图论及其应用

习题解答

张克民　林国宁　张忠辅

清华大学出版社

内 容 提 要

该书摘要编译 J.A.Bondy 和 U.S.R.Murty 所著"Graph Theory with Applications"一书的主要内容，并对其全部习题作了解答。此外，还补充了少量其它习题与解答。

该书可作为图论的教学和自学参考书。

图论及其应用习题解答

张克民　林国宁　张忠辅

☆

清华大学出版社出版
北京　清华园
北京通县向阳印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32　印张：10　字数：223千字
1988 年 4 月第 1 版　1988年 4 月第 1 次印刷
印数：00001—12000　　　定价：1.45元
ISBN 7-302-00016-6/O·1(课)

前　言

图论是研究离散对象二元关系系统中关系结构的一个数学分支。它与拓朴学、代数学、组合数学等学科关系极为密切。其应用也极为广泛，已经渗透到物理学、化学、电子学、生物学、运筹学、经济学、系统工程以及计算机科学等学科领域。基于上述原因，引起了越来越多的人对图论的兴趣与重视。

目前，国内不少学校有关专业先后开设了图论课程，图论的中文书籍也出版了近十种。由于这一学科本身的特殊性，图论习题在该学科的学习中占有重要地位。因而，几乎每本图论书都精心地安排了大量的习题。这些习题不但是书中内容的扩充，也是启发诱导初学者掌握图论方法和技巧的重要组成部分。为了与学习图论的读者共同切磋图论的解题方法，我们编写了本题解，并想尽力做到使本书对图论教学人员及其它有关人员有一定的参考价值。

J.A.Bondy 和 U.S.R.Murty 著的《Graph Theory with Applications》是一本较好的图论入门书。它精选了内容广泛、难度不同的 327 道习题，其中有些习题对图论的进一步学习是应当掌握的。本题解依序将该书的重要内容摘要列出，并将全部习题一一解出。本书采用的术语、符号尽量与该书一致，且对书中个别题目的疏忽或欠妥之处，题解中都一一作了补充或修改。一道题的解法常常不只一种，一

般情况下，我们仅选择一种解法。主观上是以图论意义比较清晰、逻辑推理比较简捷，读者易于阅读为取舍标准。算法方面的习题，不考虑它在计算机上如何实现，而只是用图论的语言与符号写出它的粗略的计算步骤。至于算法框图，因篇幅关系全部从略。读者自己补出不无裨益。

除上述书的习题外，为了加深理解并扩大视野，我们参考了李修睦先生著的《图论导引》、卢开澄同志著的《图论及其应用》等国内流行的几种图论书籍及一些文献资料，增添了一些习题。此外还对一些问题作了注释，目的是为了说明该问题的进展情况和指出进一步阅读的参考文献。但限于篇幅，这些增补是极少量的，又限于水平，难免挂一漏万。

这本书是我们在几年的教学过程中，几经修改、逐步完成的。在编写过程中，我们得到许多同志的帮助。特别要提到的是新疆大学张福基同志与华中师范学院毛经中同志，他们对本书提供了许多宝贵的修改意见。谨此一并致谢。

限于我们学识浅陋，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编者

目　录

第一章　图与子图

1.1　图与单图

定义：图G是有序三元组$(V(G),E(G),\psi_G)$，其中$V(G)$是**顶点**非空集合，$E(G)$是和$V(G)$不相交的**边集合**，ψ_G则是联系着G中的边和一对无序顶点(可以相同)之间的**关联函数**。若e是G中的一条边，而u和v是G中的顶点，满足$\psi_G(e)=uv$，则称e是**连接**u和v的，u及v和e**相关联**，顶点u和v称为e的**端点**。

