杨志信　孟庆林

现代数学知识基础

Xiandaishuxuezhi shijichu

河北科学技术出版社

现代数学知识基础

杨志信　孟庆林

河北科学技术出版社

冀新登字 004 号

现代数学知识基础

杨志信　孟庆林

河北科学技术出版社出版(石家庄市北马路 45 号)
河北新华印刷三厂印刷　河北省新华书店发行

850×1168 毫米 1/32　8.125 印张　216,000 字　1991 年 12 月第 1 版
1991 年 12 月第 1 次印刷　印数:1—6500　定价:5.00 元
ISBN 7-5375-0712-0/G·82

前　言

学习数学，是提高人的思想水平的有效途径之一。人们重视数学已达到相当的程度。然而，数学的发展将人类绝大多数拒之门外，对于近代数学，他们不仅无法通晓，甚至连较少的了解也望尘莫及；即使是数学家们，在不同领域工作的人，也有“隔行如隔山”的感觉。使更多的人领略现代数学的精妙与和谐，数学工作者责无旁贷。

现在的初等数学教育，从内容上讲，基本上是古典数学；虽然，偶而也插入一些近代数学名词，但在实质上并没有摆脱旧的思想体系。在教育方法上，往往是空洞的解题训练。解题虽然可以提高形式推导能力，却不能导致真正的理解与深入的独立思考。我们认为，数学教育应该使受教育者真正理解到数学是一个有机的整体，是科学思考与行动的基础。在这个意义上说，学习数学知识过程中所接受的思维训练比知识本身更重要。我们没有必要在一些具体的应用问题上兜圈子。事实上，随着学生年龄的增长，生活知识、社会知识的积累，特别是思想水平的提高，许多起初看来非常复杂的问题将变得很简单。从实际问题中抽象出数学模型，进而加以解决，是有一定数学修养以后的事情。因此，与其从零散的具体问题的训练中，慢慢地悟出数学的道理，倒不如借助于前人的经验，直接参与生动的数学活动。

我们并非不强调解决实际问题的重要性，因为这是数学教育的根本目的。只是考虑到，人们所受教育是来自多方面的，各种教育因素各自应该扮演其适当的角色。数学最能培养人的逻辑思维

能力，但在促进人的操作技能方面却大为逊色。决不能要求良好的数学教育培养出著名画师。受教育者能从各方面获得他们需要的知识，提高相应的能力。

本书目的，是为具有初等数学水平的读者，提供接触现代数学的必备知识，并在接受与掌握这些知识的过程中得到相当的思维训练。

由于实数系在全部数学中占有特殊重要的地位，我们试图使初级读者在经过必要的逻辑训练之后，尽快地了解与掌握这一体系。至今，关于实数的论述多出在高等教程里。近些年来，倒是出版了一些有关这个领域的科普读物，但或多或少尚需引证其它专门著作，并且未能展示实数理论的概貌。所以，我们决定作自包含地介绍实数理论的尝试。为了适应更广泛的读者，我们把起点放得很低，只要熟悉分数的四则运算就够了。

但是，必须引入有理数。否则，供我们谈论的材料太少。没有相当的训练，逻辑地引入有理数是徒劳的。我们关于这部分材料的处理，是在简单地回顾了自然数和分数的概念及运算之后，从运算的需要出发规定有理数的意义和运算。在此，我们并没有说清楚有理数究竟是什么；只是通过有理数的运算，使读者逐步把握有理数概念，适如幼儿学数数一样。

接下来，以非常通俗的方式介绍了集合初步。我们认为，有生活常识的人都具有关于集合的一些观念；所以，学起集合论的初步概念来，不会有太大的困难。当然，在介绍这些概念时，所选择的例子必须是读者熟知的事实。集合的交、并、补运算为下一章命题的与、或、非演算提供了模式。

