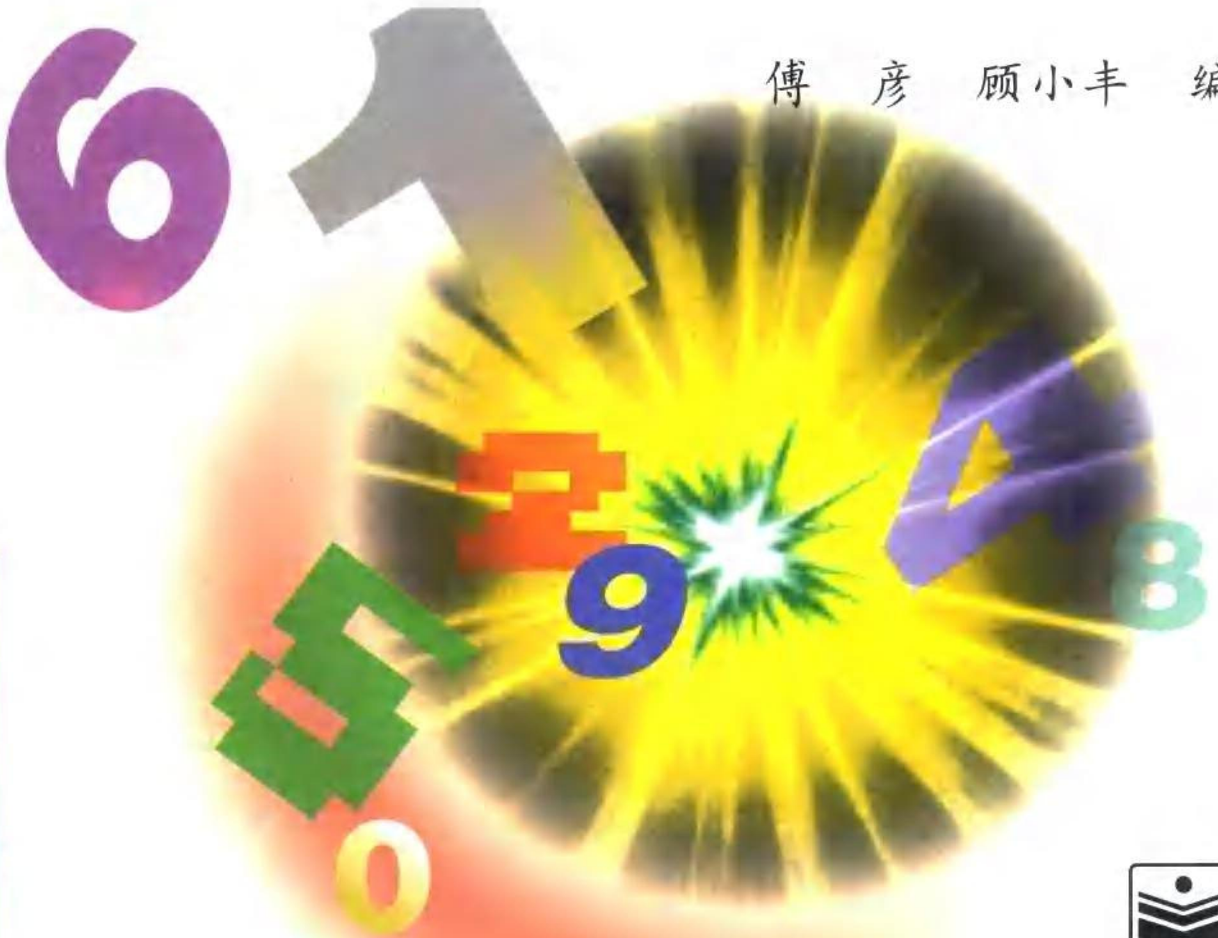
高等学校教材

离散数学及其应用



傅 彦 顾小丰 编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL:http://www.phei.co.cn

