高等学校试用教材

高等数学

（化、生、地类专业）

第一册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系合编
上海师范学院数学系

人民教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

（化、生、地类专业）

第一册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系合编
上海师范学院数学系

北京师范大学
藏书
564049

人民教育出版社

本书是根据全国高等学校理科数学教材编写大纲讨论会上所制定的化、生、地类《高等数学》教材编写大纲编写的．全书分一、二、三册出版．第一册包括一元函数微积分，常微分方程和概率统计初步等五章．可供综合大学和师范院校化、生、地类有关专业作试用教材．

高　等　数　学

（化、生、地类专业）

第　一　册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系合编
上海师范学院数学系

人民教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印装

1978年3月第1版　1978年7月第1次印刷
书号 13012・096　　定价 0.83 元

编 者 的 话

本书是根据全国高等学校理科数学教材编写大纲讨论会上所制定的化、生、地类《高等数学》教材编写大纲编写的. 全书分三册出版. 第一册包括一元函数微积分、常微分方程和概率统计初步; 第二册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、富里哀级数与富里哀积分、偏微分方程初步; 第三册内容为矩阵与群论初步等. 其中群论部分是为适应量子化学、晶体化学等有关专业的需要而编写的. 各校可根据实际情况予以取舍.

本书前四章由上海师范学院张方盛同志参照1966年谭鼐、陈开明、邻继福、吴卓人等同志合编的,但未及出版的《高等数学简明教程》上册编写的. 由于时间紧迫, 其中微分、微分方程部分的基本内容,几乎全部的习题以及不少例题等都采用了原稿. 第六、七、八各章由上海师范大学林克伦副教授编写, 第五、九、十各章由中山大学关伟德同志编写, 最后三章由上海师范大学朱福祖副教授编写.

先后参加本书编写与审稿的还有复旦大学吴卓人、北京大学刘婉如、上海师范学院徐锦龙、中山大学周健伟和吉林大学牛凤文等同志.

在全书的编写与审稿过程中,得到上海师范大学程其襄、北京大学冷生明两位教授的指导,特于此致谢.

一九七八年五月

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

引　　言

本书是为适应化学、生物、地理等各专业的需要而编写的，是为了给上述有关专业的同学打下必要的、初步的数学基础.

本书的重点是微积分. 微积分是研究什么的呢？让我们来考察如下的两个典型例子.

例 1　自由落体的瞬时速度

物体受重力作用自由落下，运动开始时$t=0$，到任一时刻t时下落的路程s由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2\quad(g\text{ 是重力加速度})$$

确定. 这个运动不是等速的，物体在下落时间内每一时刻的速度都不同. 今求物体下落到时刻$t=1$(秒)时的“瞬时速度v”.

设落体在1(秒)时的位置为M_0，经过的路程为$s_0=OM_0$(图 0-1)，这里

$$s_0=\frac{1}{2}\cdot g\cdot 1^2=\frac{1}{2}g.$$

再设落体在时刻t的位置为M，经过的路程$s=OM$是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

图　0-1

从第1秒到t秒这段时间内，落体的平均速度$\bar{v}$是

$$\bar{v}=\frac{s-s_0}{t-1}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g\cdot 1^2}{t-1}=\frac{1}{2}g\,\frac{t^2-1}{t-1}=\frac{1}{2}g(t+1).$$

$\bar{v}$刻划了在这段时间内落体的平均快慢程度，但不能刻划$t=1$这一“瞬间”物体下落的快慢程度. 不过，只要t愈接近1，$\bar{v}$就愈接

近这一瞬间的情况．而当 t 无限接近1时，由上式，$\bar{v}$ 无限接近 $\frac{1}{2}g(1+1)=g$．因此，数值 g 就是落体在 $t=1$（秒）时的瞬时速度 v．

"当 t 无限接近1时，$\bar{v}$ 无限接近 g"这一事实，我们可简单地表为"当 $t\to1$ 时，$\bar{v}\to g$"．或者说"g 是 $\bar{v}$ 当 $t\to1$ 时的极限"．因此，瞬时速度就是平均速度的极限．

类似这种极限问题，在自然现象中是非常普遍的．如力学中求物体变速运动的速度、角速度及加速度；物理、化学中求物质的比热、密度及浓度；几何学中求曲线的切线斜率、升降及极值点等等．把这些具体问题概括为一般数学问题，并找出解决它们的简便方法（微分方法），这就是微分学的主要课题．

