全国一般力学与现代数学方法学术会议论文集

现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用

陈滨　主编

科学出版社

全国一般力学与现代数学方法学术会议论文集

现代数学理论与方法
在动力学、振动与控制中的应用

陈 滨 主编

科 学 出 版 社

1 9 9 2

内 容 简 介

本书是全国一般力学与现代数学方法学术会议论文汇编，它从分析力学、力学与振动系统的动力学及稳定性、控制与系统的动力学及稳定性等方面汇集了现代数学理论与方法应用于一般力学领域的部分最新成果。全书共42篇文章，有18篇是国家自然科学基金资助项目。

本书可供高等院校力学系教师和高年级学生、一般力学研究领域中的科研人员参用。

全国一般力学与现代数学方法学术会议论文集

现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用

陈 滨 主编

执行编辑 王家瑶 杨亚政

责任编辑 朴玉芬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100707

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992年9月第一版 开本：787×1092 1/16

1992年9月第一次印刷 印张：19.25

印数：1—1 500 字数：45 000

ISBN 7-03-3378-7/O·610

定价：18.70元

中国力学学会一般力学专业委员会

全国一般力学与现代数学方法学术会议

1992年10月26日—10月29日，南京

编辑委员会

序

本书是中国力学学会一般力学专业委员会于1992年10月召开的一般力学与现代数学方法学术会议的论文集，它是国内一般力学界在一般力学理论和现代数学方法应用方面所做的部分最新成果的汇集。

第四届一般力学专业委员会于1991年5月在北京召开了工作会议。与会的委员们热烈而认真地讨论了一般力学学科发展中一些重要问题，提出了一系列很有价值的意见。委员们认为除了继续强调开拓刚体、柔性体、流体以及控制等耦合的复杂系统的研究课题外，在研究手段上，还应突出地强调重视现代数学方法的应用以及计算机的应用。本次学术会议就是在这个思想指导下召开的，目的是交流一般力学理论特别是现代数学方法应用方面的成果并促进这方面研究工作的深入开展。

当前在动力学，振动，稳定性与控制的研究中，由于研究的本质由局部扩展到全局，由弱非线性扩展到强非线性，由小扰动扩展到有限扰动，传统的理论方法就显得不够了，而引入现代数学的成果和方法则是非常有必要的。其中，应用群的方法、拓扑与微分流形及其代数、几何与分析，动力系统理论等都有着突出的重要性。

本文集共收集了42篇论文，包括介绍有关领域研究概貌的综述报告，以及分析力学、力学与振动系统动力学及稳定性、控制与系统动力学及稳定性等专题研究成果的论文。

中国力学学会办公室、华东工学院对本论文集出版给予了鼎力的支持，谨致谢忱。

陈 滨

1992年8月10日

目 录

综 述

分析动力学

力学与振动系统的动力学及稳定性

控制与系统的动力学及稳定性

CONTENTS

Comprehensive reports

Analytical mechanics

Dynamics and stability on mechanical and vibrational systems

Dynamics and stability on control and dynamic systems

分析力学的数学方法*

刘 端　　梅凤翔　　陈 滨

(北京理工大学, 100081)　　　(北京大学, 100871)

提要 近代数学的方法和概念给分析力学的研究提供了强有力的工具，使传统分析力学的研究发生了根本的变化．本文主要介绍 Lagrange 力学与 Hamilton 力学的微分几何框架；力学系统的对称性与不变量，广义 Hamilton 力学和 Nambu 力学等与现代数学密切相关的问题，以期展示现代数学在经典分析力学中的完美应用．

关键词 分析力学，现代微分几何，辛形式，流形，不变量，对称性，广义 Hamilton，力学

一、引　　言

由于 Lagrange, Hamilton, Jacobi, Poincaré 和 Liapounov 的杰出工作，上个世纪末以来，人们普遍认为：对于有限自由度动力学系统的分析力学理论来说，已经十分完善和完美了．没有什么更本质的东西可以添加和补充了．

近 20 年来，数学家和力学家们发起了一场运动，从而使得这种认为分析力学已近完善的传统观念发生了根本的改变．这场运动的起源可以追溯到 Elie Cartan[1]的工作．但引起这种变化的两个主要因素都是与现代数学的发展息息相关的．第一个因素是由于大范围微分几何的发展，这一发展导致覆盖整个物理，特别是力学的十分几何化和内在的精巧的描述工作，譬如内蕴的分析力学框架，规范理论等．第二个因素则是近年来数学分析，特别是流形上的泛函分析的发展．

