高等学校试用教材

数学物理方程讲义

姜礼尚　陈亚浙　编

高等教育出版社

本书是作者以多年来在北京大学数学系讲授数学物理方程课的讲义为基础编写而成的. 经高等学校理科数学、力学教材编审委员会微分方程编审组审阅推荐为数学专业数学物理方程课的试用教材或教学参考书，可供一个学期(70学时)授课之用，选学内容的部分章节打了"*"号.

本书很有特色，反映了作者对该课程改革的尝试. 其特点是：1. 力图把基本理论、解题的典型方法及物理背景三者紧密结合起来；2. 全面、概括地介绍了常用的解题方法并对其理论基础作了必要的阐述；3. 对偏微分方程的重要概念如特征理论、能量模估计、最大模估计、广义解等作了深入的讨论和阐述；4. 对偏微分方程近代理论中某些活跃的方向、某些工具以及某些与实际联系紧密的问题也作了直观而浅易的介绍.

高等学校试用教材

数学物理方程讲义

姜礼尚　陈亚浙 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张8.125　字数196 000

1986年5月第1版　1988年4月第3次印刷

印数 11 751—16 760

ISBN 7-04-001232-4/O·382

定价　1.45元

序　言

数学物理方程以具有物理背景的偏微分方程(组)作为研究的主要对象. 它与其他数学分支以及物理、化学等自然科学和工程技术的很多领域都有着广泛的联系. 因此, 无论在历史上还是在今天的现实世界中,它对于推动数学理论的发展,加强理论与实际的联系, 帮助人们认识世界和改造世界都起着重要的作用.

数学物理方程作为一门大学基础课, 是企图通过对一些具有典型意义的模型方程的深入剖析, 阐明和介绍偏微分方程的基本理论、解题的典型技巧以及它们的物理背景. 把数学理论、解题方法与物理实际这三者有机地、紧密地结合在一起, 应该是本课程有别于其他课程的一个鲜明的特点.

半个多世纪以来,偏微分方程的理论有了重大的发展,电子计算机已广泛地应用于自然科学和工程技术的各个领域. 这些发展不仅意味着新理论、新工具与新方法的出现, 同时也使人们对一些传统的经典方法和理论有了新的认识, 从而为我们更新教材提供了重要的前提和必要的线索. 北京大学数学系微分方程教研室的一些同志多年来与全国同行一样, 一直在自己的教学实践中进行探索. 这本教材就是在原有大纲的基础上, 吸取了大家在探索中的点滴体会与经验写成的.

本教材基本上是按照一学期七十学时的课程安排编写的. 由于学时比较紧,有些内容虽然写了,但标了"*"号,可根据情况选用; 有些则只写出结论, 有兴趣的读者可查阅有关的参考书. 对于象 δ-函数、广义 Fourier 变换,Соболев 空间等重要概念, 我们采用较为直观、浅易的阐述,强调了它们的应用. 当然,我们也尽可能做到论证的严密性.

第一章希望读者掌握守恒律与变分原理等物理规律的应用以

及每个方程的物理背景；第二章的重点是双曲型方程的特征理论、能量积分与分离变量法；第三章要求读者重点掌握Fourier积分变换，抛物型方程的Green函数与极值原理；第四章除了进一步熟悉椭圆型方程的极值原理与Green函数之外还应重点掌握变分方法；第五章希望对Cauchy-Ковалевская定理以及Lewy的反例等重要结论有一个初步的了解.

由于作者学识所限，错误与不妥之处在所难免，希望读者提出宝贵意见.

最后，对我们教研室、特别是刘西垣、吴兰成、叶其孝等同志在本书的酝酿、试用和编写过程中所提出的宝贵意见与付出的辛勤劳动表示深切的谢意. 在定稿过程中，李大潜、陈庆益、伍卓群、陈恕行、王传芳诸先生和理科数学、力学教材编审委员会微分方程编审组的诸位先生对本书提出了很多带有建设性的意见，作者对此表示由衷的感谢.

