

高等数学

下册 余国钧主编
华中理工大学出版社



高等数学

(下 册)

余国钧 主编

志贤 杨林锡 罗媛芳 刘国钧 编

华中理工大学出版社

高等数学(下册)

余国钧 主编

贺志贤 杨林锡 罗媛芳 刘国钧 编

责任编辑 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本: 850×1168 1/32 印张: 8.75 字数: 224,000

1988年6月第1版 1988年7月第1次印刷

印数: 1—6000

ISBN 7-5609-0171-9/O·22

定价: 1.48 元

内 容 提 要

本书是根据现行高中数学课程开设的状况，及工科专业的教学需要而编写的。全书分上、中、下三册出版，下册内容有场论初步；线、面积分；无穷级数；常微分方程等，每章都有习题，书末附有答案及部分习题提示。

本书可作为高等工业学校“高等数学”的教材或参考书，也可供部分理科专业的读者参考。

目 录

第十三章 线、面积分与场论初步.....	(1)
§13.1 数量场与矢量场.....	(1)
§13.2 哈密顿算子·散度、旋度及其物理意义.....	(3)
习题 13-1	(11)
§13.3 线积分.....	(12)
13.3.1 第一型线积分.....	(12)
13.3.2 第二型线积分.....	(19)
13.3.3 两类线积分的联系	(27)
13.3.4 线积分基本定理	(29)
13.3.5 线积分与路径无关的充要条件.....	(31)
习题 13-2	(38)
§13.4 面积分.....	(42)
13.4.1 第一型面积分.....	(43)
13.4.2 第二型面积分.....	(48)
习题 13-3	(57)
§13.5 几种积分之间的联系.....	(59)
13.5.1 格林公式.....	(60)
13.5.2 斯托克斯公式.....	(64)
13.5.3 奥-高公式	(71)
§13.6 再论散度与旋度.....	(76)
13.6.1 散度与管形场.....	(76)
13.6.2 旋度·调和场.....	(80)
习题 13-4	(85)
第十四章 无穷级数.....	(90)
§14.1 数项级数.....	(90)
14.1.1 无穷级数的定义和性质.....	(90)
习题 14-1	(95)

14.1.2 正项级数	(95)
习题 14-2	(104)
14.1.3 任意项级数	(106)
习题 14-3	(112)
§14.2 广义积分敛散性判别法	(113)
14.2.1 无穷区间上的广义积分的敛散性	(113)
14.2.2 无界函数的广义积分的敛散性判别法	(117)
14.2.3 Γ -函数与 B -函数	(120)
习题 14-4	(126)
§14.3 函数项级数	(127)
14.3.1 函数项级数的一般概念	(127)
14.3.2 函数项级数的一致收敛性	(129)
习题 14-5	(138)
§14.4 幂级数	(138)
14.4.1 幂级数的收敛域	(139)
习题 14-6	(143)
14.4.2 幂级数的性质	(143)
习题 14-7	(147)
14.4.3 函数的幂级数展开式	(148)
14.4.4 幂级数的应用举例	(156)
习题 14-8	(158)
§14.5 傅利叶级数	(159)
14.5.1 函数在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅利叶级数	(160)
14.5.2 $[0, \pi]$ 上的函数展开为正弦级数或余弦级数	(166)
14.5.3 函数在 $[-l, l]$ 上的傅利叶级数	(170)
14.5.4 傅利叶级数的复数形式	(173)
习题 14-9	(176)
第十五章 常微分方程	(178)
§15.1 数学模型的建立与微分方程的基本概念	(178)
15.1.1 几个数学模型	(178)
15.1.2 有关微分方程的基本概念	(181)
习题 15-1	(183)