定义：**可平面图**。图G若存在一个平面图形，它们的边仅相交于端点，则称G为可平面图。反之称为**非可平面图**。

定义：和一条公共边相关联的两顶点称为**相邻**，和一个公共顶点相关联的两边称为**边相邻**。

定义：具有同一端点的边称为**环**，不同端点的边则称为**杆**。

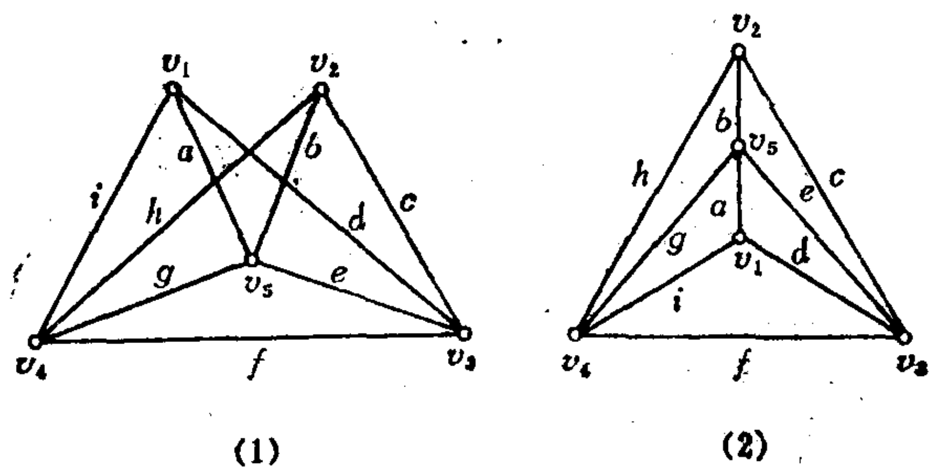
定义：若G是一个无环且不存在两个顶点连接二条杆的图，则称G为**单图**。

定义：$\nu(G)$，简记ν，表示图G的顶点数；$\varepsilon(G)$，简记ε，表示图G的边数。

1.1.1 从日常生活中列举五个例子，在这些例子中，图的概念的导出是自然的。

解：若$V(G)$表中国的城市集合，$E(G)$表城市间的道路集合，若e是u城到v城的道路，ψ_G则代表$\psi_G(e)=uv$这种关联函数全体，所成之图G是中国国内的交通图。类似地，可定义国内的通讯网络图，某城居民的亲属关系图，球赛中的比赛关系图，图书馆的藏书分类图等。

1.1.2 将1.1.2(1)图画成一个不同的图形以说明该图是可平面图。



1.1.2 图

解：其图形如1.1.2(b)图。

1.1.3 若G是单图，证明$\varepsilon\leqslant\binom{v}{2}$。

证：因G是单图，无环且无重边，任二顶点至多有一条边，故$\varepsilon\leqslant\binom{v}{2}$。

1.1.4 有序三元组(V, E, ψ_G)是图，当且仅当存在有序二元组(V, E')，其中E'是V的二元子集簇（这里的二元子集允许两个元是相同的，且子集簇中的子集可以重复）。

证：$\Rightarrow$：$G=(V, E, \psi_G)$是图，则对任意$e\in E$，$\exists u, v\in V$使得$\psi_G(e)=uv$，令$E'=\{(u,v)\mid \psi_G(e)=uv,\ e\in E\}$。

E'是V的二元子集簇。

$\Leftarrow$：设E'是V的二元子集簇，令

$E=\{e=uv\mid(u,\ v)\in E'\}$且对任意$e\in E$作关联函数$\psi_G$：$\psi_G(e)=uv$，这里$u$，$v$满足$uv=e$。显然这样由$(V,E')$确定的三元组$(V,\ E,\ \psi_G)$是图。

（本题说明图也可定义为有序二元组$(V,\ E')$，其中E'是V的二元子集簇，E'中的元素称为图的边。图的这种定义稍加推广即得超图的概念。）

1.1.5 **超图** H是有序二元组$(V(H),\ E(H))$，其中$V(H)$是顶点非空有限集合，$E(H)$是$V(H)$的非空子集簇，且$\bigcup\limits_{E_i\in E(H)} E_i=V(H)$。$E(H)$中的元素$E_i$称为超图的**边**，没有相同边的超图称为**单超图**。

