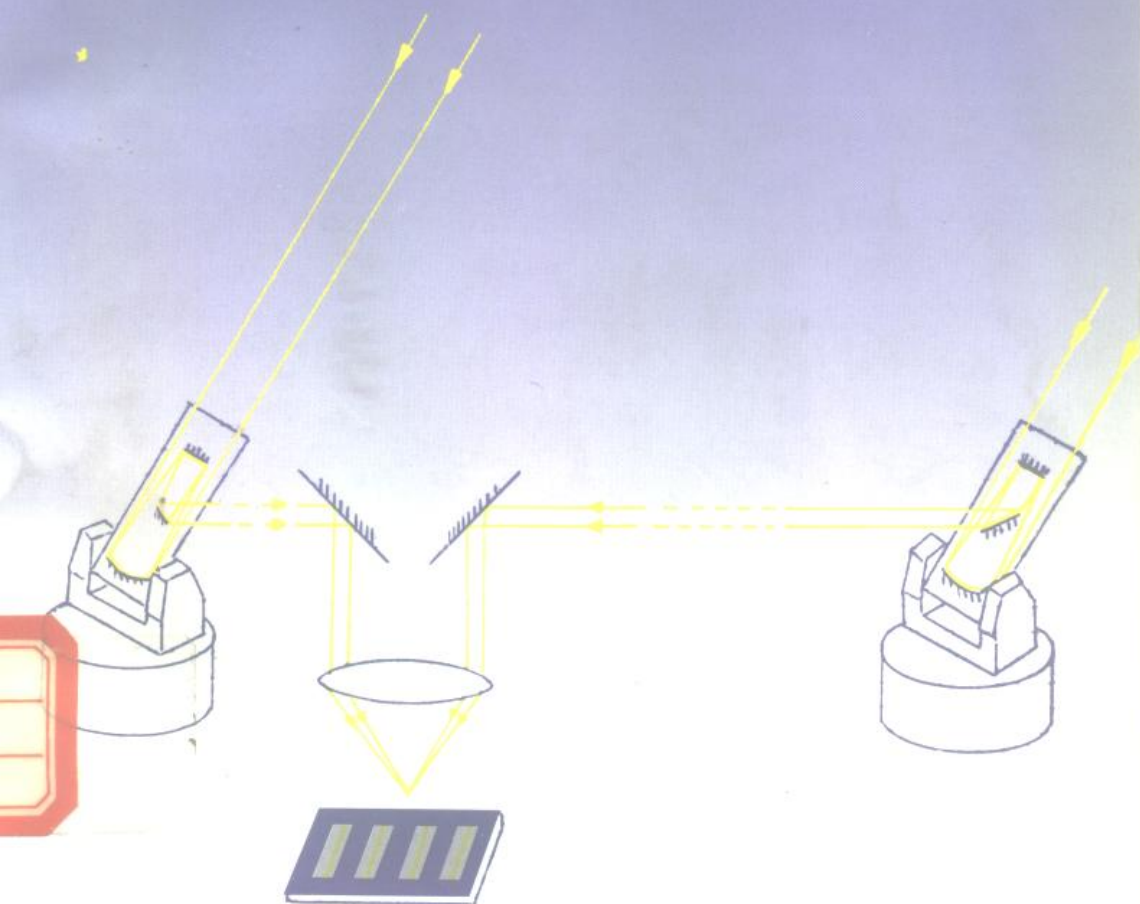


# 天文光干涉测量

王正明 徐家岩 萧金宏 编著  
何慧芳 张秀忠 李再雄



科学出版社

# 天文光干涉测量

王立刚 张世强 张永刚 编  
张世强 张永刚 张立刚 校



P128.11  
WZM

# 天文光干涉测量

王正明 徐家岩 萧金宏 编著  
何慧芳 张秀忠 李再雄

科学出版社

1996

(京)新登字 092 号

## 内 容 简 介

本书从波动光学的基本原理出发介绍光干涉测量用于天文观测以获得高角分辨率天文信息的原理和方法,阐述在红外和可见光波段上天体物理和天体测量研究对长基线光干涉测量的需求,分析了高精度的天文观测对长基线光干涉仪的精度要求,并讨论为达到这些精度要求所需的各种关键技术,书中还介绍了在本世纪 80 年代国际上有了长基线光干涉仪后取得的高分辨率天文观测成果,最后介绍本世纪 90 年代到 21 世纪初国际上主要的天文光干涉仪的发展。