为了消除读者语言方面的障碍，设置了逻辑初步一章。数学虽然千头万绪、分支林立，但遵循并常用的逻辑规律就那么几条。我们基于众所周知的生活常识和读者已了解的集合运算，简单地论述了逻辑演算和基本推理规则，旨在使读者掌握数学语言中的基本句型和推理规律。考虑到接受并使用形式符号要有一个过程，我

们虽引入了一些形式符号，但在论述中偶而才使用一次，一般都用汉语表述。这样逐步渗透，确信有助于读者理解。

仅仅掌握了数学的基本句型和推理规则，就相当于我们掌握了汉语语法。这是远远不够的，还必须参与数学实践活动。为使读者能够自如地运用数学语言表达思想，我们选定整数的整除性理论作为背景材料。通过对这一章的学习，可以知道数学证明到底是怎样一回事。由于这一部分(以及下一章)与实数理论没有直接的因果关系，有些定理的证明看不懂也不要紧(当然，我们希望读者循序渐进，弄懂一点，前进一点)。此外，本章的一些例子，为近世代数学的各种结构提供了初等模型。因此，这些例子，一方面是对读者进行逻辑训练的素材；另一方面，也为读者进一步学习现代数学抽象体系打下一点基础。

因为整数及整数相除，对于读者来说，是熟知的，所以在证明中，读者将不会因太多的新概念而感到困惑。这样，读者就能集中全力来体会数学的逻辑论证。

在整数整除性研究的基础上，还讨论了有理系数多项式的整除理论。由于二者在本质上的一致性，又有了前者作铺垫，读者对后者的学习也不会遇到多大障碍。一方面，后一章对前一章起着巩固与提高的作用；另一方面，两章内容的对比，暗示了这种代数结构可作统一的研究。从不同问题中抽象出共性，统一地加以研究讨论，再把所得结论应用于各种具体问题，是现代数学中重要的思想方法之一。读者在学习数学过程中，应习惯于这种思考与联想。

读者有了逻辑思维能力方面的必要准备后，我们即可顺理成章，介绍实数理论。实数，即有理数的基本列。它涉及两种观念：一是映射(一个基本列，实际上是自然数集到有理数集的一个映射)，二是无限，为使读者对基本列的概念有一个良好的理解，我们简单地讨论了基数理论。考虑到读者对无限集合间的映射的建立，可能感到费解，所以我们从集合的直积入手定义关系，逐步限制，引入映射、对应等概念。这样，就为介绍实数理论铺平了道路。就实数

理论而言，在对材料的处理上，我们力求做到通俗易懂，并且尽可能让读者多了解一些有关实数的知识。但是，本书毕竟是基础性的，只能介绍实数的基本构造、基本性质；关于无理数论，特别是有关超越数的理论，由于需要一些专门化的知识，我们在这里没有作深入的讨论。

实数的点集理论，单置一章。实质上，这也是用来刻画、揭示实数集合本质属性的。我们之所以分开写，在于实数理论（包括点集理论）为数学分析奠定了基础，而点集理论又容易发展成一般点集拓扑学\.

本书没有包括点集的测度理论，因为它较为专门化，并且在我们看来，它是数学某些分支的基础，而不是数学各科的共同基础。

在实数基础上引入复数系，是轻而易举的事情，没什么逻辑困难。为了不扩大篇幅，我们没作这方面的工作。

总之，我们是要为现代数学的三大领域——代数、分析和拓扑的最基本的部分提供一个良好的基础。当然，对任一学科的深入研究，则需学习专门著作。

杨志信　孟庆林

1990 **年** 2 **月**

目　录

第一章　预备知识

1.1　自然数的概念

在小学里，我们已经学习了自然数、分数和小数.自然数按由小到大的顺序排列起来，如

1，2，3，……，117，118，……

从中可以看到，1是最小的自然数.除1以外的自然数，每一个都是它前一个加1的结果；换句话说，任何自然数加1，恰是紧接在它后面的一个自然数.所以，自然数列是无穷无尽的.

