高等数学

下册

余国钧 主编

华中理工大学出版社

高 等 数 学

（下 册）

余国钧 主编

志贤 杨林锡 罗媛芳 刘国钧 编

华中理工大学出版社

高 等 数 学（下册）

余国钧 主编
贺志贤 杨林锡 罗媛芳 刘国钧 编
责任编辑 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：8.75字数：224,000
1988年6月第1版 1988年7月第1次印刷
印数：1—6000
ISBN 7-5609-0171-9/O·22
定价：1.48 元

内 容 提 要

本书是根据现行高中数学课程开设的状况，及工科专业的教学需要而编写的。全书分上、中、下三册出版，下册内容有场论初步；线、面积分；无穷级数；常微分方程等，每章都有习题，书末附有答案及部分习题提示。

本书可作为高等工业学校“高等数学”的教材或参考书，也可供部分理科专业的读者参考。

目　录

第十三章　线、面积分与场论初步

前面已讨论沿一直线段的积分——定积分，沿一平面区域的积分——二重积分，沿一空间区域的积分——三重积分. 本章讨论沿一条曲线的积分——线积分，沿一张曲面的积分——面积分，以及沟通各类积分的三个基本定理——格林定理，斯托克斯定理和奥-高定理. 由于线积分和面积分是研究各种物理场必不可少的数学工具，因此我们把线、面积分的讨论同场论的介绍有机地结合起来，以加深对这些数学概念的直观理解，同时可突出它们的运用.

§13.1　数量场与矢量场

若对于空间或某一部分空间的每一个点，都有某物理量的一个确定的值与之对应，就说在这一空间里确定了该物理量的一个场. 如果这物理量是数量，就称这个场为数量场；如果是矢量就称该场为矢量场. 例如，某地区的气温分布、某大气层的气压分布，分别在该地区、该大气层构成温度场、压力场. 它们都是数量场；空间的风速分布、地区的地磁强度分布，就分别在该空间构成速度场和在该地区构成磁场. 这两个场都是矢量场. 在同一空间里可能同时既确定某数量场又确定某矢量场.

分布在数量场中各点处的数量 u，是场中变点 $Q(x,y,z)$ 的数性函数，即

$$u=f(x,y,z)=f(Q),$$

上式说明可用一个数性函数来表示一个数量场.

分布在矢量场中各点处的矢量 $\boldsymbol{F}$ 是场中变点 $Q(x,y,z)$ 的矢性函数，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(Q)=\boldsymbol{F}(x,y,z)=M(x,y,z)\boldsymbol{i}+N(x,y,z)\boldsymbol{j}+P(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中，数性函数 $M(x,y,z)$，$N(x,y,z)$，$P(x,y,z)$ 是矢量 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量。

某些矢量场与数量场有紧密的联系。例如，从可微函数 $u(Q)$ 确定的数量场 $u=u(Q)$，可以得到一个矢量场

$$\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

即矢量 $\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}u$ 是由数量场 $u=u(Q)$ 产生的——$\boldsymbol{F}$ 是函数$u(Q)$ 的梯度。

一般，若矢量场 $\boldsymbol{F}$ 是某数量场 $u=u(Q)$ 的梯度场：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(Q)=\mathrm{grad}u(Q),$$

则称矢量场 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(Q)$ 为有势场（或称为保守场），而称函数 $u(Q)$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的势函数（在物理学中，为了应用的方便，常将满足条件 $\boldsymbol{F}=-\mathrm{grad}u(Q)$ 的函数 $u(Q)$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的势函数。这与数学中定义的势函数相差一个负号）。例如位于原点而质量为 m 的质点所产生的引力场

$$\boldsymbol{F}=-\frac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3}$$

是有势场，它的势函数是

$$u=\frac{Gm}{r}$$

（其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，x,y,z 是场中所讨论的点的坐标，G 是引力常数）。

因为 $\quad \mathrm{grad}\dfrac{Gm}{r}=-\dfrac{Gm}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=-\dfrac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3}$.