§15.2	一阶微分方程	(185)
15.2.1	可分离变量方程	(186)
15.2.2	一阶齐次方程	(188)
15.2.3	一阶线性方程	(192)
15.2.4	全微分方程	(196)
习题 15-2		(199)
§15.3	二阶微分方程的几种特殊类型	(203)
15.3.1	$y'' = f(x)$ 型方程	(203)
15.3.2	$y'' = f(x, y')$ 型方程	(204)
15.3.3	$y'' = f(y, y')$ 型方程	(206)
习题 15-3		(208)
§15.4	线性微分方程	(208)
15.4.1	线性微分方程的一般概念	(209)
15.4.2	线性微分方程解的结构	(210)
15.4.3	二阶线性微分方程的解法	(215)
习题 15-4		(220)
§15.5	常系数线性微分方程	(221)
15.5.1	常系数齐次线性方程	(224)
15.5.2	常系数非齐次线性方程	(227)
15.5.3	欧拉方程	(232)
习题 15-5		(235)
§15.6	微分方程的幂级数解法	(237)
15.6.1	一阶方程	(237)
15.6.2	二阶线性方程	(239)
§15.7	微分方程组简介	(244)
15.7.1	一阶微分方程组	(244)
15.7.2	一阶方程组与高阶方程的关系	(247)
15.7.3	常系数线性方程组	(250)
习题 15-6		(253)
习题答案		(255)
习题提示		(269)

第十三章 线、面积分与场论初步

前面已讨论沿一直线段的积分——定积分，沿一平面区域的积分——二重积分，沿一空间区域的积分——三重积分。本章讨论沿一条曲线的积分——线积分，沿一张曲面的积分——面积分，以及沟通各类积分的三个基本定理——格林定理，斯托克斯定理和奥-高定理。由于线积分和面积分是研究各种物理场必不可少的数学工具，因此我们把线、面积分的讨论同场论的介绍有机地结合起来，以加深对这些数学概念的直观理解，同时可突出它们的运用。

§13.1 数量场与矢量场

若对于空间或某一部分空间的每一个点，都有某物理量的一个确定的值与之对应，就说在这一空间里确定了该物理量的一个场。如果这物理量是数量，就称这个场为数量场；如果是矢量就称该场为矢量场。例如，某地区的气温分布、某大气层的气压分布，分别在该地区、该大气层构成温度场、压力场。它们都是数量场；空间的风速分布、地区的地磁强度分布，就分别在该空间构成速度场和在该地区构成磁场。这两个场都是矢量场。在同一空间里可能同时既确定某数量场又确定某矢量场。

分布在数量场中各点处的数量 u ，是场中变点 $Q(x, y, z)$ 的数性函数，即

$$u = f(x, y, z) = f(Q),$$

上式说明可用一个数性函数来表示一个数量场。

分布在矢量场中各点处的矢量 F 是场中变点 $Q(x, y, z)$ 的矢性函数，即

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(Q) = \mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$,
其中, 数性函数 $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ 是矢量 $\mathbf{F}$ 的三个分量.

某些矢量场与数量场有紧密的联系. 例如, 从可微函数 $u(Q)$ 确定的数量场 $u = u(Q)$, 可以得到一个矢量场

$$\mathbf{F} = \text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

即矢量 $\mathbf{F} = \text{grad} u$ 是由数量场 $u = u(Q)$ 产生的—— $\mathbf{F}$ 是函数 $u(Q)$ 的梯度.

一般, 若矢量场 $\mathbf{F}$ 是某数量场 $u = u(Q)$ 的梯度场:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(Q) = \text{grad} u(Q),$$

则称矢量场 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(Q)$ 为有势场(或称为保守场), 而称函数 $u(Q)$ 为 $\mathbf{F}$ 的势函数(在物理学中, 为了应用的方便, 常将满足条件 $\mathbf{F} = -\text{grad} u(Q)$ 的函数 $u(Q)$ 称为 $\mathbf{F}$ 的势函数. 这与数学中定义的势函数相差一个负号). 例如位于原点而质量为 m 的质点所产生的引力场

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm\mathbf{r}}{r^3}$$

是有势场, 它的势函数是

$$u = \frac{Gm}{r}$$

(其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, x, y, z 是场中所讨论的点的坐标, G 是引力常数).

因为 $\text{grad} \frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\frac{Gm\mathbf{r}}{r^3}$.

下面借助例题来介绍求势函数的一般方法.

例1 已知矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (2xz + \pi \cos \pi z)\mathbf{k}$ 是有势场, 求其势函数.