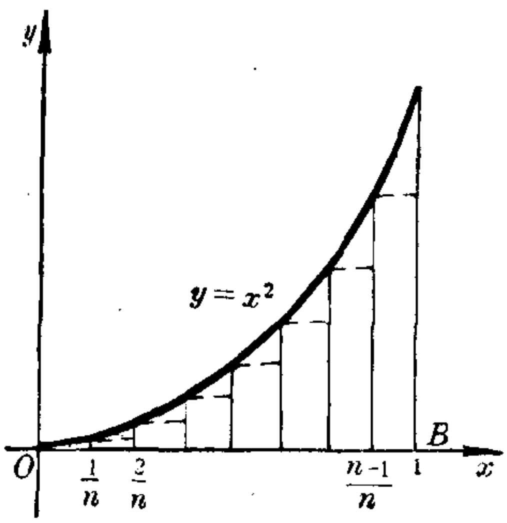

图 0-2

例 2 平面图形的面积

在直角坐标系中计算抛物线 $y=x^2$、x 轴与直线 $x=1$ 围成的平面图形的面积（图 0-2）．

我们用分点 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$（$n$ 为正整数）将 OB 分成 n 等份，以每一等份为下底作出矩形，使矩形的左上角碰到抛物线（见图 0-2）．很明显，这 n 个矩形底边的长都是 $\frac{1}{n}$，它们的另一边的长度分别是 0，$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \cdots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$．这 n 个矩形的面积之和是

$$A_n=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

由上式可知，当 n 无限增大(记为 $n\to\infty$，符号∞叫做无穷大)时，A_n 就无限接近 $\frac{1}{3}$，即当 $n\to\infty$ 时，$A_n\to\frac{1}{3}$. 数值 $\frac{1}{3}$ 就是这个平面图形的面积 A.

采用前面的说法，A 是 A_n 当 $n\to\infty$ 时的极限. 由于 A_n 是 n 个小矩形面积之和. 因此这个极限又称为"和数极限".

和数极限问题，在自然现象中也很普遍. 如力学中求变力做功、质量中心及转动惯量；物理、化学中求非均匀物体的质量、热量及压力；几何学中求曲线长度、面积及体积等等. 把这些具体问题概括为一般数学问题，并找出解决他们的简便方法(积分方法)，这就是积分学的主要课题.

类似于上述问题，在物理、化学中屡见不鲜，单纯用初等数学是不能解决的，要用微积分才能解决. 进一步讲，有些问题单靠微积分也不能奏效. 因而还需引进种种新的概念和新的方法，这就是在下面各章将要逐步展开的内容，如微分方程、概率统计、群论初步等.

学习本书时，要坚持以马列主义、毛泽东思想为指导，坚持理论联系实际的方向，要求正确理解基本概念、基本理论，熟练地掌握运算方法，不断地提高分析问题和解决问题的能力.

"科学有险阻，苦战能过关."我们一定要响应以华主席为首的党中央的伟大号召，发奋学习，又红又专，为在二十世纪内实现农业、工业、国防和科学技术的现代化而作出贡献！

第一章　函数与极限

由于微积分的基本概念离不开函数极限的问题，因此我们先来阐述函数和极限这两个基本概念.

§1.1　函　　数

1. 常量与变量

在物体自由下落的过程中，时间 t 和路程 s 都是不断变化、取不同数值的量. 这种在所考虑的过程中，不断变化、可取不同数值的量，称为变量；而重力加速度 g 在物体下落过程中，总是取同一数值的量. 这种在所考虑的过程中，总取同一数值的量，称为常量. 这些量都是用实数表示的，因此又称变量为变数，常量为常数.

值得注意的是，常量与变量不是一成不变的. 如自由下落过程中的 g 是常量，是因为对某一地点来说的；如果对不同的地点来说，g 的值就不同，因而也就不再是常量.

2. 函数概念

在自然现象中，同时出现的几个变量，通常不是各自孤立地在变化，而是彼此之间有着依赖关系的.

例 1　上述 s 和 t 这两个变量，有下列依赖关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad (0\leqslant t\leqslant t_1).$$

其中 t_1 是物体下落到地面时所用的时间，不等式 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 表示 t 的变化范围.

