KAI LU TONG JI JIAO CHENG

概率统计教程

西南财经大学数学教研室编

西南财经大学出版社

川（新）登字017号

责任编辑：曾宪华

封面设计：刘　怡

概　率　统　计　教　程

西南财经大学数学教研室编

西南财经大学出版社出版　　西南财经大学出版社发行

四川省新华书店经销　　郫县印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32　　印张10.75　　字数240千字

1992年1月第一版　　1992年1月第一次印刷

印数：1－2500册

书号：ISBN 7-81017-374-X/G·16

定价：2.72元

前　言

本书是根据198年10月国家教委高等教育司审定的《经济数学基础》的教学大纲和当前财经院校的学生实际而编写的。它既可作为财经院校各专业的本科教材，也可作为自考、电大、函大、夜大等相应专业的教材或参考书。

本书共分两个部分。概率论部分（第1—3章）作为全书的基础为读者提供了必备的理论知识；数理统计部分（第4—7章）介绍了一些常用的统计推断方法。为了顾及各专业的教改需要与各层次学生的具体实际，笔者力求使“*”号内容相互独立，使用时即使跳过“*”号，也不影响本书的自然体系。

本书的特点是：

（1）衔接严谨、脉路清晰；语言简练，深入浅出。既突出了教学大纲所要求的系统性与科学性，又突出了适应教改需要的灵活性与适用性；既体现了内容选取与实际需要相结合，又体现了经济应用与数学理论相结合。

（2）突出了重点，讲清了难点；在有些问题的论述与处理方法上，略有新意。

（3）各章习题，均分两类。（A）类为传统题型，（B）类为概念题型（内含填空、单选与多选）。

参加本书编写工作的（依章节为序）有：史代敏、耿华、杜之韩、刘正根、涂小青、杨仁德、谢明文。

概率论部分，由杜之韩同志担任总纂。

数理统计部分，由谢明文同志担任总纂。

刘正根同志担任了整个编写组的组织、协调和本书的审定工作。

本书定稿后，四川大学数学系敖硕昌教授审阅了全书并提出了一些宝贵的建议，笔者在此深致谢意。

由于时间仓促，水平有限，错漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

1991.6于成都

目　　录

附表

第一章　随机事件与概率

我们所学过的数学，如微积分、线性代数等都是用来研究客观世界中的所谓“确定性现象”的数量规律及其存在形式的。概率论与数理统计这一课程使我们将目光投向客观世界中另一类现象：非确定性现象——随机现象。

何谓随机现象？

从一批含有一、二、三等品和等外品的产品中任意取出一件产品，结果恰取到一件等外品——随机现象；

掷一颗骰子，结果恰出现5点——随机现象；

观察某电话总机8点到8点10分之间接到的呼唤次数，结果恰有8次——随机现象；

……

以上几个例子中的“抽取产品”、“掷一颗骰子”、“观察电话总机接到的呼唤次数”等人们通常称其为**试验**。与这些试验相联系的随机现象有一个共同的特点，就是在做试验之前，不能肯定该随机现象是否会出现，也就是说，它可能出现，也可能不出现。

那么，随机现象就是完全不可捉摸的一类现象吗？回答是否定的。后面我们将看到，只要将上述试验或观察重复进行足够多次，这种随机现象就会呈现出某种规律性，我们称之为统计规律性。

概率论与数理统计就是揭示和研究随机现象的统计规律性的一门数学学科。

在第一章里，我们将介绍概率的一些基本概念，给出计算概率的有关定理与公式，并着重讨论两类最基本的概率模型——古典概型和贝努里概型。

§1.1 随机事件及其运算

一、随机事件

任一随机现象都与某一试验相联系。一个试验，如果满足：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是明确可知道的，并且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果。

则称这样的试验为随机试验（简称试验），记为E。称试验的每一个可能的结果为基本事件。

例1 掷一颗骰子，观察其出现的点数。则此试验的全部可能结果为“出现1点”，“出现2点”，…，“出现6点”。它们都是此试验的基本事件。

有时人们需要考察试验中具有某种特征的基本事件是否发生。例如，考察例1的试验中是否“出现奇数点”或“点数不超过2”。这些亦是试验的某种结果，它们的出现带有随机性，我们称之为随机事件，简称事件。

