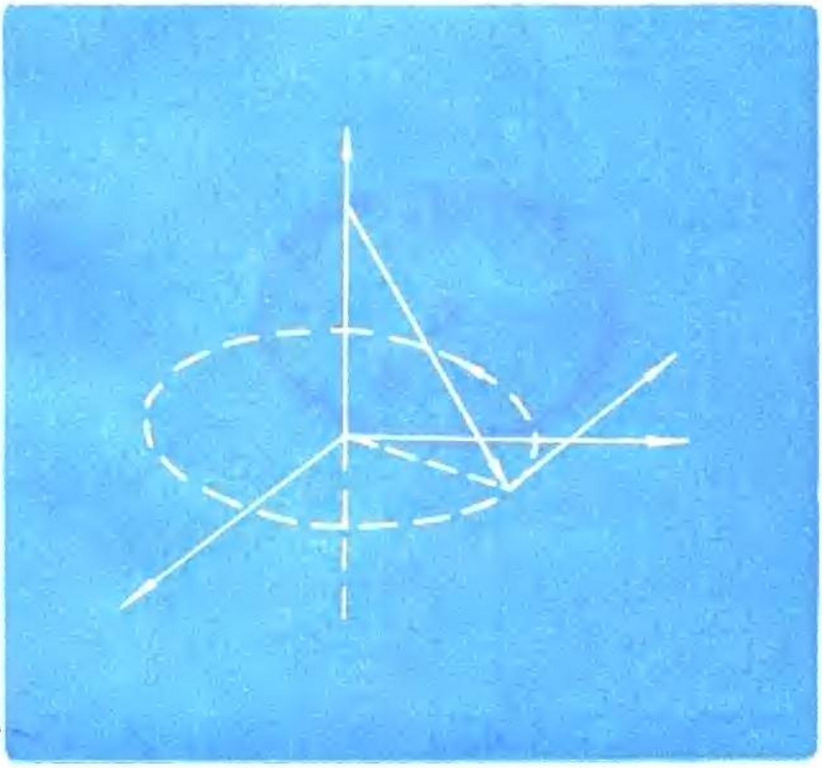
全国高等教育自学考试指导委员会
物理专业委员会建议试用教材

数学物理方法

梁昆淼 编



電子工業出版社

数学物理方法

梁昆淼 编著

電子工業出版社

内 容 提 要

本书是高等教育自学考试物理专业委员会建议试用教材，全书共十章。本书内容翔实、概念清楚易懂、讲解详细，不仅可供自学考试的读者使用，而且可供成人教育以及全日制高校师生及工程技术人员阅读。与此书配套的有《数学物理方法自学指导书》。

数 学 物 理 方 法

梁昆淼　编著

责任编辑　宋玉升

*

电子工业出版社出版(北京市万寿路)

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

山东电子工业印刷厂印刷(淄博市周村)

*

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：13.5625 字数：350千字

1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷

印数：1—3000册　　定价：6.30元

书号：ISBN7-5053-0480-1/O·4

自学高考物理专业委员会

致 读 者

高等教育自学考试物理专业本科阶段设有理论力学、热力学与统计物理学、电动力学、量子力学以及数学物理方法等课程。这些课程理论要求较高，全日制高校的学生学习起来，也是不轻松的。对这些课程，国内已先后出版了许多很好的教科书，但这些教科书都是与系统讲授并辅之以其他辅助教学环节这种教学方式相适应的，对自学不尽合用。自学高考的考生及有志于提高自己物理素养的各方面读者，很切望有一套与现有教材相比有不同特点的、比较适合于自学的理论物理自学教材供他们使用。值得高兴的是，许多高校有经验的教师、专家和许多出版社都热情支持理论物理自学教材的出版工作。课程的自学考试大纲只规定了每门课程的自学和考试的要求，不同的作者根据大纲编写的教材，还能反映作者对课程内容的理解和体会，还有他自己的讲述方式和自己的特色。我们认为，发动社会力量编写和出版符合大纲要求的、不同风格的理论物理自学教材供读者选用，无疑是有益的。电子工业出版社组织的这套《理论物理自学丛书》将是最早出版的一套，《丛书》的内容符合自学考试大纲的要求，并力求适应自学的特点。

物理专业委员会将这套《理论物理自学丛书》作为自学考试“建议试用”教材之一，愿这套自学丛书对自学考试、成人教育，对工程技术人员和全日制高校的教师和学生都有裨益。

全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会

一九八七年四月

《理论物理自学丛书》编委会

理论物理自学丛书

前　言

当前，在全国范围内，学习先进自然科学和先进技术科学的热潮正在高涨。这套《理论物理自学丛书》就是为适应广大读者自学的需要而编写的。

理论物理学不仅是物理学的精华，也是很多自然科学如化学、生物学、天文学和地质学等的理论基础。同时理论物理学又是现代许多技术科学如电子学、材料科学、半导体技术和激光技术等的理论基础。为了学习物理学本身，为了学习有关的自然科学和技术科学，都必须首先掌握一定数量的理论物理学的知识。我们充分认识到当前理论物理学的重要地位，所以我们首先给各界读者提供这套《理论物理自学丛书》。