一般来说，从 Levi-Civita 的工作[2,3]和其后 Synge 的工作[4]开始，黎曼几何便在分析力学中得以应用，后来便是 Finsler 几何的应用，它是黎曼几何的一种推广[5]．近年来，辛流形[6]以及接触流形[7]几何的发展，提供了一种框架，使人们能够更完全地理解运动自身的概念以及 Hamilton 力学与 Lagrange 力学之间的关系．由于这个原因，这些现代数学理论也找到了新的应用．另一方面，涉及可积系统，变量分离，不同形式的稳定性和分叉等经典问题又重新成为人们关注的焦点．

实际上 Abraham 和 Marsden[8],Arnold[9], Godbillion[10]所撰写的三本非凡的著作参与了现代数学对分析力学的推动运动，并且是这一历程的最好见证．现代数学的发展为分析力学的研究提供了强有力的工具[11-13]．同时，分析力学的发展也大大促进了现代数学的一些分支，譬如近代微分几何的发展．正如 Arnold[9]指出的："事实上，很多数学方法和概念都在经典力学中得到应用，如：微分方程和相流，光滑映射和流形，李群和李代数，辛几何和各态历经理论．许多现代数学理论产生于力学中的问题，只有在后来才达到抽象的公理形式，并且使得它们十分难以理解．"

本文的宗旨便是力求展示现代数学在经典分析力学中的完美应用，主要描述分析力学

* 国家自然科学基金资助课题．

的微分几何框架，力学系统对称性与不变量，Hamilton 力学的推广等最基本的问题。当然，由于现代数学的理论和方法已经渗透到了分析力学的各个方面，我们的文章难免挂一漏万。我们只是希望通过对这些问题的综述能够传达出现代数学对分析力学深刻的影响。

二、Lagrange 力学与 Hamilton 力学的几何框架

这里简要介绍分析力学的内蕴表示，即其现代微分几何框架，以说明力学和抽象数学的某些概念性方法之间的密切关系。内蕴分析力学框架的建立是基于这样的观点的："当力学的许多基本性质用与坐标无关的形式表述时，它们就可以比较清楚地表达和理解。"现代微分几何恰好提供了与近代对坐标无关的表述方式的重视相适应的数学工具。按照近代数学的语言，力学系统的可能的数学模型主要由下面的要素组成：

(a)位形空间 $M=M^n$,一个 n 维微分流形，n 是系统的自由度数目。

(b)在相空间 $P=TM$(或 T^*M)上的辛结构 Ω.

(c)在 TM 上的一个可微函数 T——黎曼动能度量。

$$T=\frac{1}{2}<,>:TM\to R;T\bar{v}=\frac{1}{2}<\bar{v},\bar{v}>,\bar{v}\in TM$$

(d)在 M 上由 1-形式 $\omega=\sum_{i=1}^{N}F_i dx^i$ 给出的一个力场。

2.1 流形与 Lagrange 力学

2.1.1 完整有势系统的 Lagrange 力学

对于完整、有势并且定常的力学系统，假设其位形空间 M 是一个可微流形，TM 是其切丛，并且 $L:TM\to R$是一个可微函数。映射$\bar{\gamma}:R\to M$被称作是具有位形流形M和 Lagrange 函数L的 Lagrange 系统的运动，如果$\bar{\gamma}$是一个泛函

$$\Phi(\dot{\gamma})=\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{\gamma})dt \tag{1}$$

的极值。上式中$\dot{\gamma}$是速度矢量，$\dot{\gamma}\in TM_{\bar{\gamma}(t)}$

对于完整、有势、非定常的力学系统，与定常系统的区别仅在于 Lagrange 函数对时间的依赖性

$$L:TM\times R\to R,\quad L=L(q,\dot{q},t)$$

也即动能与势能均依赖于时间

$$T:TM\times R\to R,\qquad V:M\times R\to R$$

对于完整、有势的 Lagrange 系统(M,L)来说，相应于每一个保持 Lagrange 函数不变的位形流形上的单参数微分同胚群，存在一个运动方程的第一积分[9]。

2.1.2 完整非保守系统 Lagrange 力学

考虑一个n个自由度的完整非保守力学系统μ，其位形空间M是一个n维可微流形。设R为实数（时间）域，则时间位形空间$E=R\times M$的 1-射流形$J^1(E)$就是系统 μ 的增广状态空间[14,15]。