证明：若H是单超图，则$e\leqslant 2^v-1$，其中v，e分别是H的顶点数与边数。

证：因H是单超图，$V(H)$的每一个非空子集至多是$E(H)$的一个元素，而$V(H)$的一切非空子集的数目是：

$$\binom{v}{1}+\binom{v}{2}+\cdots+\binom{v}{v}=2^v-1 \quad 故e\leqslant 2^v-1。$$

1.1.6 若超图的每一条边中的顶点数目均为k，则称为**k—一致超图**。

证明2—一致单超图是无孤立点的单图。

证：2—一致超图的每一边均是二元的，因而由练习[1.1.4]，它是图且每一边均是杆。又因是单超图，故无重边，所以是单图。又依定义，超图的每一顶点至少属于一条边，故此图无孤立点。

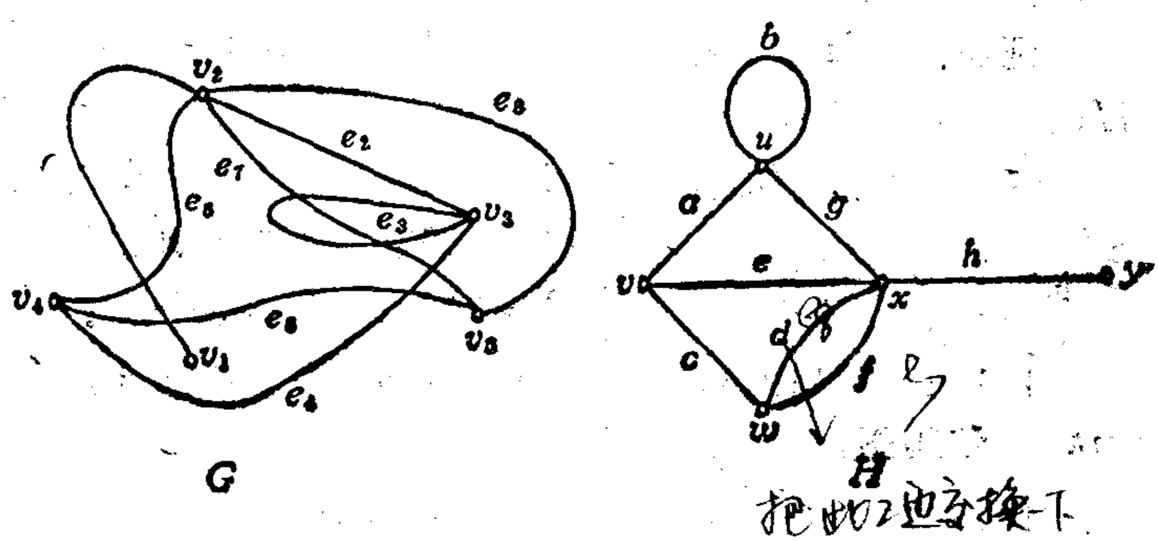
（关于超图理论，可参阅C. Berge著《Graphs and Hypergraphs》(1973)及李慰萱著《图论》第九章(1980))。

1.2 图的同构

定义：若图 $G=(V(G),\ E(G),\ \psi_G)$ 和图 $H=(V(H),\ E(H),\ \psi_H)$ 之间满足 $V(G)=V(H)$，$E(G)=E(H)$ 和 $\psi_G=\psi_H$，则称图 G 和图 H 恒等，记为 $G=H$。

定义：若图 $G=(V(G),\ E(G),\psi_G)$ 和图 $H=(V(H),\ E(H),\ \psi_H)$ 之间存在一个双方单值的映射偶 $(\theta,\ \phi)$，满足 $\theta: V(G)\to V(H)$，及 $\phi: E(G)\to E(H)$，且 $\psi_G=uv \Longleftrightarrow \psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$。则称图 G 和 H **同构**，记为 $G\cong H$。

1.2.1 在图 G 和图 H 间找寻一个同构映射。



1.2.1 图

解：由同构定义，同构映射下对应点关联边的种类(杆或环)和数目应保持不变。若 G,H 间存在另一双方单值映射偶 $(\theta_1,\ \phi_1)$，则 $\theta_1(v_1)=y$，$\theta_1(v_2)=x$，$\theta_1(v_3)=u$。同样由同构定义，两相邻顶点间的关联边数保持不变，从而我们有 $\theta_1(v_4)=v$，$\theta_1(v_5)=w$，所以 $\theta_1\equiv\theta$ （$(\theta,\ \phi)$是已给的映