本书可供天文和光学、机械、电学、计算机方面的科技人员以及高等院校有关专业的师生阅读、参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

天文光干涉测量/王正明等编著. —北京: 科学出版社, 1996

ISBN 7-03-005110-6

I.天… II.王… III.天文测量法: 干涉测量法, 光干涉式 IV.P128

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 20349 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1996 年 5 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1996 年 5 月第一次印刷 印张: 8.5/8

印数: 1—400 字数: 220 000

定价: 31.00 元

## 序

几乎可以说自人类文明开始以来,人类对天象的发生和天体的运动就产生了兴趣,在中国,古人对天象的记录最早可追溯到殷商甲骨文时代。尽管如此,在四百年以前人类一直是用肉眼对天体进行观测的,对天象发生的时间和位置,记录的精度都很粗略,而且记录精度的提高在漫长的岁月里进展也极其缓慢。1609年伽利略发明了望远镜之后,天文学的面目就为之一新,可以说给天文学带来了一场大革命。望远镜的使用不但使天文学家能看到许许多多以前用肉眼无法看到的天体,而且对天体位置和运动的观测精度也迅速提高,同时对天体细节的分辨能力也大大提高。因此,望远镜的发明和发展,不但为现代天体测量学、现代天体力学的诞生和发展奠定了基础,也是现代天体物理学发展的基石。

随着科学的发展,天文学家对观测精度和分辨天体细节的要求越来越高;技术的进步,特别是光电技术、探测技术和计算机技术的飞速发展,逐渐地使得这些要求变为现实。为了突破大气对望远镜分辨率的限制,上一世纪法国天文学家 Fizeau 就提出了利用光干涉测量的方法。美国天文学家 Michelson 也为此孜孜不倦地工作,终于在 1890 年利用光干涉法首次成功地测出了木星四颗伽利略卫星的角直径,并于 1921 年首次测定了除太阳以外的第一颗恒星的角直径。

虽然 Michelson 早在大半个世纪之前,以坚持不懈的努力、细致的工作,首次测出了第一颗恒星的角直径,但由于光的波长极短( $0.5\mu\text{m}$ ),大气抖动的频率很高,当时的技术条件还无法补偿大气对光波波前所造成的畸变和倾斜,无法保证独立光束的干涉,因而这种技术并未及时在天文观测中获得应用。经过将近半个世纪的探索 and 实验,这种干涉技术首先在波长较长的射电波段获得

了成功。射电干涉测量的成功，特别是 VLBI 的成功，使得射电天文学发生了革命性的变化。射电天文学的这一成就进一步激励着光学天文学家去追求更短波长上的光干涉仪。同时高技术的发展使得人们能够设法补偿大气高达 100—1000Hz 高频抖动对光波波前的影响。因此自 70 年代末、80 年代初以来，国际上已有好几个长基线光干涉仪相继诞生，并以不同的方式获得了成功。其中比较有代表性的有法国的 I2T、GI2T，澳大利亚的 SUSI，美国的 Mark III 和红外外差式干涉仪 ISI。这些新型的仪器，有的在 80 年代就进行了观测，并取得了一批连最大的望远镜也不能得到的结果。特别是 Mark III 干涉仪，已经在恒星角直径测定、恒星位置测定和双星研究等方面，都取得了重要突破，其观测精度或分辨率都比传统方法提高了一二个数量级。

地面光干涉仪的高精度结果，更促进了这种技术的广泛发展，这不仅表现在各种光干涉仪计划的数量迅速增加，而且也表现在由小口径向大口径，由两单元向多单元的发展趋势；而且大口径望远镜都增加了干涉测量的工作方式，如欧南台的 VLTi，美国的 Keck 干涉仪阵等，都是最好的例证。此外，由于光干涉测量在技术上突破后所显示出的巨大潜力和美好前景，也刺激着空间光干涉测量的发展，于是几乎在地面光干涉仪实验的同时，也提出了空间光干涉仪的建议，有的已在进行实验。由于空间没有大气的影晌，具有相关口径大、等晕角不受限制等优点，具有微角秒、亚微角秒的精度和分辨率的潜力，吸引着天文学家执着地追求，并形成了地面和空间互相补充、互相激励的情况。到目前为止，美国和欧洲的天文学家们已提出约十项空间计划的建议，而且最终计划要把大口径（1.5—2.0m）、长基线（几公里）、多单元（十几个或更多）的光干涉仪安放在月球上。目前提出的和在实验的空间光干涉仪计划，到了下一世纪将成为天文学家用来探索宇宙、揭开天体奥秘的强有力的武器。