《理论物理自学丛书》主要是为各界自学读者编写的。它的读者对象有三个方面：第一是需要知识更新的实验物理学工作者和广大物理教师，第二是为了掌握本门学科的现代知识而要求学习理论物理的生物学、化学工作者和技术科学工作者，第三是有志于自学成材的广大青年。这套丛书的取材内容大体上相当于综合性大学物理专业的理论物理课程，包括了全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会颁布的理论物理课程考试大纲的全部内容。《丛书》的编写方法则尽量适应自学的特点。因此我们想，这样一套《丛书》对广大在校学生也可能有所裨益。

《理论物理自学丛书》一共十本，包括理论物理中的四门课程即“理论力学”，“热力学与统计物理学”，“电动力学”和“量子力学”，以及一门数学课程“数学物理方法”，每门课程

有一本课本和一本自学指导书。

每门课程的课本是一本完整的和系统的教材。它的内容大体上与综合性大学或师范院校的相应课程内容相同，属于理科教材的性质。我们说适应其他自然科学和技术科学的需要，主要是向这些方面的读者提供他们所需要的理论物理的基础知识，并不涉及这些学科本身的内容。为适应自学的特点，我们力求把课本写得活泼一些，如概念的讲解比较细致周到，对重点和难点部分给予更多的注意、对学习方法加以一定的引导，附有一定数量的例题和习题，有些重要的预备知识以附录的形式给出等等。我们希望在课本中适当地写进一些通常教材中不写而在讲堂上要讲的内容。

自学指导书则对于课本的自学给予更为具体的指导。如果说课本中应该突出学科的主线，不宜用过多的题外话去打断主要思路的发展的话，那么自学指导书就不受这个限制。在自学指导书中可以对重点和难点内容给以更多的讲解，对自学方法给以更多的指导，可以用思考题等形式讨论一些疑难问题，可以给出更多的例题和习题，对解题的方法和思路给以更多的指导和训练，也可以给出一些学习中需要的补充材料等等。此外，我们还希望自学指导书能适当地具有一定的相对独立性，使利用其他教材作为自学课本的读者，也能从这套自学指导书中得到一定的收获。

学习理论物理学的起点本来应该是学过大学本科物理专业的高等数学和普通物理课程（即力学，分子物理和热学，电磁学、光学和原子物理学）。为适应自学读者的情况，我们把这套《理论物理自学丛书》的起点略为放低一些。我们希望学过工科的高等数学（例如樊映川的书）和工科的普通物理（例如程守洙和江之永的书）的读者也能开始自学这套丛书。为此我们在课本和自学指导书的编写上都作了一些安排，以便使更多的读者能够通过自学掌握理论物理的内容。当然，这也要求读者付出更大的努力和作出一些适当的安排（例如承认某些预备知识中的结论和公式，对课本中的一些内容降低一点要求等等）。

我国实行高等教育自学考试制度，全国高等教育自学考试委员会物理专业委员会已于1984年正式成立，物理专业的考试已经开始，特别是已对具有专科学历的读者已开始本科证书的考试（本丛书中的五门课是这一考试的主要内容）。我们希望自学这套《丛书》的读者踊跃参加单科或系统的考试，取得合格证书。也希望那些具有专科学历的读者和已取得专科合格证书的读者再接再励，接着自学这套丛书，争取取得本科毕业的资格。

祝大家自学成功！

喀兴林

1987年1月

序

“数学物理方法”一方面为学习理论物理提供必要的数学基础，另一方面为许多实际问题的求解提供数学方法。

本书以樊映川等编《高等数学讲义》或类似的高等数学教本为基础。全书计十章，可分为三个单元。

第一章矢量分析自成一个单元。大量的物理量是矢量，了解矢量场的性质当然很重要。

第二章复变函数也自成一个单元。这章主要讲述解析函数的性质，而解析函数在物理学中和数学中都是很重要的一类函数。

第三章到第十章是篇幅最大的一个单元。第三章提出数学物理定解问题；第四～七章讲述重要的求解方法——分离变数法，以及与此法紧密有关的球函数和柱坐标；第八、九、十章分别讲述一种有用的求解方法。

不当之处欢迎批评指正。

目 录

第一章　矢量分析

只要用数值就能决定的量叫作标量，例如质量、密度、温度等。除了给出数值之外，还要指明方向才能决定的量，如果遵照平行四边形法则或三角形法则相加，就叫作矢量，例如速度、力、电场强度等.

标量或矢量在空间中的分布构成标量场或矢量场.

本章研究标量场的空间变化率，并相应地引入梯度.

本章还研究矢量场的通量和环量，并相应地引入散度和旋度.

有关梯度、散度和旋度的一些运算公式在物理学中常常用到. 本章也要讲述这些公式.