高 等 学 校 教 材

离散数学及其应用

傅 彦 顾小丰 编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书对离散数学的四大部分——数理逻辑，集合论初步及其二元关系，图论初步，代数系统与布尔代数的有关概念、定理及其证明方法进行了阐述。全书共分五章：集合论初步、数理逻辑、二元关系、图论初步、代数系统与布尔代数。其特点在于除了强化基本概念的描述外，还特别着重于阐述有关离散数学的证明方法及离散数学在计算机中的应用，并给予了大量的例子和应用实例，并着重强调几部分之间的关系。介绍时以工科学生易懂及够用为原则，重点突出。另外为方便读者自学，同时出版了"离散数学及其应用习题解析"一书，供读者作为本书的辅导读物。

本书可作为工科的本科、专科、自学等学生的必修课教材，特别适合计算机专业的科技人员及学生使用。

丛 书 名：高等学校教材
书　　名：离散数学及其应用
编　　者：傅 彦　顾小丰
责任编辑：张凤鹏
特约编辑：袁 英
印 刷 者：民族出版社印刷厂
出版发行：电子工业出版社出版、发行　URL:http://www.phei.co.cn
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036　发行部电话：68214070
经　　销：各地新华书店经销
开　　本：787×1092 1/16　印张：18.5　字数：473.6千字
版　　次：1997年6月第1版　1997年6月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-3954-0 / TP·1719
定　　价：22.00元

前　言

离散数学是现代科学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程。从数学的角度出发，数学本身分为连续数学和离散数学。最早出现的数学实际上是一种离散型的数学，即是以离散的观点来研究数学，并描述现实社会中的各种情况。随着微积分的出现，对整个数学的研究完全以一种崭新的方式来进行，即是以连续的观点来研究数学的，由此而形成了一种新的数学——连续数学，这种连续数学在数学界一直统治了几百年之久，到目前为止已基本趋于完善。直到最近的几十年间，随着现代科学的不断发展，特别是计算机科学的兴起，离散数学才又重新找到了自己原有的位置。特别是在最近的十几年间，越发体现了离散数学的重要性。从目前的发展趋势来看，已经超过了连续数学在现代应用科学中的作用。

离散数学作为数学的一个分支，其研究的对象是各种各样的离散量的结构及其离散量之间的关系，并且一般是有限个或者可数个元素。同时在整个离散数学的讨论中，也非常重视“能行性”问题的研究，即要解决一个问题，首先要证明此问题的解的存在性，但是仅仅解决存在性是不够的，还需要找出得到此问题解的步骤来，而且其步骤是有限的、有规则的，这与连续数学中的讨论方式完全相违背。离散数学由多门数学分支组成，每一个分支基本上可以看成是一门独立的学科，它们从不同的角度出发，研究各种离散量之间数与形的关系。同时这些分支也并非相互独立，而是有着密切的联系，可以说，离散数学是一门综合的数学学科。它充分地描述了计算机科学离散性的特点，使其有幸成为计算机科学有力的数学工具。目前，离散数学与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、数字逻辑理论、算法分析、逻辑程序设计、系统结构、容错诊断、机器定理证明、人工智能等课程有着紧密的联系。因此，为了适应现代计算机科学的发展，作者根据多年讲授《离散数学》的教学经验，编写了一套工科院校计算机专业适用的《离散数学及其应用》和《离散数学及其应用习题解析》教程，目的在于帮助读者进入离散数学的殿堂。

在编写本书的过程中，侧重于就若干重要的内容介绍它的概念和独特的方法，内容以工科学生“够用”为限，突出重点；在内容阐述时力求做到结构严谨，通俗易懂；推演时务求详尽；大部分概念都用例子加以说明；强化基本概念的描述，注重基本理论的证明方法，目的在于启发读者的思维；淡化大量繁琐的、含有特殊技巧的、不带有普遍意义的理论证明；针对离散数学多样性的特点，本书在适当的地方，对同一个问题给出了不同的解法，对同一个概念给出了各种不同的描述方法和不同的定义方法，希望能起到举一反三的作用；在本书的每一章的最后，给出了大量计算机科学的应用实例。为了方便读者自学配有《离散数学及其应用习题解析》。

学数学就要做数学，时间不富裕的读者可只做书中的习题，如果有时间，读者应把书中未完成的例子和未证明的定理以及习题全部做完，这样就有了坚实的基础，并且可提高自己的理解能力，使得自己对各种定理的内涵有更深的理解。