显然，基本事件也是随机事件。

通常用字母A、B、C等表示事件。例如在例1中令

A= “出现1点”； B= “出现2点”；

C= “出现3点”； D= “出现5点”；

F= “出现奇数点”； G= “点数不超过2”，

则A，B，C，D，F，G都是随机事件，其中前4个为基本事件。

我们将试验中必定要出现的事件称为必然事件，而将试验中必定不会出现的结果称为不可能事件。虽然它们从本质上讲都不是“随机”事件，但为了讨论起来方便，我们把它们视作两种特殊的随机事件，分别记为Ω和ϕ。

例如，在例1的试验中，“点数小于7”是必然事件”，而“点数超过6”则为不可能事件。

二、样本空间

为了对事件进行研究，我们引进样本空间的概念。

称试验E的每一个基本事件为一个样本点，记为ω；称E的全体样本点所构成的集合为样本空间，记作Ω。

例如，在例1中，令ω_i= “出现i点”，则有$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$，或简记为$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例2 已知某批产品中有1，2，3等品及等外品。从中任取一件观察其等级。若记ω_i= “取到i等品”（$i=1, 2, 3$），ω_0= “取到等外品”，则样本空间$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

例3 观察某商场开门半小时后场内到达的顾客数。则有$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$.

例 4 向数轴上投掷一个质点，观察其落点的坐标。由于实数集中任何一个数都是一个样本点，所以

$$\Omega=\{x \mid x\in R\}$$

例 5 一个袋中装有 2 只红球，3只白球。自袋中任取2球，观察其结果。若记红球为a_1，a_2，白球为b_1，b_2，b_3，则样本空间为

$$\Omega=\{(a_1,\ a_2),\ (a_1,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ (a_1,\ b_3),\ (a_2,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ (a_2,\ b_3),\ (b_1,\ b_2),\ (b_1,\ b_3)\ (b_2,\ b_3)\}.$$

象例1，例2，例5那样，样本点个数有限的样本空间，称为有限样本空间。象例3那样，样本点为可列个①的样本空间称为可列样本空间。有限样本空间及可列样本空间统称为离散样本空间。例4则为不可列样本空间。

有了样本空间的概念，事件就是样本空间的某种子集，事件发生当且仅当子集中某个样本点出现。

例如，例1中事件F就是由ω_1、ω_3、ω_5这三个样本点组成的，即有$F=\{1,\ 3,\ 5\}$. 若说F发生了，则意味着出现了1，3，5三个点数中的某一点数；反之，若出现了1，3，5中的某一点数，则F就发生了。

再如，设例3中$A=$“顾客数不足20”。则有$A=\{0,\ 1,\ 2\cdots,\ 19\}$；又令$B=$“顾客数超过100”，则有$B=\{101,\ 102,\ 103,\ \cdots\}$.

---

①数学上将无穷集合分成可列集与不可列集。可列集是指其元素能与自然数建立起一一对应关系的无穷集合。例如，正偶数集$\{2n \mid n\in N^+\}$为可列集，而实数集R则为不可列集。

样本空间Ω是必然事件。因为每次试验必有Ω的某个样本点出现。正由于此，样本空间与必然事件使用了同一个记号Ω。

空集ϕ被规定为不可能事件，因为它不含有任何样本点。

三、事件的关系与运算

对一个其结果呈现出多样性的试验来说，通过对简单事件的了解，去研究与其相关的较复杂的事件是十分重要的。因此，对事件的关系与运算给出恰当的定义就十分必要了。

如前所述，事件既然是样本空间的某种子集，所以不难理解，事件的关系与运算应与集合的关系与运算完全对应。这样，集合论的知识就可以全部用来解释事件的关系与运算。

设Ω为一样本空间，A、B、A_i（$i=1$，2，…）为Ω中的事件，我们作出如下的定义：

1．事件的包含。若事件A发生必然导致事件B发生，则称B包含A或称A含于B，记为$A\subset B$.

从集合的角度看，$A\subset B$就是说，A的每一个样本点都属于B.