1985年5月1日

目　录

第一章　方程的导出和定解条件

任何物质的运动都受到一定的自然规律（如物理定律）的制约．我们常见的一些数学物理方程，它们作为描写这些物质运动的数学模型，是从数量形式上刻划了由相应的物理定律所确立的某些物理量之间的制约关系．

与建立数学物理方程关系最密切的物理定律大致可以归结为两大类：1．守恒律；2．变分原理．当然，为了使方程(组)成为封闭的往往还需要其他实验定律，如 Fourier 热传导定律，状态方程等，但前面所述的两大类是最基本的．

在这一章内，我们将通过弦振动、热传导、流体运动以及膜平衡、极小曲面等物理和几何的例子，说明如何从守恒律和变分原理出发导出我们常见的一些数学物理方程．它们将作为本书讨论的对象．

§1．守　恒　律

质量守恒、动量守恒和能量守恒是自然界一切运动都必须遵循的基本规律．对于自然界的某一个特定问题，如果把相应的守恒律数量化，就导出刻划这个问题的微分方程．因此，从这个意义上说，微分方程实质上就是自然界守恒定律的数量形式．

1.1　弦振动方程和定解条件

物理模型：

一长为 l 的柔软、均匀细弦，拉紧以后，让它离开平衡位置在垂直于弦线的外力作用下作微小横振动（即弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直），求在不同时刻弦线的形状．

弦的往返运动的主要原因是张力的影响。弦在运动过程中，各点的位移、加速度、张力等都在不断变化，但它们遵循动量守恒律.

动量守恒律

物体在某一时段(即时间间隔)内的动量的增量等于作用在该物体上所有外力在这一时段内产生的冲量.

$$\boxed{\begin{matrix}\text{动　量}\\ t=t_2\end{matrix}}-\boxed{\begin{matrix}\text{动　量}\\ t=t_1\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}\text{外力产生的冲量}\\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{matrix}}$$

我们应用这个定律建立弦上各点的位移所满足的微分方程.

首先建立坐标系，取弦的平衡位置为 x 轴. 在弦线运动的平面内，垂直于弦线的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴. 这样，在任意时刻 t，弦线上各点的位移为

$$u=u(x,t).$$

在弦上任意截取一段$[a,b]$，考虑它在任意时段$[t_1,\ t_2]$动量的变化.

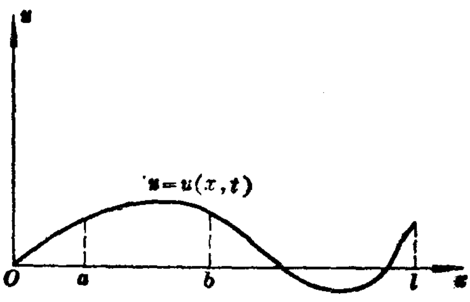

图 1.1

设 ρ 为弦的线密度(千克/米)，f_0 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度(牛顿/米). 从而在任意时刻 t，弦段$[a,b]$的动量为

$$\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx.$$

在时段$[t_1,t_2]$内动量的变化为

$$(1.1)\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_2}dx-\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1}dx.$$

为了写出作用在弦段$[a,b]$上所有垂直于弦线的外力产生的冲量，注意到作用于弦段$[a,b]$上的外力有两类：外加强迫力和周围弦线通过端点$x=a,b$作用于弦段$[a,b]$的张力. 强迫力在时段$[t_1,t_2]$内所产生的冲量是

$$(1.2)\qquad\int_{t_1}^{t_2}dt\int_a^b f_0dx.$$

作用在端点$x=a$和$x=b$点的张力$\boldsymbol{T}_a$、$\boldsymbol{T}_b$，它们的方向如图1.2. 它们在u轴方向的分量为