中国天文学家和天文仪器专家，及时跟踪国际上的这种新技术，进行了多年的调查、研究和实验，并提出了发展中国光干涉仪

的方案和计划，在此基础上作者写了这本书。希望这本书能起到促进作用，推动和加快光干涉测量技术在中国天文学中的发展和应用。

叶 叔 华

1994年9月

## 前 言

几乎所有的人都遇见过光干涉现象，例如色彩斑斓的肥皂泡及潮湿路面上的油膜，或者是两片重叠在一起的玻璃之间薄薄的空气层上的彩色条纹。光干涉测量技术的发展正是起源于对这些极普通自然现象的解释。300多年来许多杰出的物理学家把光干涉和波动光学理论紧密地联系在一起，为物理学和现代光学技术，诸如激光干涉测量、全息照相的发展作出了重大贡献。

最大限度地提高天文望远镜的空间分辨能力，以便更好地观测天体的形状和结构细节，这是天文学家长期以来梦寐以求的。但是100多年前 C. A. Young 在他的1888年版的教科书中说“恒星的直径是完全不知道的，而且也没有任何希望去测定太阳以外任何恒星的直径。”这句话在当时是对的。尽管从 W. Herschel (1733—1822) 时期起，人们就已认识到星像模糊的根源主要不是望远镜光学系统本身的缺陷，而是地面光学望远镜受大气扰动的影响，但在当时的技术条件下，这是一个无法解决的问题。

另外，由于光的波动性质，即使在大气层之外的真空中，望远镜形成的像也不可能是明锐的。一个点光源经望远镜形成的像不是一个点，而是有点模糊的圆斑，这就是光的衍射形成的衍射斑。望远镜所能分辨的天空中两个点的最小角距离取决于仪器的口径，除了太阳之外，天空中所有恒星的角直径都非常小，没有一个大于 $0.''05$ ，大于 $0.''01$ 的也不超过10个。因此，天文学家要想测量大量恒星的角直径，并能确定恒星表面的亮度分布等，望远镜的直径必须大到几十米甚至上百米，即使在现代技术的条件下，这也是难以实现的。从光的干涉原理出发，通过杨氏装置一类实验，人们认识到，干涉条纹的对比度与光源的宽度及双狭缝的间距有密切的关系。因此把光干涉测量技术与天文望远镜结合起来提

高望远镜的空间分辨能力的想法随之而生。1868年 Fizeau 第一个提议在望远镜前面放置一个带有两个小孔的罩来测量恒星的角直径。根据像面上干涉条纹可见度与光源的角大小以及狭缝之间距离的函数关系，用干涉条纹消失时两狭缝的间距可算出恒星的张角。1873年，E. Stephan 按此想法做了实验，但是由于当时能做这个实验的最大望远镜的口径为 80cm，远不足以做这样的工作，最初的实验失败了。几年后美国物理学家 Michelson 对恒星干涉仪发生了兴趣。大约在 1890 年，Michelson 在加利福尼亚里克 (Lick) 天文台的 30cm 折射望远镜上安装了一个带有两个小孔的罩，成功地测出木星的四个伽利略卫星的角直径。