通过学习此书，使读者既学到应有的知识，又感到学习的愉快，不枯燥、不繁琐、易学易懂。使读者感到此书既是理论性较强的学科，又是和计算机紧密相关的学科，而非纯粹的

数学课。同时，通过学习此书，能培养读者的抽象思维能力和严格的逻辑推理能力，学到一种证明问题的方法（而有关“问题证明的方法”正是工科学生欠缺的能力），掌握离散数学在计算机中的应用。

本书主要分四大部分介绍。集合论作为全书的基础单独作为一章来介绍。第一、二、三章由电子科技大学的傅彦撰写，第四、五章由电子科技大学的顾小丰撰写。本书是以 80 学时为限编写的，书中带“*”的内容可以不讲。全书各章节的审定都是经过两人共同讨论、商定的。在编写本书的过程中，要特别感谢电子科技大学的刘乃琦教授和吴跃教授，他们给作者以极大的帮助，提出了许多宝贵的意见，在此向他们深表谢意。

本书的主要内容曾在电子科技大学作过多次讲授，但是限于作者的水平，错误和疏漏在所难免。希望使用本书的教师和读者不吝指正。

作　者

1996 年 8 月

目　　录

第一章 集 合 论

集合论是现代各科数学的基础,它的起源可以追溯到16世纪末期。在1876～1883年这一时期,由著名的数学家康托尔(Georg Cantor)发表了一系列有关集合论的文章,奠定了集合论的坚实基础。目前,集合论的概念已深入到现代科学的各个方面,成为表达各种严谨科学概念的必不可少的"数学语言"。

然而早期的集合论主要是对分析数学中的"数集"或几何学中的"点集"等一些抽象的元素进行研究,集合的元素真正成为包罗万象的对象,应当说是从"计算机革命"开始,其相应的各种数字、符号、图像、语言等各种信息,它们都可以作为"数据"(Data),这些"数据"即是集合的元素,从而构成各种类型的集合。因此,集合论在程序语言、数据结构、开关理论、形式语言、编译原理、数据库与知识库、人工智能、信息检索、CAD、CAI、CADE等各个领域中,得到了广泛的应用。集合论的原理与方法已经成为计算机工作者不可缺少的数学技术。

§1.1 集合及其表示

一、集合的概念

在数学中,常常不是讨论处于孤立状态下的各个个体,而是将这些个体联合在一起来进行讨论。我们对于"在一定范围内讨论的对象组成的整体"给予一个名字,叫**集合**(Set),其中的对象称为这个集合的"**成员**"或"**元素**"(Element)。通俗地讲,所谓集合,就是某些客体的一个确定的表或汇总。根据所给的属性,我们总能判断任一个事物是否属于某个集合,而不会含糊不清。

例 1.1-1 (1)教室里的桌椅。

(2)英文字母表中的所有字母。

(3)图书馆的藏书。

(4)自然数的全体。 (N)

(5)直线上的点。

(6)所有的有理数。 (Q)

(7)所有的整数。 (I)

(8)所有的实数。 (R)

(9)所有的复数。 (C)

(10)所有的偶数。 (E)

(11)所有的奇数。 (O)

(12)所有的素数。 (P)

(13)所有C语言中的标记符。

(14)某单位的所有职员。

上面所举的种种例子都是集合。通常用带(不带)标号的大写字母A、B、C、……,A_1、B_1、

C_1、……X、Y、Z、……表示集合，用带（不带）标号的小写字母 a、b、c、……a_1、b_1、c_1、……x、y、z……表示集合的元素或成员。

二、集合的表示法

集合是由它包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，有许多方法。

（一）枚举法

此方法就是将集合中的元素全部列出来（或者只列出一部分元素，而其余部分可以从前后关系中很明显的知道）。

例 1.1-2 （1）$A=\{a,b,c,d\}$。

（2）$N=\{0,1,2,3,\cdots\cdots\}$。

（3）$B=\{a,b,c,\cdots\cdots x,y,z\}$。

上述方法实际上是一种显示表示法，其优点在于具有透明性，但是此表示法在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时受到了一定的局限，而且，从计算机的角度看，显示法是一种“静态”表示法，如果一下子将这么多的“数据”输入到计算机中去，那将占据大量的“内存”，为此，引进另一种“动态”表示法。