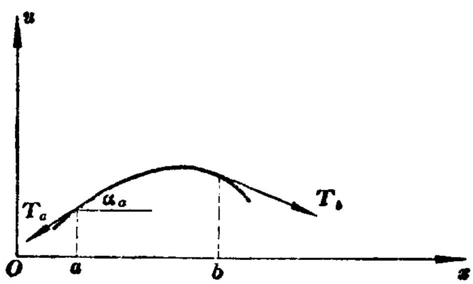

图 1.2

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_a\cdot\boldsymbol{i}_u&=|\boldsymbol{T}_a|\cos(\boldsymbol{T}_a,\boldsymbol{i}_u)\\&=-|\boldsymbol{T}_a|\sin\alpha_a,\\\boldsymbol{T}_b\cdot\boldsymbol{i}_u&=|\boldsymbol{T}_b|\cos(\boldsymbol{T}_b,\boldsymbol{i}_u)\\&=|\boldsymbol{T}_b|\sin\alpha_b,\end{aligned}$$

这里$\boldsymbol{i}_u$表示u轴上的单位向量，由于我们假设弦线是均匀的，弦作微小横振动，故可以认为：

$$|\alpha_a|,|\alpha_b|\ll 1,\sin\alpha_a\sim\mathrm{tg}\alpha_a,$$
$$\sin\alpha_b\sim\mathrm{tg}\alpha_b,$$

以及

$$|\boldsymbol{T}_a|=|\boldsymbol{T}_b|=T_0(\text{常数}).$$

因此张力 $\boldsymbol{T}_a,\boldsymbol{T}_b$ 的垂直于弦线的分量在时段$[t_1, t_2]$内产生的冲量是

$$(1.3)\qquad \int_{t_1}^{t_2} T_0 \operatorname{tg}\alpha_b dt-\int_{t_1}^{t_2} T_0 \operatorname{tg}\alpha_a dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=b}-\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}\right]dt.$$

考虑到表达式(1.1)、(1.2)、(1.3)，从而由动量守恒定律得到弦线作微小横振动所满足的方程：

$$(1.4)\qquad \int_a^b\left[\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_2}-\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1}\right]dx$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=b}-\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}\right]dt+\int_{t_1}^{t_2}dt\int_a^b f_0 dx,$$

其中$[a,b]$是包含在弦线$[0,l]$内的任意弦段，$[t_1,t_2]$是包含在振动期间$[0,\infty)$内的任意时段.

如果假设在区域$(0,l)\times(0,\infty)$内，u 存在二阶连续微商$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，那么由熟知的 Green 公式，表达式(1.4)可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_a^b f_0 dx.$$

由(a,b)，(t_1,t_2)的任意性，立得 u 适合的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f_0\qquad(0<x<l,\ t>0).$$

由于弦是均匀的，故 $\rho=$常数，因此方程亦可改写为

$$(1.5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad(0<x<l,t>0),$$

其中

$$a^2=\frac{T_0}{\rho},\quad f(x,t)=\frac{f_0(x,t)}{\rho}.$$

方程(1.5)刻划了均匀弦的微小横振动的一般规律，人们称它为弦振动方程.

一根弦线的特定的振动状况还依赖于初始时刻弦线的状态和通过弦线的两端所受到的外界的影响. 因此为了确定一个具体的弦振动，除了列出它满足的方程以外还必须写出它适合的初始条件和边界条件.

初始条件 即必须给出弦上各点在初始时刻 $t=0$ 的位移和速度.

$$(1.6)\quad \begin{aligned} &u(x,0)=\varphi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l),\\ &u_t(x,0)=\psi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l),\end{aligned}$$

这里 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为已知函数.

边界条件 一般说来有三种

1. 已知端点的位移变化，即

$$(1.7)\qquad u(0,t)=g_1(t),\quad u(l,t)=g_2(t)\quad (t\geqslant 0),$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，称弦线具有**固定端**.

2. 已知在端点所受的垂直于弦线的外力的作用，即

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} &-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=g_1(t),\\ &T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=g_2(t)\qquad (t\geqslant 0),\end{aligned}$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，称弦线具有**自由端**.