将$t\in R$考虑为E到R的一个函数，设n个 1-形式$\omega^i\in X^*(E)$ $(i=1,\cdots,n)$满足条件：

$$dt\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n \neq 0 \tag{2}$$

那么$\{dt;\omega^i\}$构成了 $\mathcal{X}^*(E)$的一组基。

设$j^1(\gamma):R\to J^1(E)$是截面$\gamma:R\to E$的一阶延伸，$X_{j^1(\gamma)}=j^1(\gamma)*(d/dt)\in-\mathcal{X}(J^1(E))$是一阶延伸的切向量场，则定义$J^1(E)$上的实值函数$\eta^i(i=1,\cdots,n)$为

$$j^1(\gamma)^*\eta^i=j^1(\gamma)^*(X_{j^1(\gamma)}\cdot\omega^i)\quad(\gamma\in\Gamma(E)) \tag{3}$$

易证明，$J^1(E)$上$2n+1$个 1–形式$\{dt;\omega^i;d\eta^i\}$构成了 $\mathcal{X}^*(J^1(E))$的一组基.

引入$J^1(E)$上的接触形式

$$\theta^i=\omega^i-\eta^i dt\quad(i=1,\cdots,n) \tag{4}$$

它们满足接触条件

$$j^1(\gamma)^*\theta^i=0\quad(\gamma\in\Gamma(E)) \tag{5}$$

且称由$\{\theta^i\}$张成的 Pfaff 系统$\beta=\mathrm{span}\{\theta^i|i=1,\cdots,n\}$为$J^1(E)$上的接触系统.

所谓关于函数$F:J^1(E)\to R$的 Cartan 形式是指$J^1(E)$上唯一的一个满足下述条件的 1—形式$\Theta(F)$

$$\text{i)}\quad \Theta(F)-Fdt\in\beta \tag{6}$$

$$\text{ii)}\quad d\Theta(F)\in-\mathcal{X}^*(J^1(E))\wedge\beta \tag{7}$$

从 Lagrange 观点[14]来看，在位形空间M上的一个非保守力学系统是由一组力学量(L,μ)唯一描述的，这里$L:J^1(E)\to R$为系统 μ 的 Lagrange 函数，$\mu\in\beta$ 是系统 μ 的力形式，即存在广义力函数$Q_i:J^1(E)\to R$使得$\mu=Q_i\theta^i$。

设$\Omega(L,\mu)$为完整非保守力学系统$\mu_H=(M,L,\mu)$的动力学 2–形式，即

$$\Omega(L,\mu)=d\Theta(L)+\mu\wedge dt \tag{8}$$

则对于$X_L\in(J^1(E))$，如果

$$X_L\cdot\Omega(L,\mu)=0,\qquad X_L\cdot dt=1 \tag{9}$$

那么便称X_L为μ_H的 Lagrange 向量场。

2.1.3 非完整非保守系统 Lagrange 力学

对于受 r 个一阶非线性非完整约束的动力学系统来说，几何描述比较成功的是 Hermann 框架[4].

设$\{f^\alpha:J^1(E)\to R|\alpha=1,\cdots,r<n\}$是 $J^1(E)$上的一组函数，并且矩阵$[\partial_i f^\alpha]$具有最大秩 r，则称由r个关于函数f^α的 Cartan 形式所张成的 Pfaff 系统

$$P=\mathrm{Span}\{\Theta(f^\alpha)|\alpha=1,\cdots,r\} \tag{10}$$

为由函数组$\{f^\alpha\}$生成的 Cartan 系统。

非完整力学系统记为$\mu=(M,L,\mu,P,)$。其中P称为 μ 的 Четаев 型约束系统。P的生成函数f^α称为 μ 的约束函数。

设$X_L\in\mathcal{X}(J^1(E))$，则$X_L$被称作非完整系统 μ 的 Lagrange 向量场，如果存在 μ 的一个动力学 2–形式$\Omega(L,\mu,P)$，使得

$$X_L \cdot \Omega(L,\mu,P)=0,\ X_L \cdot dt=1,\ X_L \cdot P=0 \tag{11}$$

当然，也可以把 Четаев 型非完整力学系统的 Lagrange 向量场在约束子流形上表示。定义 μ 的约束子流形为

$$N=\{j^1(\gamma)(t)\in J^1(E)|t\in R;\gamma\in\Gamma(E);j^1(\gamma)^* P=0\} \tag{12}$$

这是$J^1(E)$的一个余维$r(r=\dim P)$的子流形。记$i:N\to J^1(E)$为包含映射。再引入 Pfaff 系统$i^* P$的相伴模

$$V(P)=\{X\in -\chi(N)|X\cdot P=0\} \tag{13}$$

若$pr:\chi(N)\to V(P)$为投影映射，则对于$\forall X\in\chi(N)$和$\theta\in -\chi^*(N)$，我们记$\overline{X}=pr(X),\overline{\theta}=pr(\theta)$。