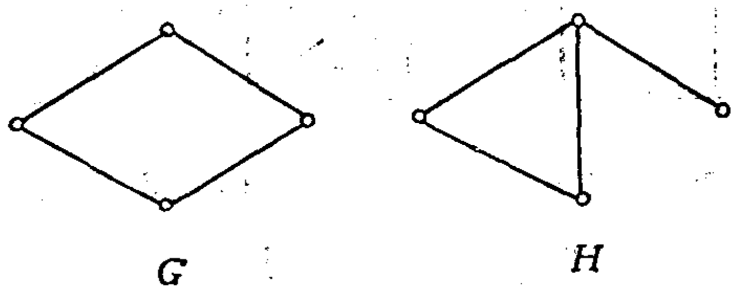
射偶)。进而我们定义ϕ_1如下：除$\phi_1(e_7)=f$，$\phi_1(e_8)=d$与ϕ不同外，其它与ϕ一样。(θ_1, ϕ_1)是异于(θ, ϕ)的一个双方单值映射偶。易由同构定义验证，图G和H之间只有这两个相异的同构映射。

1.2.2 (*a*) 若$G\cong H$，则$\nu(G)=\nu(H)$，$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$。

(*b*) 给出一个例子说明(*a*)的逆不真。

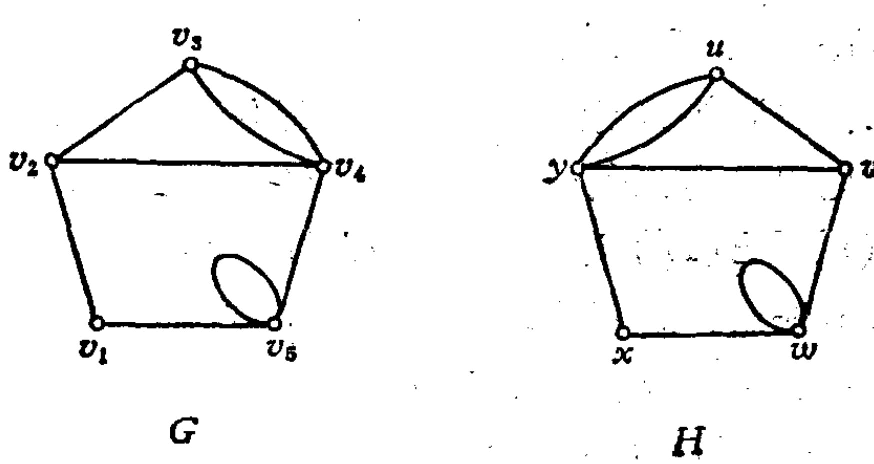
证：(*a*) 由同构定义中的θ与ϕ都是一一对应映射，结论显然。

(*b*) 如图中G和H，显然$\nu(G)=4=\nu(H)$，$\varepsilon(G)=4=\varepsilon(H)$，但$G$和$H$不同构。



1.2.2 (*b*) 图

1.2.3 证明下面的图不同构。

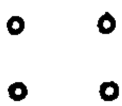
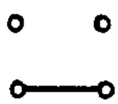
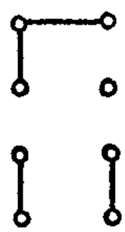
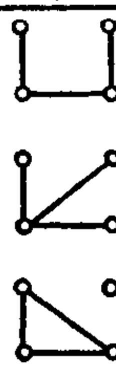
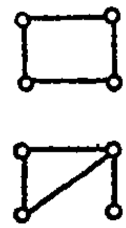
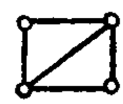