下面借助例题来介绍求势函数的一般方法。

例1 已知矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(2xy+z^2)\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+(2xz+\pi\cos\pi z)\boldsymbol{k}$ 是有势场，求其势函数。

解 依定义，本题归结为求函数 $f(x,y,z)$，使 $\mathrm{grad}f=\boldsymbol{F}$，即使

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}=(2xy+z^2)\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+(2xz+\pi\cos\pi z)\boldsymbol{k}$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+z^2, \tag{13.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2, \tag{13.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2xz+\pi\cos\pi z, \tag{13.3}$$

将(13.1)式两端对 x 积分，得

$$f(x,y,z)=x^2y+xz^2+c(y,z), \tag{13.4}$$

其中 $c(y,z)$ 是可以含有 y,z 的积分常数。将(13.4)式对 y 微分，得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\frac{\partial c(y,z)}{\partial y}. \tag{13.5}$$

比较(13.2)与(13.5)得

$$\frac{\partial c(y,z)}{\partial y}=0,$$

故知 $c(y,z)$ 与 y 无关，将它改记为 $c(z)$，从而有

$$f(x,y,z)=x^2y+xz^2+c(z), \tag{13.6}$$

将(13.6)式对 z 微分，得

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2xz+c'(z). \tag{13.7}$$

比较(13.3)与(13.7)得

$$c'(z)=\pi\cos\pi z,$$

上式对 z 积分

$$c(z)=\sin\pi z+C\,(C\ \text{为任意常数}),$$

故　$f(x,y,z)=x^2y+xz^2+\sin\pi z+C$ 为所求势函数。

§13.2　哈米顿算子·散度、旋度及其物理意义

在矢量分析和场论中，不仅可用哈米顿算子简明地表示有关

概念和公式，而且可使某些复杂的运算在形式上显得十分简便。我们称

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

为哈米顿算子*.

现将它的运算规则和主要性质概述如下：

设数性函数 $u(x,y,z)$ 具有偏导数，矢性函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 的各分量也都有偏导数。我们定义：

1° $$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

显然 $\nabla u = \mathrm{grad}\, u$，即 ∇u 是数性函数 $u = u(x,y,z)$ 的梯度。

2° $$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

我们称 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 为矢性函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的**散度**。

$\boldsymbol{F}$ 的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 也常记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$**。

3° $$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

我们称 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 为矢性函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的**旋度**。

$\boldsymbol{F}$ 的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 也常记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 或 $\mathrm{curl}\boldsymbol{F}$***.

---

* 哈米顿(Hamilton 1805—1865)爱尔兰数学家．∇读作nabla

** div 是英文单词 divergence 的缩写，意为散度。

***rot 是英文单词 rotation 的缩写，意为旋转、旋转强度；curl 是英语中旋度的另一种称呼．

注意：散度$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$是数量，而梯度$\nabla u$和旋度$\nabla \times \boldsymbol{F}$是矢量。

如同梯度一样，散度和旋度都是场论中重要的基本概念。下面将对它们的物理意义作初步介绍，本章最后还要作进一步的讨论。

设流体密度$\rho=1$，其流速场为

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=M(x,y,z)\boldsymbol{i}+N(x,y,z)\boldsymbol{j}+P(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

设$\boldsymbol{v}$在三个坐标轴方向的分速度M、N、P都有一阶连续偏导数。以点$Q(x,y,z)$为中心作边界面平行于坐标面的小长方体(图13-1)，其边长分别为Δx、Δy、Δz。各边长很小时，单位时间内沿x轴方向流入此小长方体的流量近似为

$$M\left(x-\frac{1}{2}\Delta x,\ y,z\right)\Delta y\Delta z$$

流出的流量近似为

$$M\left(x+\frac{1}{2}\Delta x,y,z\right)\Delta y\Delta z$$

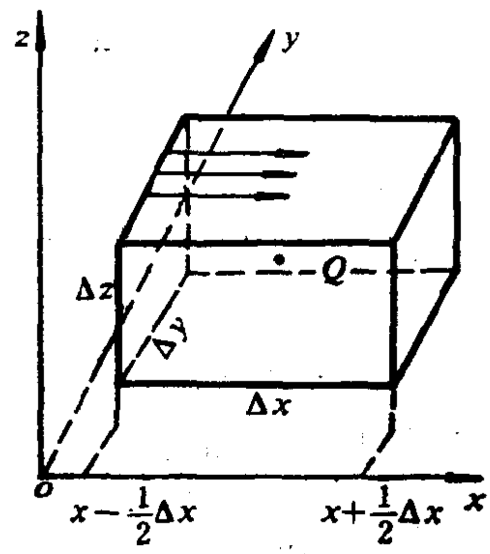

图 13-1

于是单位时间从小长方体内沿x轴方向净流出的流体质量近似为

$$M\left(x+\frac{1}{2}\Delta x,y,z\right)\Delta y\Delta z-M\left(x-\frac{1}{2}\Delta x,y,z\right)\Delta y\Delta z.$$