设$\mu=(M,L,\mu,P)$，则称N上的一个 2–形式Ω为 μ 的约束嵌入动力学 2–形式，如果对于任意的$X\in\chi(N)$，

$$X\cdot\overline{\Omega}=X\cdot i^*\Omega(L,\mu) \tag{14}$$

Четаев 型非完整系统$\mu=(M,L,\mu,P)$的约束嵌入 Lagrange 向量场$\overline{X}_L$由

$$\overline{X}_L\cdot\Omega=0;\overline{X}_L\cdot dt=1 \tag{15}$$

完全确定，其中$\overline{\Omega}$是 μ 的约束嵌入动力学 2–形式。

对非完整系统来说，除了 Hermann 框架以外，比较著名的一种几何框架是由 Edelen[6] 给出的，但由其得到的方程是 Vacco 型的。[17]指出了 Edelen 框架的功 1–形式划分和非完整约束的嵌入方面存在的问题。通过对功 1–形式进行重新划分和引入非完整约束的半基 1–形式，将约束嵌入相应的力学系统。这种修正后的几何框架描述的运动便成为 Четаев 型非完整系统的运动。

此外，对于高阶非完整系统的 Lagrange 力学几何框架的研究也取得过一些结果[18,19]。

2.2 辛流形与 Hamilton 力学

2.2.1 完整、定常、有势的 Hamilton 系统

n个自由度的完整、定常、有势的力学系统的相空间是由其位形流形M的余切丛T^*M构成的$2n$维微分流形$P=T^*M$。在每个余切丛上存在着一个不变 1–形式 θ

$$\theta:T^*M\to T^*(T^*M) \tag{16}$$

它是与用来定义它的向量场基无关的，从而是内蕴地且整体地有意义。利用外微分，θ 给出下面的 2—形式

$$\Omega=d\theta,\qquad d\Omega=0 \tag{17}$$

即 Ω 是P上的一个辛结构。根据 Darboux 定理，对$x\in P$中每一点的一个适当的邻域，存在着所谓的辛坐标或正则坐标(p_i,q_i),使得 Ω 有局部表示

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}dp_i\wedge dq_i \tag{18}$$

对(P,Ω)被称作辛流形。令$\omega:P\to T^*P$是P上的一个 1–形式，则方程

$$i_{X_\omega}\Omega=-\omega \tag{19}$$

借助 Ω 赋予 ω 一个唯一的向量场。这里$i_{X_\omega}\Omega$表示 2–形式 Ω 与向量场X_ω的内积. 如果ω(局部)是函数$H:P\to R$的微分，则向量场X_{dH}，或简记为X_H被称作(局部)Hamilton 向量场. 三元组(p,Ω,H)被称作是 Hamilton 系统，X_H满足

$$i_{X_H}\omega=-dH \tag{20}$$

流形上的一个向量场确定一相流，即单参数微分同胚群，易验证，Hamilton 向量场的相流保持辛结构. 辛流形上的 Hamilton 向量场构成一个 Lie 代数，此代数的运算便是 Poisson 括号。

2.2.2 整体、非定常、有势的 Hamilton 系统

一个非定常的 Hamilton 力学系统，可用切触流形$(\bar P,\Omega)$,而不是辛流形作为它的数学模型. 设$(P,\Omega)(P=T^*M)$是一个有辛结构$\Omega=\sum_i dp_i\wedge dq_i$的相空间. 考虑直积$\bar P=P\times R$. $\pi:P\times R\to R,\pi(q,p,t)=(q,p)$表示直积空间中的投影. 取光滑、非定常的 Hamilton 函数$H:P\times R\to R,(q,p,t)\to H(q,p,t)$. 令$\Omega_H=\pi^*\Omega-dH\wedge dt=d\omega_H$(其中$\omega_H=\pi^*\omega-Hdt$)是$\bar P$上的一个 2–形式，它在$P\times R$上的秩是$2n$. 因为对$\forall t\in R$，$\Omega_H$在子流形$\bar P_t=(p,t)$上的限制定义了一个与$(P,\Omega)$微分同胚的辛流形$(\bar P_t,\Omega_H/\bar P_t)$,所以上述结果成立. 考虑由$H_t(q,p)=H(q,p,t)$给出的函数$H_t:P\to R$，于是对$\forall t\in R$，与$H_t$有关的在$\bar P_t$上的 Hamilton 向量场$X_{H_t}$诱导出一个$\bar P$上的向量场$\bar X_H$，在$(q,p,t)$处$\bar X_H$等于矢量$(X_{H_t}(q,p),0)$