解 依定义, 本题归结为求函数 $f(x, y, z)$, 使 $\text{grad} f = \mathbf{F}$, 即使

$$\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = (2xy + z^2) \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + (2xz + \pi \cos \pi z) \mathbf{k}$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz + \pi \cos \pi z, \quad (13.3)$$

将(13.1)式两端对 x 积分, 得

$$f(x, y, z) = x^2 y + xz^2 + c(y, z), \quad (13.4)$$

其中 $c(y, z)$ 是可以含有 y, z 的积分常数。将(13.4)式对 y 微分, 得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y}. \quad (13.5)$$

比较(13.2)与(13.5)得

$$\frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = 0,$$

故知 $c(y, z)$ 与 y 无关, 将它改记为 $c(z)$, 从而有

$$f(x, y, z) = x^2 y + xz^2 + c(z), \quad (13.6)$$

将(13.6)式对 z 微分, 得

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz + c'(z). \quad (13.7)$$

比较(13.3)与(13.7)得

$$c'(z) = \pi \cos \pi z,$$

上式对 z 积分

$$c(z) = \sin \pi z + C (C \text{ 为任意常数}),$$

故 $f(x, y, z) = x^2 y + xz^2 + \sin \pi z + C$ 为所求势函数。

§13.2 哈密顿算子 · 散度、旋度及其物理意义

在矢量分析和场论中, 不仅可用哈密顿算子简明地表示有关

概念和公式, 而且可使某些复杂的运算在形式上显得十分简便. 我们称

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

为哈密顿算子*.

现将它的运算规则和主要性质概述如下:

设数性函数 $u(x, y, z)$ 具有偏导数, 矢性函数 $F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$ 的各分量也都有偏导数.

我们定义:

$$1^\circ \quad \nabla u = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

显然 $\nabla u = \text{grad} u$, 即 ∇u 是数性函数 $u = u(x, y, z)$ 的梯度.

$$2^\circ \quad \begin{aligned} \nabla \cdot F &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (Mi + Nj + Pk) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned}$$

我们称 $\nabla \cdot F$ 为矢性函数 $F(x, y, z)$ 的散度.

F 的散度 $\nabla \cdot F$ 也常记为 $\text{div} F^{**}$.

$$3^\circ \quad \begin{aligned} \nabla \times F &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (Mi + Nj + Pk) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) i \\ &\quad + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) k. \end{aligned}$$

我们称 $\nabla \times F$ 为矢性函数 $F(x, y, z)$ 的旋度.

F 的旋度 $\nabla \times F$ 也常记为 $\text{rot} F$ 或 $\text{curl} F^{***}$.

* 哈密顿 (Hamilton 1805—1865) 爱尔兰数学家. ∇ 读作 nabla

** div 是英文单词 divergence 的缩写, 意为散度.

*** rot 是英文单词 rotation 的缩写, 意为旋转、旋转强度; curl 是英语中旋度的另一种称呼.

注意：散度 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 是数量，而梯度 ∇u 和旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 是矢量。

如同梯度一样，散度和旋度都是场论中重要的基本概念。下面将对它们的物理意义作初步介绍，本章最后还要作进一步的讨论。

设流体密度 $\rho = 1$ ，其流速场为

$$\mathbf{v}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

设 $\mathbf{v}$ 在三个坐标轴方向的分速度 M 、 N 、 P 都有一阶连续偏导数。以点 $Q(x, y, z)$ 为中心作界面平行于坐标面的小长方体 (图13-1)，其边长分别为 Δx 、 Δy 、 Δz 。各边长很小时，单位时间内沿 x 轴方向流入此小长方体的流量近似为

$$M\left(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)\Delta y\Delta z$$

流出的流量近似为

$$M\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)\Delta y\Delta z$$

于是单位时间从小长方体内沿 x 轴方向净流出的流体质量近似为

$$M\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)\Delta y\Delta z - M\left(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)\Delta y\Delta z.$$

以小长方体体积除上式得

$$\frac{M\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - M\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x},$$

它表示在 Q 点附近，平均每单位时间从单位体积内沿 x 轴方向发散出来的流量。当小长方体的直径趋于零而缩向点 $Q(x, y, z)$ 时，上式的极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - M\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x}$$