1.2.3 图

证：因为G中有环的顶点v_3与关联重边的顶点v_4相邻。但H不是这样，故G与H不同构。

1.2.4 证明有11个不同构的四个顶点单图。

证：

$\varepsilon=0$	1	2	3	4	5	6
						

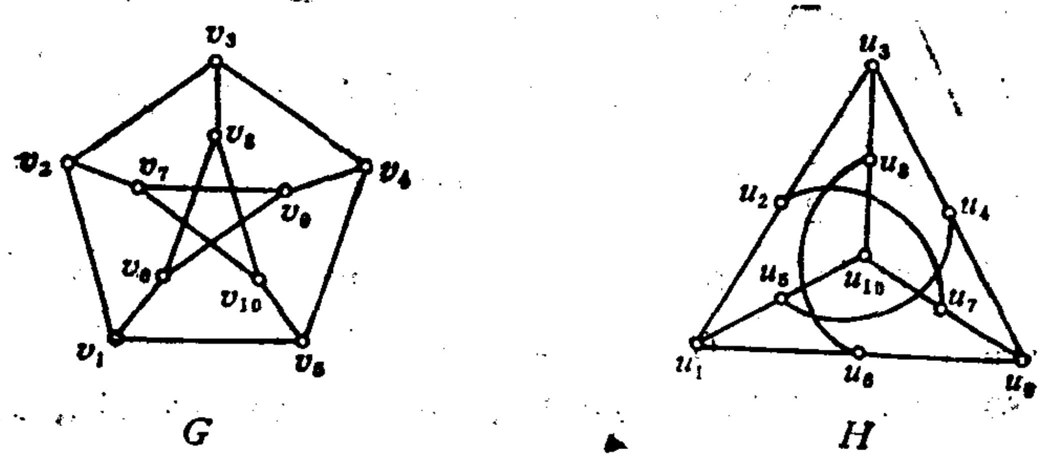
对四个顶点的单图G，由练习1.1.3知$\varepsilon(G)\leqslant\binom{4}{2}=6$，从而上面已穷举了四个顶点的一切可能的单图。其总数恰为11个。

1.2.5 证明：两个单图G和H同构的充要条件是存在双方单值映射θ：$V(G)\to V(H)$，使得$uv\in E(G)$的充要条件是$\theta(u)\theta(v)\in E(H)$。

证：由同构的定义，必要性是显然的。下面证明其充分性，首先由θ定义ϕ：$E(G)\to E(H)$如下：$uv\in E(G)$和$\theta(u)\theta(v)\in E(H)$对应，由于$G$和$H$均是单图，从而$\phi$是双方单值映射，且有$\psi_G(e)=uv$的充要条件为$\psi_H(\psi(e))=\theta(u)\theta(v)$，从而按定义$G\cong H$。

1.2.6 证明下面两图是同构的。

证：将图G和H顶点编号如图，令θ：$\theta(v_i)=u_i$ （i=



1.2.6 图

1, 2, …, 10)，显然 θ 是 $V(G)\to V(H)$ 上是双方单值映射，易直接验证 $v_iv_j\in E(G)$ 的充要条件是 $u_iu_j=\theta(v_i)\theta(v_j)\in E(H)$，从而由练习1.2.5知，$G\cong H$。

1.2.7 设 G 是单图，证明 $\varepsilon=\binom{v}{2}$ 成立的充要条件是 G 为完全图。

证： 其充分性是显然的。现证明其必要性，由于完全图 K_v 的 $\varepsilon(K_v)=\binom{v}{2}$，从而不是完全图且又要满足 $\varepsilon=\binom{v}{2}$ 的图 G，必包含多重边或环，但这又与 G 是单图的假定矛盾。故 G 是完全图。

1.2.8 证明：(a) $\varepsilon(K_{m,n})=mn$；

(b) 若 G 是二部的单图，则 $\varepsilon\leqslant v^2/4$。

证： (a) 显然。

(b) 若 G 的一部分是 m 个顶点，则 $\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(K_{v-m,m})=(v-m)\cdot m=vm-m^2=v^2/4-(v/2-m)^2\leqslant v^2/4$。

1.2.9 **k-部图**是其顶点集合能划分成 k 个子集合，且没有一条边其两端点都在同一子集合中的图；**完全k-部图**是一个 k- 部单图，且它的不在同一子集中的每对顶点均存在边相

连。几个顶点的完全 m-部图，若其中每一部为$[n/m]$个或为$\{n/m\}$个顶点时，记为 $T_{m,n}$。证明：(a)$\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$，其中 $k=[n/m]$；

