图 1-2 所示曲线下的面积占整个曲线下面积的 68.3%，称 0.683 为置信度。不难理解它的物理含义为：在一组测得值中，绝对偏差$\leqslant|\hat{\sigma}|$的占总测量次数的 68.3%。

既然将$\hat{\sigma}$理解为表征曲线形状的特征量，当然也可用其他点表征曲线的形状。比如取$\alpha=3\hat{\sigma}$点，计算表明，这时的置信度为 0.997，α称极限误差。

第四节　直接测量结果的表示

许多情况下，测量结果是以数值的形式给出的，此时必须包括数值大小、单位和误差三部分，即测量结果必须表示为：

测量结果＝数值＋单位＋系统误差＋随机误差

对以上几项简要说明如下。

一、数值部分

（1）单次测量测量结果的数值就用单次测量的测得值。

（2）多次测量测量结果的数值采用各测得值的算术平均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$，称做待测量的最可信赖值。

由于误差的存在，真实值是测不到的，任何测量结果都是真实值的近似估计。而且由于随机误差的存在，对待测量重复测量n次，得n个测得值X_1，X_2，…，X_n，各测得值并不完全一样，我们只能根据这组测得值对待测量进行估计。原则上，任何一个测得值或它们的某种组合，都可做为待测量的近似估计，但哪一种最好呢？这正是我们所要研究的。

可以证明，算术平均值是待测量的最佳估计值。假设对一真实值为A的物理量进行n次等精度重复测量，测得值分别为X_1，X_2，…，X_n，各测得值的误差为

$$\delta_i = X_i - A \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-1}$$

对上式求和，再除以n，令n趋于无穷大，取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\delta_i}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum X_i}{n} - A \tag{1-2}$$

由随机误差的特点知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\delta_i}{n} = 0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum X_i}{n}=A \tag{1-3}$$

上式告诉我们，当测量次数为无穷大时，测得值的算术平均值会收敛于真实值A。

实际测量中，测量次数不可能为无穷大，有限次测量测得值的算术平均值不是真实值。但随着测量次数的增加，算术平均值$\overline{X}$会更接近真实值。因此，我们有理由认为，算术平均值是待测量的最佳估计值。

二、系统误差的表达

系统误差按其可知性可分为已定系统误差和未定系统误差。

已定系统误差是数值和符号均可以确定的系统误差，这类误差是可以通过计算或测量得到其确切值的，所以可直接对测量结果加以修正，使其不出现在误差项中，比如仪表的零点误差，经过校准的仪器示值的修正量就属于此类系统误差。

未定系统误差是数值和符号难以确定，但可以确定一个范围的系统误差。这一误差范围往往可以通过仪器的准确度加以确定。例如最小分度为 0.5mm 的刻度尺，最大系统误差为 ±0.5mm；0.02mm 分度的游标尺，最大系统误差为±0.02mm。

三、随机误差的表达

标准差 $\hat{\sigma}$ 表示的是一组测得值的标准差，含义是这组测得值中与 $\overline{X}$ 的偏差≤$|\hat{\sigma}|$的占总测量次数的 68.3%。或说某一测得值的偏差≤$|\hat{\sigma}|$的几率为 68.3%。我们用算术平均值 $\overline{X}$ 表示测量结果时，更关心的是 $\overline{X}$ 的标准偏差，记作 $\hat{\sigma}_{\overline{X}}$ 可以证明，它可由取得 $\overline{X}$ 的一组测得值计算得到：

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}}=\pm\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}=\pm\sqrt{\frac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{n(n-1)}}$$

其置信度仍为 68.3%。于是将测量结果写成

$$X=\overline{X}\pm\hat{\sigma}_{\overline{X}}$$

其含义是 $\overline{X}$ 的置信度是 68.3%，即假设再进行重复测量，其平均值落在 $\overline{X}+\hat{\sigma}_{\overline{X}}\sim\overline{X}-\hat{\sigma}_{\overline{X}}$ 内的几率为 68.3%。