1.2　自然数的运算

我们已经熟悉了自然数的加、减、乘、除四则运算.加减互为逆运算，乘除互为逆运算.四则运算中.加法是最基本的运算.自然数的加法运算有如下规律：

1) 封闭性　两个自然数的和是自然数.如

$$3+7=10,\quad 1985+1=1986.$$

2) 交换律　两个自然数相加，交换两加数的位置，其和不变.如

$$3+7=7+3,\quad 1985+1=1+1985.$$

3) 结合律　三个自然数相加，先把前两个数相加再加后一个数，或者先把后两个数相加再加前一个数，其和不变.如

$$(3+7)+5=3+(7+5).$$

从结合律可以看出，用普通语言表达数学事实，太罗嗦，有时

甚至还表述不清.例如,读繁分式“三分之二分之一”就说不清是 $\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}$ 还是 $\dfrac{\dfrac{1}{2}}{3}$.为了言简意明,在人们的实践中逐步形成了一门独特的语言——数学语言.所谓数学语言,就是专门用以表达数学思想的符号语言.如 $\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}$,$3+2=5$ 等等,都有一定的意义.

观察你所见到的人,你会发现,张三有两只眼睛,李四有两只眼睛,…… 在表述你的发现时,你一定会说:“‘人’有两只眼睛.”一般情况下,你的断语当然是正确的.在你的断语中,“人”可以认为是表示每一个具体人(如张三、李四等)的符号.用每一个具体的人替换“人”字(这种手续叫做“代入”),断语都是正确的.例如,王五有两只眼睛等等.事实上,你是概括了一般人所共有的特性以后,用“人”这个符号作了一般性的断言.这样做,在表述上既简单又明白.设想如果你不作一般性的断言,而是具体地陈述你所见的一个个人分别有几只眼睛,恐怕你自己也懒得说下去.类似地,在数学里如果一般的数都有某性质,我们就用小写英文字母表示数,来陈述这一事实.例如,设 a 是自然数,那么 $a+1$ 是自然数.这句话代表“任何自然数加 1,仍是自然数”.

如果用小写英文字母 a、b、c 表示自然数,自然数加法的封闭性、交换律和结合律可简述如下:

1′)封闭性　$a+b$ 是自然数;

2′)交换律　$a+b=b+a$;

3′)结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$.

还应注意到,有些一般性的断言,对一些特殊情况不适用.就上面提到的例子来说,某人先天发育不全,只有一只眼睛,那么把某人代入你的断语中,说“某人有两只眼睛”就不正确了,因为这与事实不符.数学里也经常出现这样的特殊情况.例如,设 x 表示我们所学过的数,$\dfrac{1}{x}$ 是 x 的倒数,这几乎对每一个数都适用;但

0“先天不足”，$\frac{1}{0}$ 没有意义. 以后的学习中，要特别注意到0的特殊性.

自然数的乘法也有如下规律. 这里，我们同时用两种语言表述，请加以比较(以下，a、b、c 仍表示自然数).

4) 封闭性　两个自然数的乘积是自然数.

$a \times b$ 是自然数.

5) 交换律　两个自然数相乘，交换因数的位置，积不变.

$$a \times b = b \times a.$$

6) 结合律　三个自然数相乘，先把前两个数相乘再乘以后一个数，或者先把后两个数相乘再乘以前一个数，积相等.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

此外，乘法对加法还有：

7) 分配律　一个自然数同两个自然数的和相乘，等于这个数分别与两个加数相乘所得积的和.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

通过小学数学的学习，我们已经体会到，自然数加、乘运算的封闭性和结合律，保证了运算能够进行，并且所得结果是唯一的. 理解这一点，将会对我们以后的学习有很大帮助. 我们还知道，灵活运用自然数的运算律，能够使运算得到简化.