当威尔逊 (Wilson) 天文台的 2.5m 反射望远镜投入使用后，Anderson 和 Merrill 改进了 Michelson 设计的恒星光干涉仪，分辨出了五车二 (Capella) 为一对双星，并且测出了两星的连线 and 方向。但是当观测参宿四 (Betelgeuse) 时，Michelson 和 Pease 注意到，即使把两孔的间距加大到望远镜口径允许的最大范围，条纹依然清晰如故。为了克服两孔间距上的这个限制，Michelson 于 1921 年更新了他的测星干涉仪，人们称之为 Michelson 恒星干涉仪，如图 2.12 所示。在 2.5m 反射望远镜的主镜前面装上一根钢梁，上面安装了 4 个小平面反射镜，其中  $M_1$  和  $M_2$  的间距可变。 $M_1$  和  $M_2$  的间距很小时，由二者在卡焦点上形成的像重叠，像面上出现清晰的条纹。在望远镜的焦点附近安装了一系列玻璃光楔来确保两路星光的光程长度相等。在观测参宿四时，当  $M_1$  和  $M_2$  的间距增大到 3.07m 时条纹消失，由此测出该星的角直径为  $0.''047$ ，这是天文学史上第一次测定太阳以外恒星的角直径。Michelson 和他的同事们用这个干涉仪对角直径为  $0.''020$ — $0.''047$  范围内的 6 个恒星进行了测量。

由于可见光波长很短，大气的高频扰动和仪器本身的不稳定性等因素使得两相干光的光程差极不稳定，因而早期的 Michelson 干涉仪难以操作以获得理想的干涉条纹，甚至只有 Michelson 本人才能以他高超的操作技巧观测到恒星光干涉条纹。继 Michelson

之后, Pease 又建造了一个改进型的 Michelson 干涉仪, 把一根 15.2m 的钢梁加在一个小望远镜前, 力图提高干涉仪的分辨率, 但是由于在当时条件下无法解决大气扰动、仪器指向、导星、跟踪、机械稳定性等技术问题, 不仅这个干涉仪未能进行成功的观测, 而且在 20 世纪 30 年代以后的几十年内, 恒星光干涉仪的发展就此停滞不前。

随着现代科学技术的发展, 干涉测量首先在射电波段获得成功, 近 20 年来大批具有高科学价值的射电干涉观测成果令天文学家欢欣鼓舞。但是由于光波长比射电波长短得多, 而且地球大气的高频扰动使得干涉测量在可见光波段上的发展大大落后于射电干涉测量。尽管如此, 可见光波段上的干涉测量在近 30 年中仍然获得了长足的发展。1956 年, 英国雷达技术的先驱者 R. H. Brown 和 R. Q. Twiss 根据射电天文中将两个天线上的讯号分开来探测, 测量两讯号强度涨落的相关与天线间距的关系, 从而求得射电源角径的原理, 推广到可见光波段, 开始研制强度干涉仪。强度干涉仪的基本概念是, 如果到达两个分开的点上的光振动之间有相关性, 那么这两个点上光强度的波动也是相关的。把两个独立的集光镜接收到的星光由光电倍增管变成电信号, 送到相关器中, 使两个波动电压相乘, 测定其互相关。由于电信号的频率比光信号频率低得多, 因而操作比较容易。强度干涉仪于 60 年代中期在澳大利亚建成, R. H. Brown 等人用它测定了南天 32 颗最亮的、光谱型为 B5—F8 的恒星的角直径, 把这些结果与天文测光所得的绝对光通量的值结合起来, 给出了比太阳温度高的恒星的有效温度经验关系。这个关系后来成为国际公认的恒星温度尺度。

大气扰动使我们用大望远镜观测恒星时, 看不到恒星的真实面貌, 所看到的像是模模糊糊的甚至是变了形的。用大口径望远镜拍摄短时间曝光 (约 10ms) 的星像, 所得到的像是破碎的无数个小片片, 或称为斑点, 而且这些斑点亦随着时间而千变万化。因此用大望远镜作传统的长露光照相无法获得望远镜应有的极限分辨率。1970 年, A. Labeyrie 研究出望远镜短曝光得到的

像中的斑点结构与用相干光照射一个个小的散射单元而产生的斑点图有相同的性质，他认识到望远镜短曝光的像是大气和望远镜共同组成的光学系统在起作用。根据这种斑点形成的机理，A. Labeyrie 成功地研制了斑点干涉仪。1971 年，A. Labeyrie 等人在帕洛玛 (Palomar) 山上的 5m 望远镜上，以  $0.''015$  的分辨率检测到恒星的结构细节，发现或分辨了大量的双星，包括分光双星。由于利用了望远镜的全口径，光斑干涉仪对于亮度相差略大的双星亦可进行分辨。这一技术后来被推广应用到冷星、长周期变星、聚星、太阳及小行星、类星体 3C273、暗星体以及红外源的观测和研究之中。斑点干涉技术的成功使大望远镜恢复了衍射极限分辨本领。