（二）隐式法（叙述法）

用一集合之元素所具有的共同性质来刻画这个集合，其突出优点是原则上不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性。

例 1.1-3 $S_1=\{x|x$ 是正偶数 $\}$；

$S_2=\{x|(x\in I)$ 并且 $(x>0)\}$。

其中竖杠“|”前面的 x 代表集合 S_1、S_2 中的任意元素，竖杠后面所写的一句话代表 x 具有的性质。

与元素 x 有关的性质，通常可简单地记为 $P(x)$，它表示“x 具有性质 P”。

例 1.1-4 $S_1=\{x|P(x)\}$。

其中：$P(x)$表示 x 具有某种性质 P。

一般来说，这种集合的元素很多或是无穷。

除了上述两种主要的表示法以外，集合还有如下的三种表示方法。

（三）递归指定集合

通过计算规则定义集合中的元素。

例 1.1-5 设 $a_0=1,a_1=1,a_{i+1}=a_i+a_{i-1}(i\geqslant1)$，于是：

$S=\{a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots\}=\{a_k|k\geqslant0\}$。

（四）巴科斯范式 BNF(Backus Normal Form)表示法

BNF 常常用来定义高级程序设计语言的标识符或表达式集合。

例 1.1-6 在 PASCAL 语言中，标识符集定义如下：

〈Letter〉∷=〈Letter〉{〈Letter or Digit〉}；

〈Letter or Digit〉∷=〈Letter〉|〈Digit〉。

(五)文氏图解法(Venn)

文氏图解是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解,一般用平面上的圆形或方形表示一个集合。如集合 A 如图 1. 1-1 所示。

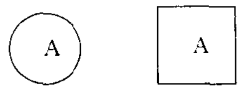


图 1. 1-1

§1.2 集合与元素的关系

属于关系是集合论中最重要的关系。而元素、集合等概念又是集合论中最重要的概念,当我们应用集合论的方法去解决实际问题时,我们必须明确如下实事。

一、集合中的元素是确定的

在集合中,凡是相同的元素,均认为是同一个元素,并可将相同的元素合并成一个元素,即是说,这里所谈的“元素”都是“确定的”,能够明确加以“区分的”对象。为此,我们认为集合中的元素都是不同的并且是无序的。

例 1. 2-1 集合 $A=\{a,b,c,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,$C=\{c,b,a\}$都是一样的。

二、外延性原理

集合中的元素一旦确定,这一集合便完全确定,即两个集合 A 与 B 相等,当且仅当它们有相同的元素,记为 $A=B$,否则,A 与 B 不相等,记为 $A\neq B$。

例 1. 2-2 设 $E=\{x\mid(x\in I)$并且$(x^2-3x+2=0)\}$;

$F=\{2,1\}$;

$G=\{1,2,2,1,6/3\}$。

则有 $E=F=G$。

三、集合与元素的关系

元素与集合之间的“属于关系”也是“非常明确”的。对某个集合 A 和元素 a 来说,a 或者属于集合 A,或者不属于集合 A,两者必居其一。我们将语句“a 是集合 A 的元素或 a 属于 A”记为:

$$\boldsymbol{a\in A}。$$

而语句“a 不是 A 的元素或 a 不属于 A”记为:

$$\boldsymbol{a\notin A}。$$

对于界限不分明或含糊不清的情况,绝对不容许存在。不清晰的对象构成的集合是属于模糊论的研究范筹(Fuzzy Set Theroy),本书不予研究。

例 1. 2-3 在一个很僻静的孤岛上,住着一些人家,岛上只有一位理发师,该理发师专给那些并且只给那些自己不刮脸的人刮脸。那么,谁给这位理发师刮脸?