以小长方体体积除上式得

$$\frac{M\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)-M\left(x-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)}{\Delta x},$$

它表示在Q点附近，平均每单位时间从单位体积内沿x轴方向发散出来的流量。当小长方体的直径趋于零而缩向点$Q(x,y,z)$时，上式的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{M\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)-M\left(x-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\left[M\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)-M(x,y,z)\right]}{\Delta x}\right.$$

$$\left.+\frac{\left[M(x,y,z)-M\left(x-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\right]}{\Delta x}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{M\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)-M(x,y,z)}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}}$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{M\left(x+\frac{-\Delta x}{2},y,z\right)-M(x,y,z)}{2\cdot\frac{-\Delta x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial M(x,y,z)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial M(x,y,z)}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial x}.$$

因此$\frac{\partial M}{\partial x}$表示单位时间内在点$Q(x,y,z)$处从每单位体积沿$x$轴方向发散出去的流量。

同理，$\frac{\partial N}{\partial y}$和$\frac{\partial p}{\partial z}$分别表示单位时间内在点$Q$处从每单位体积沿$y$轴和$z$轴方向发散出去的流量。于是和式

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}(=\mathrm{div}\boldsymbol{v}\text{ 或 }\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

就表示单位时间内在点Q处从每单位体积向四面八方发散出去的流量。它的绝对值的大小代表场$\boldsymbol{v}$在点Q处发散的强度。因此将上面的和式简称为散度。若在点Q处有$\mathrm{div}\boldsymbol{v}>0$，称点$Q$是发出流体的**“源”**；若在点$Q$处有$\mathrm{div}\boldsymbol{v}<0$，称点$Q$是吸收流体的**“汇”**(负源)。如果已知点$Q$是强度为$\mu$的“源”，这就是说在单位时间内由包含点$Q$的充分小体积$V$中所发出的流量（如河床中某处有地下水渗出）近似地等于μV；如果点Q是“汇”，则μ是负值，即在单位时间内流入包含点Q的充分小的体积V内的流量（如河床中某处有微隙使河水渗入地下）近似地等于$|\mu|V$；如果

在点Q处有 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$，称在点$Q$处**无源**；如果场$v$中有$\mathrm{div}\boldsymbol{v}\equiv 0$，则称矢量场$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(Q)$为**无源场**。

例1 设有矢量场$\boldsymbol{F}=x^3yz^2\boldsymbol{i}+x^2y^2z^2\boldsymbol{j}+x^2yz^3\boldsymbol{k}$，问何处无源，又$x\neq 0$，$z\neq 0$时何处有源。

解 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3yz^2)+\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z^2)+\dfrac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)=8x^2yz^2$

因此，当$x=0$或$y=0$或$z=0$时，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，即在三个坐标平面上场无源。

若$x\neq 0$，$z\neq 0$，则当$y>0$时，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}>0$；而当$y<0$时，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}<0$，即在$xz$平面的右边处处是源；在$xz$平面的左边处处是汇。

例2 试证位于原点质量为m的质点所产生的引力场为无源场。

证 由§13.1知引力场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=-\frac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3}=-Gm\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

于是 $$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Gmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{Gm(2x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

同理 $$\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{Gm(2y^2-z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{Gm(2z^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

故 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial M}{\partial x}+\dfrac{\partial N}{\partial y}+\dfrac{\partial P}{\partial z}=0$ 即此引力场为无源场。

设在点Q_0附近流体有旋涡，以常角速度$\boldsymbol{\omega}$旋转（图13-2）。点$Q_0(x_0,y_0,z_0)$附近充分小的一块流体在一瞬间变形很小，可近似地作为刚体处理。于是，其上一点$Q(x,y,z)$处的速度$\boldsymbol{v}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$由两部分组成：一为平移速度$\boldsymbol{v}_0$，一为以角速度$\boldsymbol{\omega}$转动所产生的速度$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \qquad (*)$$

其中$\boldsymbol{v}_0=v_{0x}\boldsymbol{i}+v_{0y}\boldsymbol{j}+v_{0z}\boldsymbol{k}$代表点$Q_0$的速度，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{Q_0Q}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}$。

将(＊)式投影到三个坐标轴上，得

$$M = v_{0x} + \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0)$$

$$N = v_{0y} + \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0)$$

$$P = v_0 z + \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0),$$

分别对这三式求导，可得

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} = 2\omega_x, \quad \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} = 2\omega_y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2\omega_z$$