关系式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给出了 s 依赖于 t 的变化规律. 在 t 的变

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

化过程中，当 t 取某值 t_0 时，按照依赖关系，s 就有一确定值 s_0 与之对应. 这个依赖关系是：把 t_0 平方，再乘以常数 $\frac{1}{2}g$，就得到 s 的对应值 s_0:

$$s_0=\frac{1}{2}gt_0^2.$$

例 2 在引言的例 2 中，A_n 和 n 也是两个变量. 它们之间有关系式：

$$A_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \quad (n\ \text{为正整数}).$$

这里 n 和 A_n 的地位与上例中 t 和 s 的地位是一样的，只不过 n 和 A_n 的依赖关系及 n 的变化范围与上例不同而已.

例 3 当温度一定时，一定质量的气体的容积 V 与压力 P 成反比（波义耳定律）：

$$V=\frac{C}{P}.$$

其中 C 是比例常数.

例 4 气温对时间的依赖关系

某气象站用自动温度记录仪记下某一昼夜气温变化情况. 图 1-1 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图（其中横坐标是时间 t，纵坐标是温度 T），它形象地表示出温度 T 随时间 t 变化而变化的规律：对于某一确定的 t $(0\leqslant t\leqslant 24(\text{时}))$，就有一个确定的 T 与它相对应. 例如当 $t=18$ 时，有 $T=20°\text{C}$.

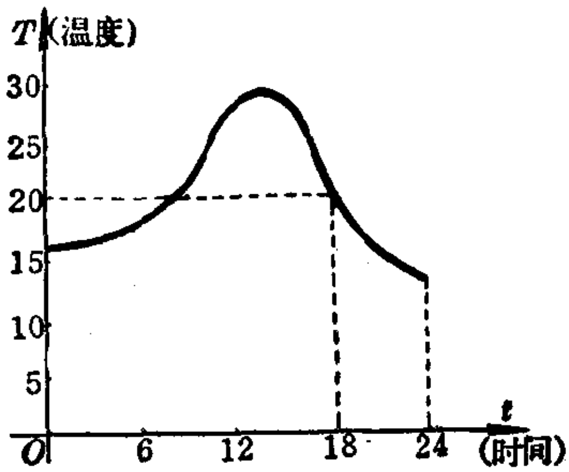

图 1-1

例 5 由实验知道硝酸钾的溶解度随温度而变化，变化情况如下表：

温度(°C)	0	10	20	30	40	50	100
溶解度	13.9	21.2	31.6	45.6	61.3	83.5	245

根据此表，我们可以看出硝酸钾的溶解度和温度的依赖关系：温度每取一个值，就可由上表找出对应的溶解度的值.

这种变量间的相互联系，在自然现象中是非常普遍的，因此有必要从上述例子概括为一般概念来进行研究.

我们抛开每一例子所包含的具体意义以及表达变量之间关系的不同形式，抓住它们的共同本质，就可以概括出函数概念.

定义 在某个过程中，有两个变量 x 和 y，如果通过某一规律，对于 x 的变化范围内的每一个值，y 就有一个确定的值与它相对应. 那末，我们就称 y 是 x 的*函数*，一般记作

$$y=f(x).$$

其中 x 称为*自变量*，y 也称为*因变量*.

容易看出上述五个例子都是符合函数定义的.

在定义中“对于 x 的每一个值，y 有一个确定值与之对应”这句话应予以注意. 它是说，取定一个 x 的值，就确定了一个 y 的值与之对应，并不要求对于不同的 x 值，y 取不同的值. 因此 $y=c$（常数）也不违背函数的定义，即 $y=c$ 是一个函数（如果从“常量是特殊的变量”观点来理解也行）. $y=c$ 的图象是平行于 x 轴的一条直线.

例 1～例 3 是用数学式子表达自变量与因变量之间的对应关系，称为*解析法*；例 4 是用坐标平面上的曲线来表示函数的，称为*图形法*；而例 5 是把一系列的自变量的值与其对应的函数的值列成表格形式，称为*列表法*. 大家熟知的平方、立方根表，三角函数表，对数表等都是用的列表法. 这就是函数的三种表示法. 高等数学所研究的函数，主要是用解析法所表示，但图形法、列表法也不可少.

对于函数记号“$y=f(x)$”应如何正确理解呢？现举例加以说明.