解： 设 $C=\{x|x$ 是不给自己刮脸的人$\}$，b 为这位理发师。

(1)如 $b\in C$，则 b 为不给自己刮脸的人。另一方面，由题意知，b 只给集合 C 中的人刮脸。所以 b 要给 b 刮脸，即 $b\notin C$。

(2)如 $b\notin C$，则 b 给自己刮脸。另一方面，据题意可知，理发师只给自己不刮脸的人刮脸。所以，b 是不给自己刮脸的人，即 $b\in C$。

无论(1)和(2)，都有 $b\in C$ 和 $b\notin C$ 同时成立。

上述情况称为罗素悖论，这种情况不属于我们讨论的范畴。

四、基数(Power)

一个集合 A 的元素数目，叫做集合 A 的基数，记作 $|A|$。显然，能够确切计数的集合，称为有限集合，该有限集合的基数为有限值。反之，称为无限集合。无限集合也有基数，只是这个基数不是有限数而已。

例 1.2-4 $A=\{a,b,\{e,f\}\}$；
$B=\{a,\{a,\{a,b\}\}\}$。
则 $|A|=3$，$|B|=2$。

§1.3 几种特殊集合

一、全集

在任何一个集合论的应用中，所研究集合的元素总是属于某个固定的大集合，它被称为**全集**或**论集**(Universal)，用 **U** 或 **E** 表示。用文氏图描述时，常被表示为如图 1.3-1。

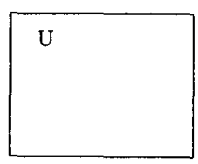


图 1.3-1

例 1.3-1 (1)在平面几何上，全集是由平面上全体点组成。
(2)在人口研究中，全集是由世界上的所有人组成。

由此可见，任何一个全集，都是限制在某一个范围内来定义的。

性质 1.3-1 全集只能是相对唯一的，而非绝对唯一的。

二、空集

没有元素的集合叫**空集**(Empty Set)，常用 Φ 表示。

由于空集无任何元素，所以 $|\Phi|=0$。但 $|\{\Phi\}|=1$，此时，$\{\Phi\}$ 中有一个元素为 Φ。

例 1.3-2 设 $S=\{x|x$ 是正整数并且 $x^2=3\}$。则在 S 中实际上找不到任何一个 x 既是正整数，又满足 $x^2=3$。所以 S 中无任何元素，即 S 为空集，所以 $S=\Phi$。

性质 1.3-2 空集是唯一的。

证明 设 S 和 T 是任意两个空集，则 S 和 T 恰巧具有相同的元素，即一个元素都没有。根据外延性原理，有 $S=T$。所以空集一定是唯一的。证毕

（说明：证明唯一性，常采用如下方法十分凑效：利用反证法，假设不唯一，导致与条件矛盾或导致“假设”相同。）

三、子集

对集合进行研究时，一个集合是否包含在另一个集合中，无论在理论上或实践中常常是一件很重要的事情。为此，我们给出如下定义：

定义 1.3-1 设有集合 A 与 B，若 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**(Subset)。记为：

$$\boldsymbol{A\subseteq B}(\text{或 } \boldsymbol{B\supseteq A})。$$

读作：B 包含 A（或者 A 包含于 B 中），称“$\subseteq$”或“$\supseteq$”为**包含关系**(Inclusion Relation)。如在此基础上又有 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 是 B 的**真子集**(Proper Subset)。记为：

$$\boldsymbol{A\subset B}(\text{或 } \boldsymbol{B\supset A})。$$

读作：B 真包含 A（或者 A 真包含于 B 中），称“$\subset$”或“$\supset$”为**真包含关系**(Properly Inclusion Relation)。如果 A 不是 B 的子集，记为：