例如，例1中有$A\subset F$，$B\subset G$等。

若$A\subset B$，$B\subset A$同时成立，则称A与B相等，记为$A=B$．此时，A、B所含的样本点完全相同。

2．事件的并（或和）。“事件A与B至少有一个发生”是一个事件，称之为事件A与B的并（或和），记为$A\cup B$（或$A+B$）。

不难看出，$A \cup B$是由A与B的所有样本点所组成的集合。

例如，例1中，$F \cup G = \{1, 2, 3, 5\}$．

3．事件的交（或积）。“事件A与B同时发生”是一个事件，称之为事件A与B的交（或积），记为$A \cap B$（或AB）。

显然，$A \cap B$由A与B的全部公共样本点组成。

例如，例1中，$F \cap G = \{1\}$．

并和交的概念可以推广到有限个和可列个事件的情形：

n个事件$A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$的并$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，简记作$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，它表示“事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$至少发生一个”。

n个事件$A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$的交$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，简记作$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，它表示“事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$同时发生”。

类似地，有可列并及可列交，即$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 及 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

4．互斥事件。若事件A与B不同时发生，即$A \cap B = \phi$，则称事件A与B互斥（或互不相容）。

两个互斥事件没有共同的样本点。

例如，例1中，$A \cap B = \phi$，从而A、B互斥。

5．对立（或逆）事件。若事件A与B互斥，且有$A \cup B = \Omega$，则称A，B互为对立事件，记作

$$A = \overline{B} \quad 或 \quad B = \overline{A}$$

A的对立事件$\overline{A}$由Ω中的不含于A的全部样本点组成。

例如，例1中，$\overline{F} = \{2, 4, 6\}$，$\overline{G} = \{3, 4, 5, 6\}$。

6．事件的差。“事件A发生而事件B不发生”是一个事件，称之为事件A与B的差，记为$A - B$。

事件$A-B$由属于A但不属于B的样本点组成。显然有

$$A-B=A\overline{B}$$

例如，例1中，$F-G=\{3,5\}$.

7. 完备事件组. 若事件A_1，A_2，…，A_n两两互斥，且有$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则称$A_1$，$A_2$，…，$A_n$构成一个完备事件组。

事件的关系与运算，可以利用集合论中的文($Venn$)图直观地予以展示(图1.1)。

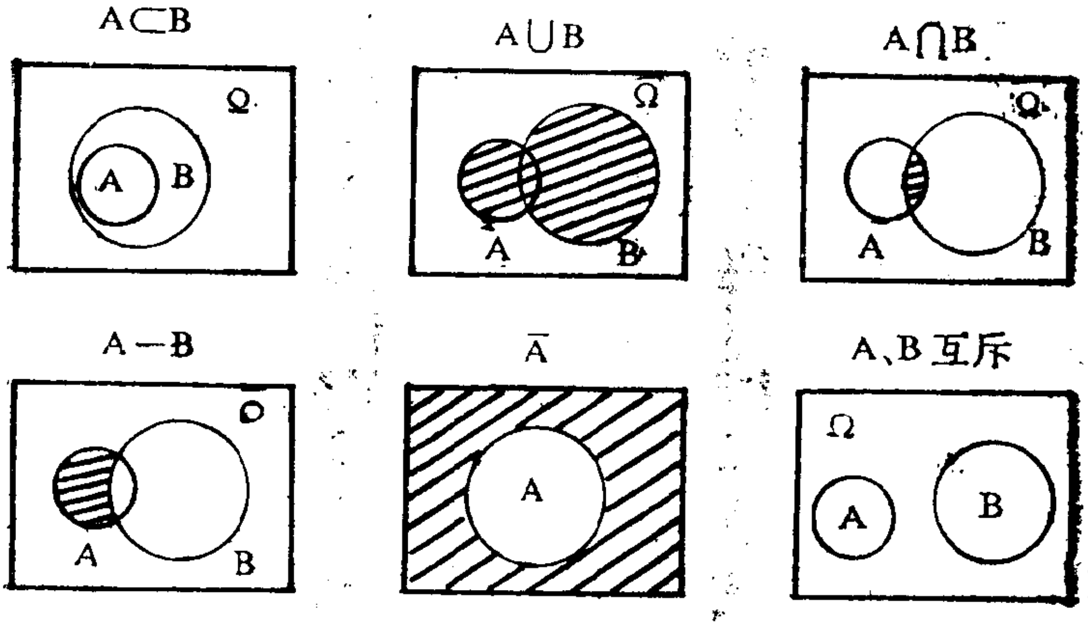

图1.1（$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$\overline{A}$分别为图中阴影部分）