设有函数 $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$. 这里 $f(x)$就表示对自变量 x 作下列运算:

$$(\quad)^3-2(\quad)^2+3(\quad)+1.$$

根据这个运算，就确定了变量 x 与 y 之间的对应规律. 特别当 x 取某一个数,例如 $x=2$ 时,那么对应的 y 值也就是一个确定的数. 确定的方法就是将“2”代替上式中“x”的位置,即

$$f(2)=2^3-2\cdot2^2+3\cdot2+1=7.$$

这里记号“$f(2)$”表示函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 时所对应的函数值,也就是因变量 y 的值,有时也用记号 $y|_{x=2}$ 来表示.

同样, $f(a)$ 表示 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值,这里有

$$\begin{aligned}y|_{x=a}=f(a)&=(a)^3-2(a)^2+3(a)+1\\&=a^3-2a^2+3a+1.\end{aligned}$$

对于给定的函数，使因变量(函数)有确定值的自变量 x 的取值范围，称为函数的定义域; 相应地，因变量 y 的变化范围称为函数的值域. 一个函数主要是由对应规律及函数定义域来确定的(随之函数的值域也确定了). 而函数的定义域一般是由所讨论问题的含义或函数的式子来确定. 如例 1$\left(\text{自由落体公式 } s=\dfrac{1}{2}gt^2\right)$中的 t, 既不能是负数，也不能大于 t_1 (物体下落到地面时所用的时间)，否则对应的因变量就没有意义. 即此函数的定义域为 $0\leqslant t\leqslant t_1$; 相应地，函数的值域为 $0\leqslant s\leqslant s_1\left(\text{其中 } s_1=\dfrac{1}{2}gt_1^2\right)$.

上述的函数 $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$, 其定义域、值域均为全体实数,分别记为 $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$. 又如

(1) 函数 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

当 $x^2-4=0$ 即 $x=\pm2$ 时，函数 y 没有意义. 因此它的定义域是除 $x=\pm2$ 外的一切实数,即

$$-\infty<x<-2,\ -2<x<2\ \text{以及}\ 2<x<+\infty;$$

函数的值域为 $-\infty<y<+\infty$.

(2) 函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}\quad(a<b)$

要使 y 有意义(在实数范围内)，必须 $(x-a)(b-x)\geqslant 0$，从而要求 $x-a\geqslant 0$ 又 $b-x\geqslant 0$ (即 $a\leqslant x\leqslant b$) 成立；或 $x-a\leqslant 0$ 又 $b-x\leqslant 0$(即 $x\leqslant a$ 又 $x\geqslant b$)成立. 但后者不可能(因 $a<b$)，故此函数的定义域为 $a\leqslant x\leqslant b$.

如果我们把数和数轴上的点对应起来，那末限制在两个数 a、b 之间的一切数，就是介于数轴上两点 a、b 之间的全部点. 我们称它为区间，a、b 称为区间的端点. 如果区间包含端点 a、b，就称为闭区间，记为 $[a, b]$ (即 $a\leqslant x\leqslant b$)；如果区间不包含端点 a、b，就称为开区间，记为 (a, b). 因此，用区间的记号来记，(1)的定义域是 $(-\infty, -2)$，$(-2, 2)$ 以及 $(2, +\infty)$；(2)的定义域是 $[a, b]$；而函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad(a<b)$$

的定义域是开区间 (a, b).

自然，当 x 的变化范围为 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 时，就应分别记为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$.

对于稍为复杂的初等函数，同样可求出它的定义域. 如

(3) $y=\lg(|x-a|-b)$;

由 $|x-a|-b>0$，即 $|x-a|>b$，这就要求 $x-a>b$ 或 $x-a<-b$. 故函数 y 的定义域为

$$x>a+b\quad\text{以及}\quad x<a-b.$$

(4) $y=\sqrt{(x-1)(5-x)}+\ln(x-3)(x-4)$.