$$\boldsymbol{A\not\subseteq B}。$$

例 1.3-3 设A＝{1,3,4,5,8,9}；

B＝{1,2,3,5,7}；

C＝{1,5}；

D＝{1,2,3,5,7}。

则 $C\subset A, C\subset B, C\subset D, B\subseteq D, D\subseteq B$。

但 $D\not\subseteq A, B\not\subseteq A, A\not\subseteq B, A\not\subseteq D$。

例 1.3-4 设 N,I,Q,R 分别为如前所述的集合，则有：

$$N\subset I\subset Q\subset R。$$

设 U 是一个全集，A 是 U 的一个子集，则用文氏图表示如图 1.3-2。

如 $A\subseteq B$，则对应的文氏图表示如图 1.3-3。

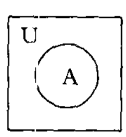


图 1.3-2

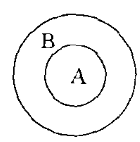


图 1.3-3

根据集合之间的包含关系可以得出如下几个性质：

性质 1.3-3 1. 对任一集合 A，$\Phi\subseteq A$。

2. 对任一集合 A，$A\subseteq A$。

3. 对任意集合 A、B、C，如 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

4. 对任意集合 A、B，则 $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$。

证明 1. 假设 $\Phi\not\subseteq A$，则由定义，至少存在 $x\in\Phi$，但 $x\notin A$。而 Φ 中无任何元素，所以，$x\notin\Phi$，与假设矛盾，即有 $\Phi\subseteq A$。

2. 对任意 $x\in A$，有 $x\in A$，所以 $A\subseteq A$。

3. 对任意 $x\in A$，因 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$；

又 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$，即有 $A\subseteq C$。

4. "$\Rightarrow$"设 $A=B$。

若结论不成立，也即是 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$ 中至少有一不保持，不妨设 $A\subseteq B$ 不保持。

$A\nsubseteq B$ 表明必至少存在一个 x，满足：

$$x\in A，但 x\notin B，$$

这就与 $A=B$ 矛盾。

类似地，对 $B\subseteq A$ 不保持也同样导致与 $A=B$ 矛盾。

所以，$A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 必同时成立。

"$\Leftarrow$"设 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

若结论不成立，则有 $A\neq B$。根据定义必至少存在一个元素 x，满足①或②。

① $x\in A$ 但 $x\notin B$，此时由条件 $A\subseteq B$，有 $x\in B$，与假设矛盾。所以 $A=B$。

② $x\in B$ 但 $x\notin A$，此时由条件 $B\subseteq A$，有 $x\in A$，与假设矛盾。所以 $A=B$。证毕

（说明：(1)反证法在集合论的证明中经常被采用。(2)性质 4 常用来证明两个集合的相等。）

四、幂集

定义 1.3-2 由集合 A 的所有子集（包括空集 Φ 和集合 A 本身）所组成的集合，称为 A 的**幂集**(Power Set)，记为 $\boldsymbol{P}(\mathbf{A})$或者 $\mathbf{2}^{A}$。

$$P(A)=\{x\mid 一切\ x\subseteq A\}。$$

这种以集合为元素构成的集合，常称为集合的集合。该集合又称为**集族**(Family of Set)。对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

例 1.3-5 (1)设 $A=\{a,b\}$，则

$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。

(2)对于空集 Φ，有

$P(\Phi)=\{\Phi\}$；

$P(P(\Phi))=\{\Phi,\{\Phi\}\}$；

$P(P(P(\Phi)))=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$。

很显然，任取集合 A 内的 i 个($0\leqslant i\leqslant|A|$)元素能且仅能得到 A 的一个子集，从而 A 内选取任意 i 个元素的选法有 $C_{|A|}^{i}$种，所以，当 i 取 0 到 $|A|$时，共有子集数

$$\sum_{i=0}^{|A|}C_{|A|}^{i}=2^{|A|}。$$

所以，$|P(A)|=2^{|A|}$。

§1.4 集合的运算

在初等数学中，为了研究"数"的各种性质，我们不能单个地考察它们，而要通过它们之间的各种"运算"，在这些"运算"中，从总体上研究它们的性质，建立原理，提炼方法。为此，我们首先定义集合的基本运算。

定义 1.4-1 设 A、B 是两个集合，则

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A)\text{或}(x \in B)\}$$

仍是一个集合。称它为 A 与 B 的**并集**(Union),称"$\cup$"为**并运算**(Union Operation)。用文氏图可表示如图 1.4-1。