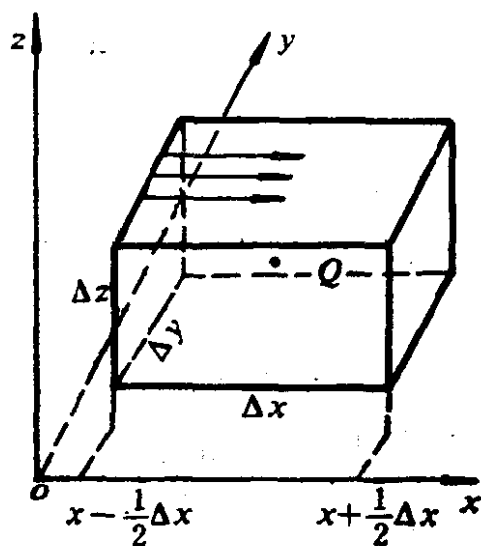


图 13-1

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left[M\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - M(x, y, z) \right]}{\Delta x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left[M(x, y, z) - M\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \right]}{\Delta x} \right\} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - M(x, y, z)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} \\
&\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - M(x, y, z)}{2 \cdot \frac{-\Delta x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial M(x, y, z)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial M(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x}.
\end{aligned}$$

因此 $\frac{\partial M}{\partial x}$ 表示单位时间内在点 $Q(x, y, z)$ 处从每单位体积沿 x 轴方向发散出去的流量。

同理, $\frac{\partial N}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial p}{\partial z}$ 分别表示单位时间内在点 Q 处从每单位体积沿 y 轴和 z 轴方向发散出去的流量。于是和式

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} (= \operatorname{div} \mathbf{v} \text{ 或 } \nabla \cdot \mathbf{v})$$

就表示单位时间内在点 Q 处从每单位体积向四面八方发散出去的流量。它的绝对值的大小代表场 $\mathbf{v}$ 在点 Q 处发散的强度。因此将上面的和式简称为散度。若在点 Q 处有 $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$, 称点 Q 是发出流体的“源”; 若在点 Q 处有 $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$, 称点 Q 是吸收流体的“汇”(负源)。如果已知点 Q 是强度为 μ 的“源”, 这就是说在单位时间内由包含点 Q 的充分小体积 V 中所发出的流量(如河床中某处有地下水渗出)近似地等于 μV ; 如果点 Q 是“汇”, 则 μ 是负值, 即在单位时间内流入包含点 Q 的充分小的体积 V 内的流量(如河床中某处有微隙使河水渗入地下)近似地等于 $|\mu| V$; 如果

在点 Q 处有 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, 称在点 Q 处**无源**; 如果场 $\mathbf{v}$ 中有 $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$, 则称矢量场 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(Q)$ 为**无源场**.

例1 设有矢量场 $\mathbf{F} = x^3yz^2\mathbf{i} + x^2y^2z^2\mathbf{j} + x^2yz^3\mathbf{k}$, 问何处无源, 又 $x \neq 0, z \neq 0$ 时何处有源.

$$\text{解 } \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3) = 8x^2yz^2$$

因此, 当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 $z = 0$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, 即在三个坐标平面上场无源.

若 $x \neq 0, z \neq 0$, 则当 $y > 0$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$; 而当 $y < 0$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$, 即在 xz 平面的右边处处是源; 在 xz 平面的左边处处是汇.

例2 试证位于原点质量为 m 的质点所产生的引力场为**无源场**.

证 由§13.1知引力场

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{Gm\mathbf{r}}{r^3} = -Gm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\text{于是 } \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Gmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{Gm(2x^2 - y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$\text{同理 } \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{Gm(2y^2 - z^2 - x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{Gm(2z^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$\text{故 } \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \text{ 即此引力场为无源场.}$$

设在点 Q_0 附近流体有旋涡, 以常角速度 ω 旋转 (图13-2). 点 $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ 附近充分小的一块流体在一瞬间变形很小, 可近似地作为刚体处理. 于是, 其上一一点 $Q(x, y, z)$ 处的速度 $\mathbf{v} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ 由两部分组成: 一为平移速度 $\mathbf{v}_0$, 一为以角速度 ω 转动所产生的速度 $\omega \times \mathbf{r}$, 即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r} \quad (*)$$

其中 $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} + v_{0z}\mathbf{k}$ 代表点 Q_0 的速度, $\mathbf{r} = \overrightarrow{Q_0Q} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$.

将(*)式投影到三个坐标轴上, 得

$$M = v_{0x} + \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0)$$

$$N = v_{0y} + \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0)$$

$$P = v_{0z} + \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0),$$

分别对这三式求导, 可得

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} = 2\omega_x, \quad \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} = 2\omega_y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2\omega_z$$

由此依旋度定义得

$$\text{rot } v = 2\omega.$$

由于角速度 ω 是描述旋转的强度和方向的, 所以 $\text{rot } v$ 也描述旋涡的强度和方向, 旋度也就由此得名.