由此依旋度定义得

$$\mathbf{rot} v = 2\omega.$$

由于角速度 $\boldsymbol{\omega}$是描述旋转的强度和方向的，所以 $\mathbf{rot}\boldsymbol{v}$ 也描述旋涡的强度和方向，旋度也就由此得名。

若在矢量场内某点旋度为0，则称该点无旋，旋度恒为0的矢量场称为**无旋场**。

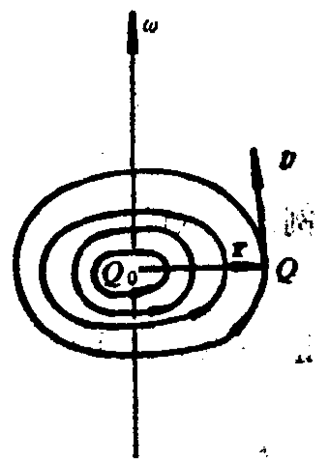

图 13-2

例3 试证位于原点的点电荷所产生的电力场

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{q(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{4\pi\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(= \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon r^3} \right)$$

为无旋场。

证

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial \frac{z}{r^3}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{y}{r^3}}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \frac{x}{r^3}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{z}{r^3}}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\right.$$

$$+\left(\frac{\partial \frac{y}{r^3}}{\partial x}-\frac{\partial \frac{x}{r^3}}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\Bigg]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{-3zy}{r^5}+\frac{3yz}{r^5}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{-3xz}{r^5}+\frac{3zx}{r^5}\right)\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-3yx}{r^5}+\frac{3xy}{r^5}\right)\boldsymbol{k}\right]=0,$$

即电力场 $\boldsymbol{E}$ 为无旋场。

不难验证 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ 又是有势场，因可求出它的势函数为 $u(x,y,z)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$。

下面继续讨论哈米顿算子的性质（梯度、散度、旋度的一些运算法则）。由定义知：

1° ∇ 是一个矢性微分算子，它在计算中具有矢性和微分的双重性质，即可把它看成以微分运算符号 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 为分量的矢量。

2° ∇ 是一个线性算子，即对数性函数 u_1,u_2 及矢性函数 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 和常数 k_1，k_2，有 $\nabla(k_1u_1+k_2u_2)=k_1\nabla u_1+k_2\nabla u_2$；

$$\nabla\cdot(k_1\boldsymbol{F}_1+k_2\boldsymbol{F}_2)=k_1(\nabla\cdot\boldsymbol{F}_1)+k_2(\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2);$$

$$\nabla\times(k_1\boldsymbol{F}_1+k_2\boldsymbol{F}_2)=k_1(\nabla\times\boldsymbol{F}_1)+k_2(\nabla\times\boldsymbol{F}_2).$$

根据哈米顿算子的定义，不难导出下面这些公式其中 u，v 为数性函数，$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 为矢性函数，$\boldsymbol{C}$ 为常矢量。

(1) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{C})=\nabla u\times\boldsymbol{C}$;

(2) $\nabla\times(u\boldsymbol{C})=\nabla u\times\boldsymbol{C}$;

(3) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$;

(4) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{F})=u\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\nabla u\cdot\boldsymbol{F}$;

(5) $\nabla\times(u\boldsymbol{F})=u\nabla\times\boldsymbol{F}+\nabla u\times\boldsymbol{F}$;

(6) $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=\boldsymbol{G}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G})$;

(7) $\nabla\times(\nabla u)=0$（即 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0$）；

(8) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0$（即 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})=0$）。

(注意 ∇ 作用在数性函数 $u(x,y,z)$ 或矢性函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 上时，仅有如下三种方式

$$\nabla u,\ \nabla\cdot\boldsymbol{F},\ \nabla\times\boldsymbol{F}.$$

其它如 $\nabla\boldsymbol{F}$、$\nabla\cdot u$，$\nabla\times u$ 等均无意义。)

这里的公式(7)和(8)在场论中有特别重要的意义。(7)式说明有势场是无旋场。(8)式说明旋度场是无源场。(若 $\boldsymbol{G}=\nabla\times\boldsymbol{F}$ 称矢量场 $\boldsymbol{G}$ 为旋度场，而称矢性函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 为 $\boldsymbol{G}(x,y,z)$ 的矢量势)。

下面我们仅证明公式(7)和(8)，其余的留给读者证明。

设数性函数 $u(x,y,z)$ 和矢性函数 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ 的三个分量都具有二阶连续偏导数。由定义有

$$\nabla\times(\nabla u)=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k}=0,$$

公式(7)得证。

$$\text{由}\quad \nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$