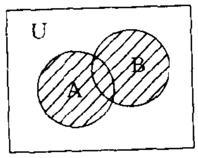


图 1.4-1

图中的阴影部分为 $A \cup B$。

例 1.4-1 $\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$。

$\{a,b,c\} \cup \{a,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$。

$\{a,b,c,d\} \cup \Phi = \{a,b,c,d\}$。

$Q \cup N = Q$。

上述集合的并运算可以说是初等数学中"加法"运算的一个扩充。为此,具有如下重要性质:

性质 1.4-1 1. 幂等律: $A \cup A = A$。

2. 交换律: $A \cup B = B \cup A$。

3. 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$。

4. 恒等律: $A \cup \Phi = A$。

5. 零　律: $A \cup U = U$。　　　(U 是相对于 A 之全集)

定义 1.4-2 设 A,B 是两个集合,则

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A)\text{并且}(x \in B)\}$$

仍是一个集合。称它为 A 与 B 的**交集**(Intersection),称"$\cap$"为**交运算**(Intersection Operation)。用文氏图可表示如图 1.4-2。

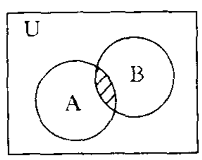


图 1.4-2

图中的阴影部分为 $A \cap B$。

例 1.4-2 $\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5,6\} = \{3,4\}$。

$\{a,b,c\} \cap \{a,d,e\} = \{a\}$。

$\{a,b,c,d\} \cap \Phi = \Phi$。

$Q \cap N = N$。

上述集合的交运算可以说是初等数学中"乘法"运算的一个扩充。为此,具有如下重要性质:

性质 1.4-2 1. 幂等律： $A \cap A = A$。

2. 交换律： $A \cap B = B \cap A$。

3. 结合律： $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$。

4. 恒等律： $A \cap U = A$。　　　（U 是相对于 A 之全集）

5. 零　律： $A \cap \Phi = \Phi$。

性质 1.4-3 集合的并运算与交运算之间满足分配定律：

1. 第一分配定律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

2. 第二分配定律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

定义 1.4-3 设 A, B 是两个集合，则

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \text{并且} (x \notin B)\}$$

仍是一个集合。称它为 A 与 B 的**差集**(Subtraction)，称“$-$”为**差运算**(Subtraction Operation)，$A-B$ 又可叫**相对补集**。用文氏图可表示如图 1.4-3。

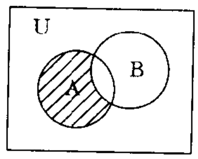


图 1.4-3

图中的阴影部分为 $A-B$。

例 1.4-3 $\{1,2,3,4\} - \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$。

$\{a,b,c\} - \{a,d,e\} = \{b,c\}$。

$\{a,b,c,d\} - \Phi = \{a,b,c,d\}$。

$\Phi - \{a,b,c,d\} = \Phi$。

$\{a,b,c,d\} - \{a,b,c,d\} = \Phi$。

上述集合的差运算有点类似“算术”中的“减法”运算，而不像初等数学中的减法。为此，具有如下重要性质：

性质 1.4-4 1. $A - A = \Phi$。

2. $A - B = A - (A \cap B)$。

3. $(A-B) - C = A - (B \cup C)$。

4. $A \cup (B - A) = A \cup B$。

定义 1.4-4 设 U 是全集，A 是 U 的子集，则

$$\overline{A} = U - A$$

是集合 A 的**补集**(Complement)（也可记为 A'，$\sim A$，A^C等），“$\overline{\quad}$”称为**补运算**(Complement Operation)。用文氏图可表示如图 1.4-4。

图中的阴影部分为 A。

性质 1.4-5 1. 否定律： $\overline{\overline{A}} = A$。

2. DeMorgan 律： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

3. $A - B = A \cap \overline{B}$。

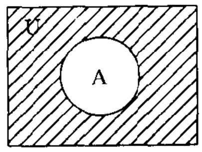


图 1.4-4

上述性质 1.4-1～性质 1.4-5 都可以用文氏图解法加以证明，也可以采用性质 1.3-3 的 4 中描述“相等”的方法加以严格的证明。下面仅以性质 1.4-5 中 2 加以证明，希望能起到示范的作用。