3. 已知端点的位移与所受外力作用的一个线性组合

$$(1.9)\qquad \left.\begin{aligned} &-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}+\alpha_1 u(0,t)=g_1(t)\\ &T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+\alpha_2 u(l,t)=g_2(t)\end{aligned}\right.\qquad (t\geqslant 0)$$

$(\alpha_i>0, i=1,2)$，特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，表示弦的两端固定在弹性支承上，$\alpha_i(i=1,2)$分别表示支承的弹性系数.

通常我们把初始条件和边界条件统称为**定解条件**. 一个偏微分方程连同与它相应的定解条件(初始条件和边界条件)组成一个**定解问题**. 因此为了寻求在特定条件下弦的振动规律，我们需要去求解一个相应的定解问题.

在区域$\{0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0\}$上由方程(1.5)、初始条件(1.6)以及边界条件(1.7)—(1.9)中间的任意一个组成的定解问题称为**弦振动方程的混合问题**.

如果对于弦上的某一段，在所考虑的时间内，弦线端点(边界)的影响可以忽略不计，那么我们可以认为弦长是无穷的，这样就不必考虑边界条件. 我们把在区域$\{-\infty<x<\infty, t\geqslant 0\}$上，由方程(1.5)和初始条件(1.6)组成的定解问题称为**弦振动方程的初值问题**(或 Cauchy 问题).

类似地我们可以给出关于弦振动方程半无界问题的定义.

附注 1 方程(1.5)虽然一般称为弦振动方程，但决不只用来表述弦的横振动. 事实上在工程和物理中，还有很多其它的实际问题同样可以用方程(1.5)来刻划. 例如杆的纵振动(即一均匀细杆在外力作用下沿杆长方向作微小振动)，如果取杆长方向为 x 轴，$u(x,t)$表示 x 处的截面在 t 时刻沿着杆长方向的位移，那么由动量守恒定律和虎克(Hooke)定律推得 $u(x,t)$ 适合的方程(1.5)，其中$a^2=\dfrac{E}{\rho}$，E 是杨氏模量. 其实不论是弦的横振动还是杆的纵振动，它们都有一个共同的特征，即由物体的振动产生了波的传播. 因此方程(1.5)一般亦称为**一维波动方程**.

附注 2 如果我们考虑的是膜的振动或者声波在空气中的传播，用来描述这些二维和三维波动现象的微分方程仍然具有和方程(1.5)相似的形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f, \tag{1.10}$$

这里 $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial t_i^2}$ 是 Laplace 算子，n 是维数．在本章§1.3 中，我们将从流体力学基本方程组出发，经过简化导出声波方程(1.10)(其中 $f\equiv 0$)，通常我们把方程(1.10)称为**波动方程**.

附注 3 对于方程(1.10)我们同样可以提混合问题和初值问题.

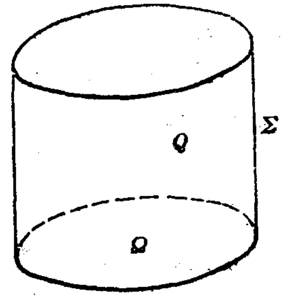

图 1.3

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 空间中的有界开域，Q 是 $\mathbf{R}^n\times[0,\infty)$ 中的一个柱体：$Q=\Omega\times(0,\infty)$，Σ 是柱体的侧表面，$\Sigma=\partial\Omega\times(0,\infty)$ ($\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界)．所谓**混合问题**就是在 $\bar{Q}$ 上定义一个函数 u，使它在柱体 Q 内适合方程(1.10)，在柱体的下底适合初始条件

$$\begin{aligned} &u|_{t=0}=\varphi(x_1,\cdots,x_n),\\ &u_t|_{t=0}=\psi(x_1,\cdots,x_n), \end{aligned}\qquad (x_1,\cdots,x_n)\in\Omega. \tag{1.11}$$

在柱体的侧表面 Σ 上适合下面三个边界条件中的任意一个：

$$u|_\Sigma=g(x_1,\cdots,x_n,t), \tag{1.12}$$

或

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma=g(x_1,\cdots,x_n,t), \tag{1.13}$$

或

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\right|_\Sigma=g(x_1,\cdots,x_n,t), \tag{1.14}$$

这里 n 是 Ω 的外法向，$\alpha>0$.