在自然数里，减法不是任意可行*的，也就是说，自然数对减法没有封闭性. 如

$$3 - 3, \quad 5 - 7$$

在自然数里都不能进行. 有的读者可能认为，前一个减法运算是可行的，因为 $3 - 3 = 0$. 应当指出，0 不是自然数，要想使 $3 - 3$，$5 - 7$ 可行就必须引入新的数.

和减法类似，在自然数里除法也不是任意可行的. 如

$$2 \div 3, \quad 7 \div 4$$

* 意思是任何两个数都能进行运算.

都不能进行.今后的学习中,我们将逐步解决这些问题.

1.3 分　　数

1.3.1 分数的概念

在小学数学里,分数是这样定义的:把单位“1”平均分成若干份,表示其中一份或几份的数,叫做分数.现在,我们换一种方式表述它:两个整数相除的结果*叫做分数.如 $2\div 3=\frac{2}{3}$,$1\div 5=\frac{1}{5}$,$a\div b=\frac{a}{b}$ 等等.由于0不能作除数,所以分数的分母不能是0.此外,我们把整数理解为分母是1的分数.

1.3.2 分数的基本性质

分数的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于0的数,分数值不变.用符号表示,即

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}\quad(m\neq 0),\qquad \frac{a\div m}{b\div m}=\frac{a}{b}\quad(m\neq 0).$$

1.3.3 分数的大小

分数可以规定大小.

同分母的分数,分子大的分数较大.

不同分母的分数,可以根据分数的基本性质把它们变成同分母的分数(叫做通分),然后再比较大小.

这样规定分数的大小,与整数除法的性质是一致的.大家知道,除数一定时,被除数越大,那么所得的商(两数相除的结果)也

---

* 这里的结果是形式结果,如 $2\div 3$ 本身就可以看作是一个分数 $\frac{2}{3}$,只不过是 $2\div 3$ 的另一记法.读者不必深究形式结果的实质是什么.

就越大.

请读者自己想一想:① 同分子分数大小比较的情况;② 除 0 以外,有没有最小的分数;③ 有没有最大的分数.

1.3.4 分数的运算

分数的四则运算,大家已很熟悉.这里,我们仅用符号把运算规则表述在下面.顺便指出,用字母表示数的乘法运算时,习惯上用"$\cdot$"代替"$\times$"号;有时,干脆略去乘号.如 $a \times b = a \cdot b = ab$.

1)加法 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}$;

2)减法 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad (ad \geqslant bc)$;

3)乘法 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

4)除法 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

和自然数一样,分数的加、乘运算也满足以下几条规律:

设 s、t、r 是分数,那么

1)$s + t = t + s$,加法交换律;

2)$(s + t) + r = s + (t + r)$,加法结合律;

3)$st = ts$,乘法交换律;

4)$(st)r = s(tr)$,乘法结合律;

5)$s(t + r) = st + sr$(乘对加法)分配律;

此外,我们还应注意到 0 和 1 的运算特性

6)$0 + s = s, \quad 0 \cdot s = 0$;

7)$1 \cdot s = s$.

第二章　有理数

2.1　有理数的有关概念

2.1.1　正数和负数

有了分数，关于除法运算的限制就大大减少了. 除 0 不能作除数外，任何两数（整数或分数）相除所得的商仍是整数或分数. 但对减法来说，问题仍然没有解决，如 $3-7$，$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ 等，都不能得出结果. 为此，我们在已有数的基础上，引入一种新数 —— 负数.

数的记号以及通过这些记号所进行的运算，比数的意义更重要. 因为抽象地谈论后者，不易说得清楚. 人们对后者的认识往往是通过前者逐步加深的. 所以，引入负数，我们就从规定表示负数的符号，并通过这些符号规定负数的运算入手.