2.2.3 完整非保守 Hamilton 系统

考虑完整、定常的 Hamilton 系统，假设T^*M是n维可微流形M的余切丛，自然丛坐标为(q,p), θ 代表正则 1–形式$\theta=p_i dq^i$，$\Omega=d\theta$为T^*M上的自然辛结构. 我们说T^*M上的向量场 Δ 定义了一个非保守的 Hamilton 系统，如果

$$i_\Delta\Omega=-dH+\mu \tag{21}$$

其中函数$H:T^*M\to R$，μ 为非闭的水平 1–形式，即对T^*M上的向量场X，$\mu(X)=0$对任何满足$\pi_*(X)=0$的垂直向量场X成立。这里$\pi:T^*M\to M$是丛投影。在自然丛坐标下，水平 1–形式 μ 可以表示为

$$\mu=Q_i(q,p)dq^i \tag{22}$$

其中Q_i是光滑函数，为非势广义力[20].

2.2.4 非线性非完整 Hamilton 系统

P上的不为零的一个微分 1–形式$\psi:P\to T^*P$被称作P上的一个约束. 我们称P上m个线性独立的 1–形式ψ^k的集合

$$b=\{\psi^1,\cdots,\psi^m\} \tag{23}$$

为P上的一个约束系统.

从几何上来说，在每一点$x\in P$，约束系统b定义了这点的切空间$T(P)X$上的一个$2n-m$维子空间V_x^{2n-m}

$$V_x^{2n-m} =: \{X \in T(P)_x | \psi^k(X) = 0, k = 1,\cdots,m\} \tag{24}$$

将这个结构扩展到整个P上，我们得到一个$2n-m$维的可微分布$V^{2n-m}: x(\in p) \to V_x^{2n-m}$。若存在$P$上的一个子流形$N$，使得对每一点$x \in N$，与分布是相切的，即

$$T(N)_x = V_x^{2n-m} \tag{25}$$

则我们称分布V^{2n-m}是可积的．Frobenius 定理给出了可积的充要条件．

P上的约束系统$b = \{\psi^1,\cdots,\psi^m\}$被称作是非完整的，若由 1-形式$\psi^k$在$P$上定义的分布是不可积的．在局部坐标下，这正是一般的非线性非完整约束．

非完整 Hamilton 系统(T^*M,Ω,H,b)定义的 Hamilton 向量场$\dot{x} \in \chi(T^*M)$,满足

$$i_{\dot{x}}\Omega = -dH + \alpha\,;\psi^k(\dot{x}) = 0,\ k = 1,\cdots,m \tag{26}$$

其中α是水平的，可以表示为

$$\alpha = \alpha_i(p,q)dq^i = \sum_{k=1}^{m} \wedge_k \psi_i^k(p,q)dq^i \tag{27}$$

对于非定常的完整非保守和非完整非保守系统，我们可以用类似完整非定常有势 Hamilton 系统的方法用切触流形加以研究。Weber[21]以不同于常规的方法引入扩展位形流形$M \times R$及其切丛$T^*(M \times R)$来研究非定常力学，这种方法的优点在于$T^*(M \times R)$是偶数维，因此便又是具有自然辛结构

$$\Omega^+ = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i + dp_t \wedge dt \tag{28}$$

的辛流形。

Tulczyjew[22-25]在一系列论文中提出了一种新的几何描述方法，即将完整、定常、有势的力学系统的特性以 Lagrange 子流形的形式来描述．令$P = T^*M$，其中M是系统的位形流形．则TP上的辛结构存在两种微分同胚

$$\left.\begin{aligned} &i_h: TP \to T^*(T^*M) \\ &i_l: TP \to T^*(TM) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

因此，若我们有一个 Lagrange 子流形$L \subset TP$，则得到两个 Lagrange 子流形

$$L_h = i_h(L) \subset T^*(T^*M) \tag{30}$$

$$L_l = i_l(L) \subset T^*(TM) \tag{31}$$

于是，我们得到T^*M上的生成函数 Hamilton 函数和TM上的生成函数 Lagrange 函数．这种几何方法的特点是不仅可以研究一般力学系统，亦可以研究相对论力学系统．并且，对 Hamilton 力学和 Lagrange 力学给出统一的研究方法．Cantrijn[26]将这种方法推广到完整、定常、非保守的力学系统．我们曾将此方法推广到一般非线性非完整、非保守、定常的系统[27]．

总而言之，对完整、定常、保守的力学系统来说，几何描述已经十分完美了．但对于非定常系统，非保守系统，特别是非完整系统，微分几何框架的构造还有许多疑问和有待