若在矢量场内某点旋度为 0, 则称该点无旋, 旋度恒为 0 的矢量场称为无旋场.

例3 试证位于原点的点电荷所产生的电力场

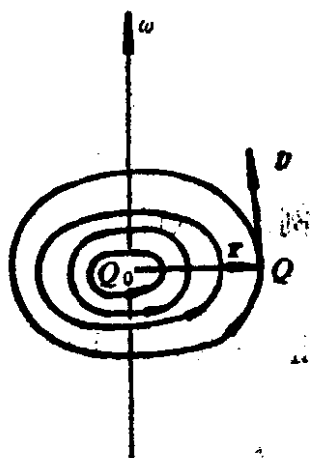


图 13-2

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(= \frac{qr}{4\pi\epsilon r^3} \right)$$

为无旋场.

证

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} \right) \mathbf{j} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \frac{y}{r^3}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{x}{r^3}}{\partial y} \right) \mathbf{k} \Big] \\
& = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\left(\frac{-3zy}{r^5} + \frac{3yz}{r^5} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{-3xz}{r^5} + \frac{3zx}{r^5} \right) \mathbf{j} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{-3yx}{r^5} + \frac{3xy}{r^5} \right) \mathbf{k} \right] = 0,
\end{aligned}$$

即电力场 $\mathbf{E}$ 为无旋场。

不难验证 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 又是有势场，因可求出它的势函数为

$$u(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

下面继续讨论哈密顿算子的性质（梯度、散度、旋度的一些运算法则）。由定义知：

1° ∇ 是一个矢性微分算子，它在计算中具有矢性和微分的双重性质，即可把它看成以微分运算符号 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ 为分量的矢量。

2° ∇ 是一个线性算子，即对数性函数 u_1, u_2 及矢性函数 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ 和常数 k_1, k_2 ，有 $\nabla(k_1 u_1 + k_2 u_2) = k_1 \nabla u_1 + k_2 \nabla u_2$ ；

$$\nabla \cdot (k_1 \mathbf{F}_1 + k_2 \mathbf{F}_2) = k_1 (\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + k_2 (\nabla \cdot \mathbf{F}_2);$$

$$\nabla \times (k_1 \mathbf{F}_1 + k_2 \mathbf{F}_2) = k_1 (\nabla \times \mathbf{F}_1) + k_2 (\nabla \times \mathbf{F}_2).$$

根据哈密顿算子的定义，不难导出下面这些公式 其中 u, v 为数性函数， $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 为矢性函数， $\mathbf{C}$ 为常矢量。

$$(1) \nabla \cdot (u\mathbf{C}) = \nabla u \cdot \mathbf{C};$$

$$(2) \nabla \times (u\mathbf{C}) = \nabla u \times \mathbf{C};$$

$$(3) \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u;$$

$$(4) \nabla \cdot (u\mathbf{F}) = u\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla u \cdot \mathbf{F};$$

$$(5) \nabla \times (u\mathbf{F}) = u\nabla \times \mathbf{F} + \nabla u \times \mathbf{F};$$

$$(6) \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G});$$

$$(7) \nabla \times (\nabla u) = 0 \text{ (即 } \text{rot}(\text{grad} u) = 0);$$

$$(8) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \text{ (即 } \text{div}(\text{rot} \mathbf{F}) = 0).$$

(注意 ∇ 作用在数性函数 $u(x, y, z)$ 或矢性函数 $F(x, y, z)$ 上时, 仅有如下三种方式

$$\nabla u, \nabla \cdot F, \nabla \times F.$$

其它如 ∇F 、 $\nabla \cdot u$ 、 $\nabla \times u$ 等均无意义。)

这里的公式(7)和(8)在场论中有特别重要的意义。(7)式说明有势场是无旋场。(8)式说明旋度场是无源场。(若 $G = \nabla \times F$ 称矢量场 G 为旋度场, 而称矢性函数 $F(x, y, z)$ 为 $G(x, y, z)$ 的矢量势)。

下面我们仅证明公式(7)和(8), 其余的留给读者证明。

设数性函数 $u(x, y, z)$ 和矢性函数 $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ 的三个分量都具有二阶连续偏导数。由定义有

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla u) &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = 0, \end{aligned}$$

公式(7)得证。

$$\begin{aligned} \text{由 } \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times F) &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \end{aligned}$$