由于近 20 年来在高技术领域自动控制技术、信息论、系统工程和电子计算机的飞速发展，澳大利亚、美国以及法国等西欧一些国家的光学天文学家逐步突破了可见光波段上干涉测量的主要技术难点，其中包括用主动光学技术来跟踪补偿由于大气高频扰动引起的光程差的变化、伺服控制两束光相干时波前的平行度。与此同时在大气扰动的理论模型研究和实测方面也获得了可喜的进展。上述这些研究和技术成果的应用使得早期的 Michelson 恒星干涉仪得到了新生，各种单口径大望远镜上的光干涉技术和一批已建成的小口径长基线干涉仪已获得了令人振奋的观测成果，特别是美国的 Mark III 恒星干涉仪采用宽带白光观测，光程差补偿精度极高，在短短的二三年中获得了高精度的广角天体测量成果和一大批双星观测成果，确定了许多毫秒级角距的双星轨道和质量，同时也为地面长基线光学综合孔径的发展积累了宝贵的经验。一批长基线多口径干涉仪研制计划正在实施，发展空间光干涉仪的计划和方案也已提出来了，有的已开始了预研究试验。

尽管自然界的光干涉现象已为人们熟知，光干涉测量在我国许多科技领域中也获得了广泛的应用，它们包括高分辨率分光技术、全息照相新技术和距离、角度、位移速度、表面平直度的高精度检测技术等，但是我国大多数天文工作者对天文光干涉测量还不

大熟悉,而且迄今为止,国际上长基线恒星干涉仪仅在小口径干涉方面取得了成功,整个天文光干涉测量的各种技术还处于探索和发展阶段,许多问题还待解决,50cm 以上口径的干涉仪在可见光波段仍存在大气扰动引起波前畸变而使条纹可见度下降的问题。这个问题的可能途径是采取多子口径的干涉方法、自适应光学技术或长基线干涉与斑点干涉相结合等,这些都还有待于从试验到成功的大量技术探索;所有已建成的干涉仪都只是双光束干涉,三光束或三束以上的光的干涉来形成闭合相位的技术尚未成功;在条纹检测器的面阵方面虽然大大提高了时间分辨率,但是量子效率还很低,这也是影响极限星等的一个重要因素。为了便于我国有关的科技工作者,特别是天文工作者和有关的大专院校学生对国际上已经新兴的这门天文观测新技术和新学科有广泛的了解,同时为了促进我国发展和应用这项新技术,并让更多的人对这项新技术发生兴趣,把国际上正在发展的天文光干涉测量技术推向新的阶段,我们写了这本书。

本书以长基线(高角分辨率)光干涉测量为主,简要介绍了天文光干涉测量的理论和各种不同的干涉测量方法(第二章),简要介绍了光干涉在天体测量学中的应用及对仪器的要求,还讨论了关于待测天体的选取问题(第三章),概要介绍了光干涉测量在天体物理学中的应用(第四章)。为了使读者对长基线干涉仪的技术难点和解决这些问题所采用的各种具体技术有较全面的了解,本书在第五章中介绍了长基线光干涉仪的设计理论和干涉测量所需解决的技术问题,第六章介绍国际上主要一些已经建成的干涉仪和在建或在研的各个干涉仪的不同技术和结构。天文光干涉测量的内容涉及到大量的数学和光学基础知识,为了便于读者阅读本书第二章至第六章,我们扼要地摘取一些参考书中讲述的基础知识,并以浅显易懂的形式把它们集中在第一章中,以便读者查阅。所有参考书名均列在本书的参考书目中。从天文光干涉测量整体概念上来说,还应包括探测到的干涉信息的数据处理和像重构的技术,但本书主要介绍干涉测量的硬件技术,数据处理和像重构的软

件技术没有包括在内。本书力求简明扼要，叙述中尽量避免烦琐的数学推导。

本书由王正明(绪言、第一、二、四章和 §5.1、§5.2、5.3.3 小节、5.5.3 小节、§5.6、§5.7、§6.2、§6.5 及 §6.8)、徐家岩(第三章和 5.3.1 小节、5.3.2 小节、§6.4、§6.6、§6.7 和结束语)、萧金宏(§5.4、5.5.1 小节、5.5.2 小节和 §6.1)、何慧芳(§6.3)、张秀忠(§5.8)和李再雄(5.5.4 小节和 §5.9)分工合作完成。