可以验证，事件的运算满足如下规律：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（?）分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4)对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算律可以推广到有限或可列个事件的情形. 例如，在有限个事件的场合，我们有对偶律：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

对这些运算律，读者可用集合论中的方法加以证明。

例 6 随机抽检三件产品。设A表示"三件中至少有一件是废品"，B表示"三件中至少有两件是废品"，C表示"三件都是正品"。问$\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cup C$，$A\cap C$，$A-B$各表示什么事件？

解 $\overline{A}$ = "三件全是正品" $=C$；

$\overline{B}$ = "三件中至多有一件废品"；

$A\cup C=\Omega$(必然事件)；

$A\cap C=\phi$(不可能事件)；

$A-B$ = "三件中恰有一件废品"。

例 7 口袋中有红、白两种颜色的球。作不放回的摸球试验(即摸出的球子不再放回。若每次将摸出的球放回，则称放回的摸球试验)，连摸三次，每次一球。设A_i表示"第i次摸到红球"($i=1, 2, 3$). 试用A_i表示出下列事件：(1)前两次都摸到红球；(2)至少有一次摸到红球；(3)第二次摸到白球；(4)恰有两次摸到红球；(5)后两次至多一次摸到红球。 至多一次

解 (1) A_1A_2；

(2) $A_1\cup A_2\cup A_3$；

(3) $\overline{A}_2$；

(4) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$；

(5) $\overline{A_2A_3}$.

§1.2 概率

概率论是研究随机现象的数量规律性的数学学科。对于一个随机试验，除了要了解和描述其各种可能结果外，还必须对各种结果在每一次试验中发生的可能性大小进行数量化描述。

当我们多次做某一随机试验时，常常会察觉某些事件发生的可能性要大些，而另一些事件发生的可能性要小些。比如，一批产品中若废品很多，则从中任取一件恰取到废品的可能性就比较大，而当废品很少时，取到废品的可能性就较小。这就是说，事件发生的可能性的大小是事件本身所具有的一种确定属性。为了研究事件发生的可能性，就需要用一个数把这种可能性表达出来。表示事件发生可能性大小的数值叫做事件的概率。通常将事件A、B、C，…的概率分别用$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，…表示。

那么，对于一个给定的事件A，其概率$P(A)$到底是一个什么数？怎样求出这个数？在概率论的发展历史上，人们曾对不同的问题，从不同的角度给出了概率的定义和计算概率的方法。在此我们主要介绍概率的统计定义和古典定义。

一、概率的统计定义

随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在大量重复试验中，它的发生却具有统计规律性。

首先说明什么是频数与频率。假设在n次重复试验中，

事件A发生了k次，则k称为事件A发生的频数，且$\frac{k}{n}$称为事件A发生的频率，记作：

$$f_n(A) = \frac{k}{u}$$

在n次试验中，一个事件的频率不是一个固定的常数。这是因为该事件发生的频数k不是一个固定的常数，它可以随机地取0，1，2，…，n中的任何一个值。但是，当试验次数不断增大时，频率却具有稳定性。前人在这方面做了大量的试验。我们看下面的例子。

在相同的条件下，掷一颗质地均匀的骰子25次，50次，100次，250次，500次，1000次，2000次，4000次，统计出现4点的频数和频率，得到如下结果（表1.1）。

表1.1

n	25	50	100	250	500	1000	2000	4000
频　数	2	7	20	48	81	169	334	666
频　率	0.080	0.140	0.200	0.192	0.162	0.169	0.167	0.1665

可以看出，出现4点的频率随着试验次数的增多，明显地在常数$\frac{1}{6}$左右摆动。

频率反映了一个事件发生的频繁程度，从而在一定程度上刻画了这个事件发生的可能性大小。一般地，随着试验次数的逐渐增加，频率总是稳定于某一常数附近。因此，用这个常数作为事件发生的概率是适宜的。