例 1.4-4 对于 U 中任意的集合 A,B，证明：

1. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

2. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

证明 (1)为了证明集合相等，可分别证明：

$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$；

$\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$。

① 对任意 $x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\notin A\cup B$

$\Rightarrow x\notin A$ 并且 $x\notin B$

$\Rightarrow x\in\overline{A}$ 并且 $x\in\overline{B}$

$\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

$\Rightarrow\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$。

② 对任意 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A}$ 并且 $x\in\overline{B}$

$\Rightarrow x\notin A$ 并且 $x\notin B$

$\Rightarrow x\notin A\cup B$

$\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

$\Rightarrow\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$。

由①、②知 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

(2)在$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 中，用 $\overline{A}$,$\overline{B}$ 分别取代 A,B，则有

$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}=A\cap B$

$\Rightarrow\overline{\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}}=\overline{A\cap B}$

$\Rightarrow\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

证毕

§1.5 无限集的基本概念

前面简单地用集合的基数定义了无限集的概念，表面上看，有限集和无限集只是数量上的差别，但是却从“量变”引起了“质变”。从基数的描述，有限集合可以确切地数出元素的个数，但对无限集合，它所含的元素是无限多个，这时怎样去“数”呢？拿最简单的自然数集 N 来说吧，它有多少个元素？N 的幂集 $P(N)$的元素又是多少呢？正是因为无限集合无法用确切的个数来描述，因此，无限集合有许多有限集合所没有的一些特征，而有限集合的一些特征也不能任意

推广到无限集合中去，即使有的能推广，也要作某些意义上的修改。

一、自然数集合与可列集合

自然数是人们十分熟悉的一个概念，人们早就认识了自然数。十进制、数位、零等概念都已从实践中总结出来。学龄前的儿童已学会读1、2、3……，这样一种人们熟悉的知识，在19世纪数学分析的极限理论建立以后，却成了逻辑上还有待完善的问题。因为连续量以极限描述以后，顺序、自然数成为基本概念之一。如何定义自然数，不能再靠纯经验了。20世纪初，集合成为数学的基本概念之后，由冯·诺依曼(Von Neumann, J.)用集合的方式来定义自然数取得了成功。Van Neumann, J. 提出了序列$\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$,……来定义自然数。这可写为：

1. $\Phi\in N$；
2. 若$n\in N$，则$n'=n\cup\{n\}\in N$。

也可记为：

$0=\Phi$；

$1=\{\Phi\}=\{0\}$；

$2=\{\Phi,\{\Phi\}\}=\{0,1\}$；

……

$n=\{0,1,2,\cdots\cdots,n-1\}$。

其中，每一个自然数都是一个集合，其元素的个数(基数)与常用的记法一致。该自然数集合作为无限集合的一个典型代表，并称自然数集合N为**可数集合**(Enumerable Set)，这是因为它的元素可以一个一个地数(列)出来。但无限集合并不止一个，还有很多。为此，下面首先引人等势的概念。

定义 1.5-1 设A,B为两个集合，若在A,B之间存在着一一对应的关系：

$$\psi:A\to B$$

(即集合A中的每一个元素都有集合B中唯一的一个元素与之对应，集合B中的每一个元素都有集合A中的唯一的一个元素与之对应)，则称A与B是**对等的**(Equipotential)，记作：

$$\boldsymbol{A\sim B}$$

也称集合A，B**等势**(Equipotent)。

注意$A\sim B$时，不一定有$A=B$，但反之却一定成立。

定义 1.5-2 凡与自然数集合N等势的集合，称为**可数集合**（**可列集**）(Countable Set)。

例 1.5-1 下列集合都是可数集：

(1) $O^+=\{x|x\in N,\ x\text{是奇数}\}$。

(2) $E^+=\{x|x\in N,\ x\text{是正偶数}\}$。

(3) $P=\{x|x\in N,\ x\text{是素数}\}$。

(4) 整数集合I。

解 (1) 在O^+与N之间存在一一对应的关系ψ：$N\to O^+$如下：

$$\begin{array}{ccccc}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots\cdots n\cdots\cdots\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots\cdots 2n+1\cdots\cdots\end{array}$$

所以O^+也是可数集合。