所谓初值问题(Cauchy 问题)即在$\mathbf{R}^n\times[0,\infty)$上定义一个函数$u$,使它在$\mathbf{R}^n\times(0,\infty)$内适合方程(1.10),而在$t=0$上适合初始条件(1.11)(这里$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$).

附注 4 考虑膜在外力作用下处于平衡状态时的形状. 这时惯性力$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$,从而我们得到膜上各点位移满足的微分方程.

$$(1.15)\qquad -a^2\Delta u=f(x_1,\cdots,x_n).$$

从物理上讲,为了具体确定一张特定的薄膜的形状,除了方程(1.15)以外还需要考虑膜的边界所处的条件,即它还要适合边界条件(1.12)—(1.14)中的任意一个. 方程(1.15)称为 Poisson 方程. 如果$f\equiv 0$,则(1.15)称为 Laplace 方程. 边界条件(1.12),(1.13),(1.14)依次称为第一、第二、第三边界条件. 方程(1.15)和边界条件(1.12),(1.13),(1.14)中的任意一个组成的定解问题称为**边值问题**. 根据所带有的边界条件的类别,依次称这些定解问题为第一、第二、第三边值问题;人们经常把第一和第二边值问题分别称为方程(1.15)的 Dirichlet问题和 Neumann 问题. 关于膜的平衡方程(1.15),我们将在本章§2中通过变分原理重新导出.

附注 5 所谓弦和膜,它们都具有一个共同特点,就是充分柔软的,只抗伸长,不抗弯曲. 也就是当它们变形时,反抗弯曲所产生的力矩都是可以忽略不计的. 假如不然,在力学上把它们改称为梁和板,这时它们的振动方程和平衡方程都必须作相应的变化. 一般说来,这些方程中将出现未知函数的四阶微商.

1.2 热传导方程和定解条件

物理模型

在三维空间中,考虑一均匀、各向同性的物体,假定它内部有热源,并且与周围介质有热交换,来研究物体内部温度的分布和变化.

物体内部由于各部分温度不同，产生热量的传递，它们遵循能量守恒定律.

能量守恒律

物体内部的热量的增加等于通过物体的边界流入的热量与由物体内部的热源所生成的热量的总和.

$$\boxed{\begin{matrix}\text{热　量}\\ t=t_2\end{matrix}}-\boxed{\begin{matrix}\text{热　量}\\ t=t_1\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}\text{通过边界的流入量}\\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix}\text{热源的生成量}\\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{matrix}}$$

在物体 Ω 内任意截取一块 D. 现在时段 $[t_1,t_2]$ 上对 D 使用能量守恒定律. 设 u 是温度(度)，c 是比热(焦耳/度·千克)，ρ 是密度(千克/米^3)，q 是热流密度(焦耳/秒·米^2)，f_0 是热源强度(焦耳/千克·秒). 注意到在 dt 时段内通过 D 的边界 ∂D 上小块 dS 进入区域 D 的热量为 $-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}dSdt$($\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 的外法向)，从而由能量守恒律我们有

$$(1.16)\qquad \iiint_D c\rho(u|_{t=t_2}-u|_{t=t_1})dxdydz$$
$$=-\int_{t_1}^{t_2}dt\oiint_{\partial D}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}dS+\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_D\rho f_0 dxdydz.$$

大家知道，热量流动的原因是因为在物体内部存在温差. 物理学的实验表明：在一定条件下，热流向量与温度梯度成正比

$$(1.17)\qquad \boldsymbol{q}=-k\nabla u,$$

这里负号表明热量是由高温向低温流动，k 是物体的导热系数. 公式(1.17)称为 Fourier 定律.

把(1.17)代入(1.16)，注意到

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}=-k\frac{\partial u}{\partial n},$$

从而(1.16)式可改写为