实际中应注意，当一种误差比另一种误差小很多时（一般取差 3 倍以上），此种误差可忽略不计。

第五节　间接测量结果的表示

一、间接测量值最可信赖值和系统误差的估计

设一间接测量值 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，各直接测得量的最可信赖值分别为 $\overline{x_1}$，$\overline{x_2}$，…，$\overline{x_n}$，将非线性函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})$ 邻域内作泰勒展开，然后取误差的一阶项做为一级近似而略去一切更高阶的误差项，得到间接测得量 y 的最可信赖值 $\overline{y}$ 为

$$\overline{y}=f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n) \tag{1-4}$$

对于多元函数，其增量可用全微分表示，函数增量 $\mathrm{d}y$ 为

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{1-5}$$

若已知各直接测得量的系统误差 Δx_1，Δx_2，…，Δx_n，由于这些误差皆较小，可看做微分量，从而可得间接测得量的系统误差 Δy 为

$$\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{1-6}$$

上式称为间接测得量系统误差公式，而 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为各直接测得量的误差传递系数。$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$ 是直接测得量 x_i 的分误差，它反映了对间接测得量误差的贡献大小。如果 x_i

本身的误差很小，而传递系数$\frac{\partial f}{\partial x_i}$却很大，则分误差不一定小；同样，如果$x_i$本身的误差很大，但传递系数却非常小，则分误差也不一定大。利用这一点，我们可以在测量中注意到哪些量是必须测准的，哪些量可以不必测得很准也不致对结果有多大的影响。

通常总是从最不利的条件考虑，各分误差取绝对值相加。

二、间接测得量随机误差的估算

间接测得量和直接测得量一样，随机误差是用标准偏差来描述的。

设对n个直接测得量皆进行了N次等精度测量，其相应的绝对偏差为：

对x_1：δx_{11}，δx_{12}，…，δx_{1N}

对x_2：δx_{21}，δx_{22}，…，δx_{2N}

⋮

对x_n：δx_{n1}，δx_{n2}，…，δx_{nN}

其中　δx_{ik}是第i个直接测得量第k个测得值与待测量真实值之差。根据式（1-5），可得间接测得量y的随机误差为：

$$\left.\begin{aligned}\delta y_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{21} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{n1}\\ \delta y_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{12} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{22} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{n2}\\ &\vdots\\ \delta y_N &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{1N} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{2N} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{nN}\end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

其中　δy_k是第k次测量的间接测得量与其真实值的误差。将上式中的每个方程平方，再将平方后的各式相加后除以N，利用等精度测量中多次测量的标准偏差计算式可得

$$\hat{\sigma}_{\bar{y}} = \pm\sqrt{\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (i = 1,2,\cdots n) \tag{1-8}$$

此式是常用的间接测量标准误差的计算式。

第六节　有效数字

一、测量结果的数字表示

此问题乍看起来似乎很简单，把测量结果用数字表示出来不就行了吗？但仔细推敲就会提出问题。

首先注意到，所有测量结果都是真实值的近似，但近似程度会各有不同，这种不同除用误差项反映外，还能反映到表示测量结果的数字的位数上。例如，约2.5cm的长度，用最小分度为厘米的刻度尺测量，测量结果为2.4cm，如图1-3 a所示；若用最小分度为毫米的刻度尺测量，测量结果为2.45cm，如图1-3 b所示；若用更精密的仪器测量，测量结果就会更精确，表示测量结果的数的位数就会更多。这说明表示测量结果的数字

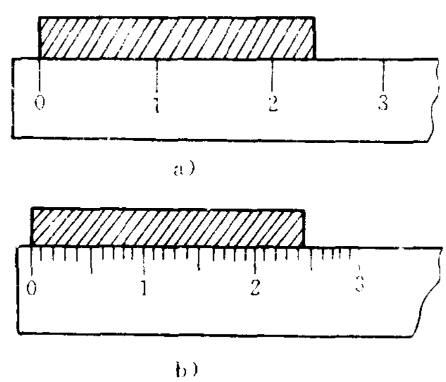


图　1-3