要求出函数 y 的定义域，即求函数 $\sqrt{(x-1)(5-x)}$ 的定义域与函数 $\ln(x-3)(x-4)$ 的定义域的公共部分，也就是求解下列不

等式组：

$$\begin{cases}(x-1)(5-x)\geqslant 0, & (1)\\ (x-3)(x-4)>0. & (2)\end{cases}$$

由上面已得出 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ $(a<b)$ 的定义域为 $a\leqslant x\leqslant b$，可知(1)式的解为 $1\leqslant x\leqslant 5$；而(2)式的解为 $x<3$ 及 $x>4$（因从 $x-3>0$ 同时 $x-4>0$，可得出 $x>4$；从 $x-3<0$ 同时 $x-4<0$，可得出 $x<3$）．因而函数 y 的定义域为 $1\leqslant x\leqslant 5$ 和 $x<3$ 以及 $x>4$ 的公共部分，即 $1\leqslant x<3$ 以及 $4<x\leqslant 5$（也就是不等式组的解）．

必须注意的是，并不是所有函数的定义域都是区间．例如引言中的例2：$A_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$，即 A_n 是 n 的函数，它的定义域为所有的正整数（$n=1, 2, 3, \cdots$）．

我们称自变量取正整数的函数为*数列*．并用记号

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

来表示，也可简单记为 $\{u_n\}$．

因此我们可以把

$$A_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

写成

$$0,\ \frac{1}{8},\ \frac{5}{27},\ \cdots,\ \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),\ \cdots,$$

也可简单记为 $\left\{\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$．

3．建立函数关系举例

运用数学（特别是高等数学）工具解决实际问题时，通常先要找出问题中变量之间的函数关系，并用解析法把它表示出来，然后进行分析和计算．由于实际问题的多样性，建立函数关系式并没有统一的方法，必须对具体问题作具体分析，分清实际问题中的

常量、变量(自变量、因变量)，并根据问题所给出的条件，运用数学、物理等有关知识，来列出函数解析式.

下面举几个例子来说明如何建立函数关系式.

例 6 有一块边长为 a 的正方形铁皮，在它的四角各剪去相等的一块小正方形(图 1-2)，制成一只无盖盒子，求这盒子的容积与被剪去的小正方形边长之间的函数关系.

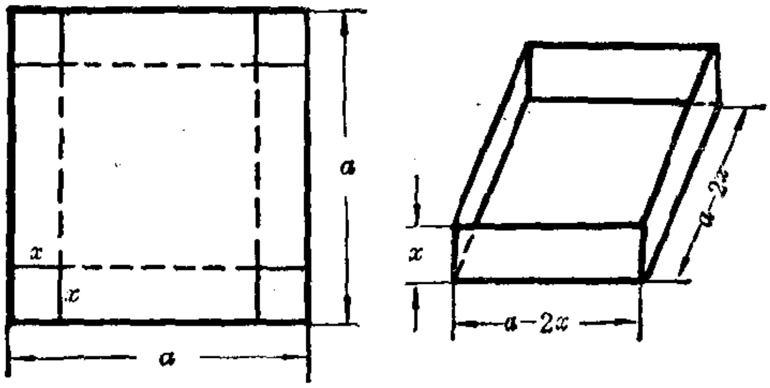

图 1-2

解 设被剪去的小正方形边长为 x，盒子的容积为 V. 这时，盒子的高为 x，底边长为 $a-2x$，盒子的容积等于底面积乘高，即

$$V=x(a-2x)^2 \quad \left(0<x<\frac{a}{2}\right).$$

例 7 已知一个三角波(如图 1-3)，求出 y 与 t 的函数关系.

解 由题设知 $O(0, 0)$，$A(2, 0)$，$B(1, 1)$. 根据直线方程的两点式，得直线 OB 与直线 AB 的方程分别为 $y=t$，$y=-t+2$，故所求的函数解析式为

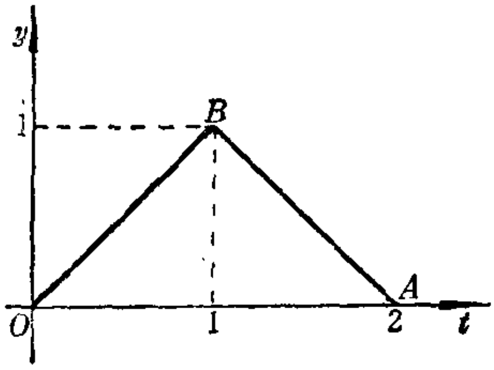

图 1-3

$$y=\begin{cases} t & 0\leqslant t\leqslant 1, \\ -t+2 & 1<t\leqslant 2. \end{cases}$$

例 8 设有温度为 $-10°C$ 的冰一克，加热后变为 $10°C$ 的水，求出它所吸收的热量 q 和温度 t 的函数关系.

解 由物理学可知：

当 t 由 $-10°C$ 增加到接近 $0°C$ 时，$q=0.5t+5$；

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com