中国科学院院士、中国科学技术协会副主席、原上海天文台台长叶叔华研究员多年来对我们开展的“光学天文学中高空间分辨率应用和技术研究”这一课题(由陕西天文台、南京天文仪器研制中心和上海天文台三个单位合作承担)一直给予大力支持,热情鼓励,并在百忙中为本书写了序。另外,本课题作为中国科学院“八·五”重点应用研究项目,得到中国科学院基础局和天文委员会的大力支持。在本课题执行和本书的写作(作为课题的一部分)过程中,国际上许多天文光干涉测量专家给予我们很大帮助,他们是美国喷气推进实验室的 M. Shao, M. M. Colavita, 史密松天体物理台的 R. Reasenberg, 悉尼大学的 J. Davis, W. J. Tango, 法国地球动力学和天文学探测研究中心的 A. Labeyrie 以及欧南台的 J. Beckers 等。韩天芑先生作为该课题组的组长,在我们写作本书过程中给予了大力支持和鼓励。在本书完成之际,我们谨向以上组织和有关专家一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促和水平的限制,书中难免有错误或不妥之处,恳请老一辈天文学家和读者批评指正。

作 者

1994 年 8 月于陕西天文台

# 目 录

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| <b>第一章 必要的数学和光学基础知识</b> .....                       | 1   |
| § 1.1 数学基础.....                                     | 1   |
| § 1.2 光学基础.....                                     | 11  |
| <b>第二章 天文光干涉测量的理论与方法</b> .....                      | 30  |
| § 2.1 天文光干涉测量的理论基础.....                             | 30  |
| § 2.2 单口径大望远镜上的干涉技术.....                            | 41  |
| § 2.3 长基线光干涉测量技术和方法.....                            | 51  |
| <b>第三章 光干涉测量在天体测量学中的应用</b> .....                    | 64  |
| § 3.1 干涉法测量地球自转参数的基本原理和方法.....                      | 64  |
| § 3.2 源位置的测定.....                                   | 76  |
| § 3.3 基线变化和内部光程变化的监测.....                           | 78  |
| § 3.4 双色观测技术的应用.....                                | 79  |
| 附录 I .....                                          | 83  |
| 附录 II.....                                          | 84  |
| 附录 III .....                                        | 86  |
| <b>第四章 光干涉测量在天体物理学中的应用</b> .....                    | 89  |
| § 4.1 图像重构和天体物理研究.....                              | 90  |
| § 4.2 天体角直径测定的广泛应用.....                             | 96  |
| § 4.3 光干涉测量在双星天文学中的重要作用.....                        | 102 |
| § 4.4 微角秒精度的广角天体测量资料(位置、自行和<br>视差)在天体物理研究中的作用 ..... | 107 |
| <b>第五章 天文光干涉仪的设计理论和关键技术</b> .....                   | 111 |
| § 5.1 地面大气扰动对 Michelson 干涉测量的影响.....                | 112 |
| § 5.2 Michelson 恒星干涉仪的设计要点.....                     | 120 |
| § 5.3 光干涉仪的集光装置及其伺服系统.....                          | 134 |

|            |                         |            |
|------------|-------------------------|------------|
| § 5.4      | 波前倾斜改正——星光方向矫正器·····    | 145        |
| § 5.5      | 光学延迟线及激光计量系统·····       | 151        |
| § 5.6      | 条纹检测和条纹跟踪技术·····        | 163        |
| § 5.7      | 用于天文光干涉测量的探测器·····      | 173        |
| § 5.8      | 光干涉仪的计算机控制系统·····       | 182        |
| § 5.9      | 恒星干涉测量中光的偏振效应·····      | 189        |
| <b>第六章</b> | <b>现代长基线光干涉仪·····</b>   | <b>197</b> |
| § 6.1      | Mark III 天体测量光干涉仪 ····· | 198        |
| § 6.2      | SUSI ·····              | 207        |
| § 6.3      | 法国的光干涉仪·····            | 213        |
| § 6.4      | 美国的其它地面光干涉仪·····        | 221        |
| § 6.5      | VLTi ·····              | 231        |
| § 6.6      | 俄罗斯的光干涉仪·····           | 239        |
| § 6.7      | 我国光干涉仪样机的设计·····        | 243        |
| § 6.8      | 空间光干涉测量·····            | 248        |
|            | 结束语·····                | 259        |
|            | 参考文献·····               | 261        |