最后，本章要运用平面极坐标、柱坐标和球坐标来研究梯度、散度和旋度.

学习本章之前，读者最好把高等数学中的矢量代数部分复习一次.

§1.1　标量场的梯度

一、方向导数

读者大概都看过盘山公路. 公路并不是对准山上的某个地方直伸而去，它总是弯弯曲曲蜿蜒盘旋而上. 其中道理是大家熟悉

的：直伸而上，固然近些，但太陡了，汽车开不上去；盘旋而上，虽然绕了些路，但不那么陡，便于汽车行驶．这是说，对于山坡的某个任意指定的地点，朝不同方向攀登，陡度各不相同．

研究二维标量场，比方说 xy 平面上某个区域上的温度分布 $u(x, y)$。二元函数$u(x, y)$的图象也有如一个山坡(图1-1)．对于某个任意指定的点P，沿着不同方向，温度改变的“陡度”也是各不相同．例如，沿PP_1'方向，温度的改变最“陡”；沿PP_2'方向，温度的改变最“平缓”．这里说的“陡度”其实就是温度沿特定方向改变的快慢．改用精确的语言来表述，那就是方向导数，其定义如下．

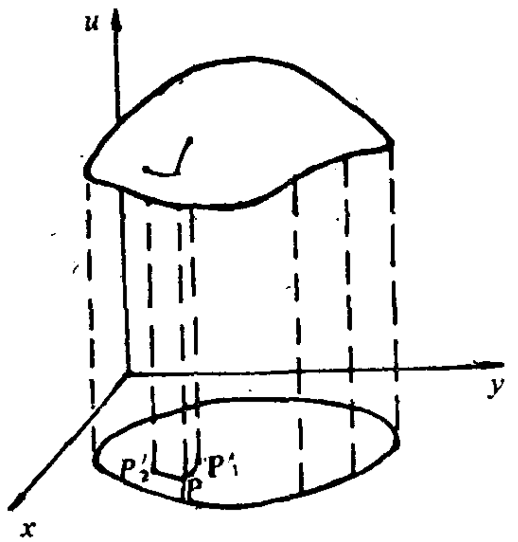


图1-1

设有标量场$u(P)$。在标量函数$u(P)$的定义域中任意指定某一点P及其邻近的点P'，极限

$$\lim_{P'\to P}\frac{u(P')-u(P)}{\overline{PP'}} \quad (1\text{-}1\text{-}1)$$

如果存在，就称此极限为标量场u在点P沿PP'方向的**方向导数**。

这个定义对二维和三维的标量场都适用．当然，对于三维的标量场，不存在图1-1 那种形象化的“陡度”的解释．

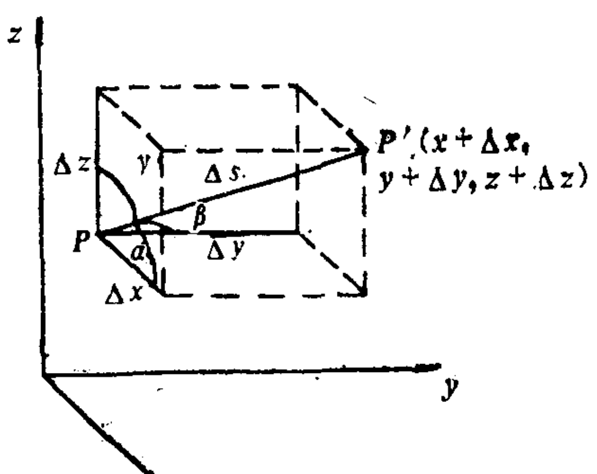


图1-2

如果函数$u(x, y, z)$是可微分的，则方向导数(1-1-1)有一个方便的计算公式。推导如下。把点P和P'的坐标分别记作(x, y, z)和$(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$，记$\overline{PP'}=\Delta s$，并记$PP'$方向的方向角为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$(图1-2)。由$u$的可微分，得知

$$\begin{aligned}&u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-u(x, y, z)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\omega\Delta s,\end{aligned}$$

且当$\Delta s\to 0$时，$\omega\to 0$。于是，在点P_0沿P_0P方向的方向导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s}&=\lim_{\Delta s\to 0}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}+\omega\right\}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (1\text{-}1\text{-}2)\end{aligned}$$

二、梯度

请注意，公式(1-1-2)的右边正是矢量

$$i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

(i、j、k是基本单位矢量)与单位矢量$n=i\cos\alpha+j\cos\beta+k\cos\gamma$的数量积，换言之，即是矢量(1-1-3)在$PP'$方向的投影。

这样看来，矢量(1-1-3)具有重要意义，值得起个名字，这个名字就是标量场u在点P的梯度，记作grad u 或∇u，

$$\boxed{\nabla u=\text{grad }u=i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}.} \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

这里的∇读作 del或nabla，是求导运算符号而形式上又有如"矢量"：