(b) 如果 G是 n 个顶点的完全 m-部图，则 $\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{m,n})$，且只有在 $G\cong T_{m,n}$ 时等号成立。

证：(a) 因为令$n=mk+r$，$0\leqslant r<m$时，则由$T_{m,n}$定义有

$\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n}{2}-r\binom{k+1}{2}-(m-r)\binom{k}{2}$。用 $r=n-mk$ 代入化简整理即得结论。

(b) 设完全 m-部图G 的m 个部分的顶点数分别为：n_1，n_2，…，n_m；若G不同构$T_{m,n}$，则存在 $n_i-n_j>1$；考虑如下的完全 m-部图G'，它的m部分的顶点数分别为：n_1，n_2，…，n_i-1，…，n_j+1，…，n_m。由于 $\varepsilon(G)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(n-n_k)n_k$，$\varepsilon(G')=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\ \neq i,j}}^{m}(n-n_k)n_k+\frac{1}{2}(n-n_i+1)(n_i-1)+\frac{1}{2}(n-n_j-1)(n_j+1)=\varepsilon(G)+(n_i-n_j)-1>\varepsilon(G)$。若 $G'\cong T_{m,n}$则(b) 结论已成立，若G'不同构 $T_{m,n}$，则上述过程可继续进行，直到对一切 i，j，$|n_i-n_j|\leqslant 1$ 为止，这时所得的图恰为$T_{m,n}$，注意到在这过程中产生的新图的边数在逐渐增大，直至 $\varepsilon(T_{m,n})$为止，故(b) 成立。

1.2.10 k-方体图是其顶点为 0 与 1 的有序 k元组，当且仅当它们的一个坐标不相同时，此两个顶点相连以边。证明k-方体图是有2^k个顶点$k2^{k-1}$条边的2-部图。

证：按定义k–方体图中顶点与分量取值0和1的k维向量一一对应；而后者恰为2^k个，从而k–方体图有2^k个顶点。另外在这k维向量中，固定$k-1$个坐标后，恰恰在k–方体中，对应两个顶点，且这两顶点按定义应连以一条边，故k–方体有$C\binom{k}{k-1}2^{k-1}=k2^{k-1}$条边。最后我们按每个顶点的坐标和的奇偶性，将$k$–方体图的顶点分成两部分，显然由$k$–方体图边的定义，每一部分中的顶点相互没有边相连。故k–方体图是2–部图。

1.2.11 (*a*)单图G的**补图**G^c是顶点集为$V(G)$的单图，两个顶点在G^c中相邻的充要条件是它们在G中不相邻。K_n^c，$K_{m,n}^c$是怎样的图？

(*b*) 如果单图G满足$G\cong G^c$，则称G为**自补**的。证明：若G是自补的，则$\nu(G)\equiv 0$或$1(\bmod\ 4)$。

证：(*a*) K_n^c为几个顶点的空图。$K_{m,n}^c$则为K_m和K_n的并。

(*b*) 由G^c定义，我们有$\varepsilon(G)+\varepsilon(G^c)=\varepsilon(K_\nu)=\binom{\nu}{2}=\nu(\nu-1)/2$，由于$G\cong G^c$，从而$\varepsilon(G)=\varepsilon(G^c)$，所以$\varepsilon(G)=\nu(\nu-1)/4$为整数，又因为$\nu$，$\nu-1$间有一为奇数，从而只能$\nu\equiv 0$，$1(\bmod\ 4)$。

1.2.12 图的**自同构**是图到自身的一个同构。

(*a*) 用练习1.2.5证明：单图G的自同构可以看成是在$V(G)$上保持相邻性的一个置换，且这种置换的集合在通常置换的乘法运算下构成群$\Gamma(G)$(称为G的**自同构群**)。

(*b*) 求$\Gamma(K_n)$和$\Gamma(K_{m,n})$。

(*c*) 求一个自同构群为唯一么元的非平凡单图。

(*d*) 证明对于任意单图G有$\Gamma(G)=\Gamma(G^c)$。