# 第一章 必要的数学和光学基础知识

## § 1.1 数学基础

### 1.1.1 自相关函数

人们通常用随机数据的自相关函数来描述一个时刻的数据值与另一个时刻数据值之间的依赖关系。以图 1.1 为例,  $x(t)$  是某个随机时间序列在样本时间  $t$  上的历史记录, 估计  $x(t)$  在  $t$  时刻和  $t + \tau$  时刻上的自相关时, 可以在观测时间段  $T$  上对这两个值的乘积取平均得到。  $T$  趋近于无穷时, 平均乘积的极限就是  $x(t)$  的自相关函数, 用公式表示为

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.1.1)$$

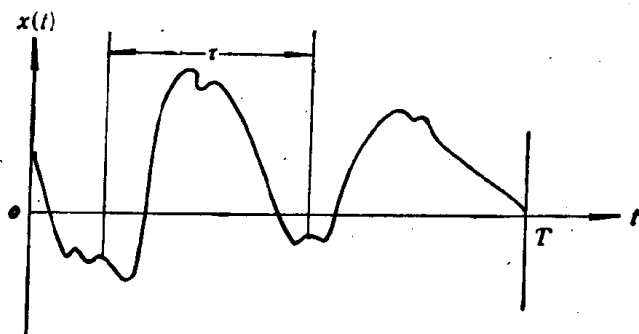


图 1.1 自相关测量

$R_x(\tau)$  是具有实值的偶函数, 可正可负, 且在  $\tau = 0$  时有最大值, 用公式来表示为

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau) \quad (1.1.2)$$

而且

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \quad (\text{对于所有的 } \tau \text{ 均成立})$$

由式(1.1.1)可知,  $x(t)$  的均方值应为

$$\overline{x^2(t)} = R_x(0) \quad (1.1.3)$$

任何有一定变化规律的数据(例如正弦波)在所有的时间位移  $\tau$  上都有自相关函数, 因此物理数据的自相关函数主要是用来确定任何时间的数据值对未来数据值的影响的, 自相关测量也就是用来检测混淆在随机现象中物理数据的规律性的工具。

对于非周期函数, 即函数的周期为无穷大, 如果函数是时间  $t$  的连续函数, 那么它的自相关函数用公式表示为

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.1.4)$$

如果函数是离散型的, 那么自相关函数表示为

$$R_x(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^n x(t_i)x(t_i+\tau)}{n} = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad (1.1.5)$$

式中  $\langle \quad \rangle$  表示求平均。如果函数  $x(t)$  是复函数, 则

$$R_x = \langle x(t)x^*(t+\tau) \rangle \quad (1.1.6)$$

## 1.1.2 互相关函数

两组随机数据的互相关函数表示两组数据值之间总的依赖关系。图 1.2 表示两个随时间而变化的数据记录序列  $x(t)$  和  $y(t)$ 。 $x(t)$  在  $t$  时的值与  $y(t)$  在  $(t+\tau)$  时的值之间的互相关函数可用观测时间段  $T$  上两个值乘积的平均得到。这与 1.1.1 小节所示的求自相关函数的方法完全一样。当  $T$  趋于无穷时, 乘积的平均就是  $x(t)$  和  $y(t)$  的互相关函数, 即

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1.1.7)$$

函数  $R_{xy}(\tau)$  是具有实值的函数, 可正可负, 但  $R_{xy}(\tau)$  不一定在  $\tau=0$  处具有最大值。 $R_{xy}(\tau)$  也不像自相关函数那样一定是偶函数, 但是在  $x$  与  $y$  互换时,  $R_{xy}(\tau)$  是对称于纵轴的, 即

$$R_{xy}(-\tau) = R_{xy}(\tau)$$

当  $R_{xy}(\tau) = 0$  时, 我们说  $x(t)$  和  $y(t)$  是不相关的。如果  $x(t)$