在所学过的自然数和分数前边添上一个符号"－"，如 -1，$-2,\cdots,-n,\cdots,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{7}{2},\cdots,-\frac{n}{m},\cdots$ 其中，m、n 是自然数. 这样表示的数叫负数. 符号"－"叫做负号. $-1,-2,\cdots,-n,\cdots$ 叫做负整数；$-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{7}{2},\cdots,-\frac{n}{m},\cdots$ 叫做负分数.

在所学过的自然数和分数前边添上一个符号"＋"，如 $+1,+2,\cdots,+n,\cdots,+\frac{1}{2},+\frac{1}{3},+\frac{2}{3},\cdots,+\frac{n}{m},\cdots$ 这样表示的数叫做正数. 符号"＋"叫做正号. $+1,+2,\cdots,+n,\cdots$ 叫做正整数；$+\frac{1}{2},+\frac{1}{3},+\frac{2}{3},\cdots,+\frac{n}{m},\cdots$ 叫做正分数.

0既不是正数，也不是负数.

正数、负数以及0统称为有理数. 以后，我们再提到整数，就包括了正整数、负整数以及0，说到分数一般指的是正分数和负分数.

2.1.2 相反数

观察：

$$
\begin{gathered}
+1 \text{ 和 } -1, \\
+2 \text{ 和 } -2, \\
\cdots\cdots \\
+n \text{ 和 } -n, \\
+\frac{1}{2} \text{ 和 } -\frac{1}{2}, \\
+\frac{2}{3} \text{ 和 } -\frac{2}{3}, \\
\cdots\cdots \\
+\frac{n}{m} \text{ 和 } -\frac{n}{m} \quad (m\text{、}n \text{ 为自然数}).
\end{gathered}
$$

读者不难发现，以上各对数只是符号不同，一正一负. 像这样只有符号不同的两个数，我们说其中一个是另一个的相反数(或称它们互为相反数). 如 $+1$ 的相反数是 -1；-3 的相反数是 $+3$；$-n$ 的相反数是 $+n$，$+n$ 和 $-n$ 互为相反数.

规定0的相反数还是0.

添号规定：

1）在一个数前边添上一个正号“+”，仍与原数相同. 如 $+(+1)=+1$，$+(+4)=+4$，$+(+n)=+n$，$+(-1)=-1$，$+(-4)=-4$，$+(-n)=-n$.

2）在一个数前边添上一个负号“－”，就成为原来数的相反数. 如 $-(+1)=-1$，$-(+4)=-4$，$-(+n)=-n$.

3）$+0=0$，$-0=0$.

2.1.3 绝对值

把一个有理数的符号去掉之后所得到的数，叫做这个有理数的绝对值. 如 $+1$ 的绝对值是 1，-1 的绝对值是 1；$+2$ 的绝对值是 2，-2 的绝对值是 2；$+7$ 和 -7 的绝对值都是 7；…… 可见，互为相反的两个数绝对值相等.

0 的绝对值是 0.

对于一般的有理数 s，用 $|s|$ 表示 s 的绝对值. 如

$$|0| = 0, |-3| = 3, |+5| = 5.$$

2.2 有理数的大小

1) 两个正数比较，绝对值大的较大.

显然，正整数从小到大的顺序依次是

$+1, +2, +3, \cdots, +n, +(n+1), \cdots$ 其中，n 是自然数.

关于正分数，我们无法依大小顺序把它们排列起来，但是，任给两个分数，都能比较大小.

例　比较 $+\frac{1}{2}$ 和 $+\frac{1}{3}$ 的大小.

因为 $|+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}, |+\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$,

又因为 $\frac{1}{2}$ 大于 $\frac{1}{3}$，所以

$$+\frac{1}{2} \text{ 大于 } +\frac{1}{3}.$$

2) 两个负数比较，绝对值大的反而小.

负整数由大到小的顺序依次是

$-1, -2, -3, \cdots, -n, -(n+1), \cdots$ 其中，n 是自然数.

负分数也不能按大小顺序排列起来. 但任给两个负分数，也都能比较其大小.